Höhere Analysis, II

6. Übungsserie

IV-1 Seien $\mathbb{X}$ ein Banachraum und $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$. Dann setzt man

$$r_0(T) = \min\left\{k \in \mathbb{N}_0 : \mathbf{N}(T^k) = \mathbf{N}(T^{k+1})\right\}, \quad r^0(T) = \min\left\{k \in \mathbb{N}_0 : \mathbf{R}(T^k) = \mathbf{R}(T^{k+1})\right\},$$

(falls sie existieren). Seien $\mathbb{X} = \ell_2(\mathbb{N})$, $(\alpha_n)_n \in \ell_\infty(\mathbb{N})$, sowie der Diagonaloperator

$$D_\alpha : \ell_2(\mathbb{N}) \to \ell_2(\mathbb{N}), \quad (x_n)_n \mapsto D_\alpha(x_n)_n = (\alpha_n x_n)_n$$

gegeben. Berechnen Sie $r_0(D_\alpha)$ und $r^0(D_\alpha)$.

IV-2 Seien $\mathbb{X}$ ein Banachraum, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$.

(a) Zeigen Sie, dass für den dualen Operator $A' \in \mathcal{L}(\mathbb{X}')$ gilt: $\boldsymbol{\sigma}(A) = \boldsymbol{\sigma}(A')$.

(b) Sei $B \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$. Beweisen Sie die *Resolventengleichungen*:

$$\begin{aligned} R_\lambda(A) - R_\mu(A) &= (\mu - \lambda) R_\lambda(A) R_\mu(A), && \lambda, \mu \in \boldsymbol{\varrho}(A), \\ R_\lambda(A) - R_\lambda(B) &= R_\lambda(A)(A - B) R_\lambda(B), && \lambda \in \boldsymbol{\varrho}(A) \cap \boldsymbol{\varrho}(B). \end{aligned}$$

IV-3 Seien die Operatoren

$$\begin{aligned} R &: \ell_2(\mathbb{N}) \to \ell_2(\mathbb{N}), \quad R : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (0, x_1, x_2, \dots), \\ T &: \ell_1(\mathbb{N}) \to \ell_1(\mathbb{N}), \quad T : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (0, x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots) \end{aligned}$$

gegeben. Zeigen Sie:

(a) $\boldsymbol{\sigma}(R) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda| \le 1\}$, $\quad \boldsymbol{\sigma}_{\mathsf{p}}^*(R) = \emptyset$,

(b) $\boldsymbol{\sigma}(T) = \{0\}$, $\quad \boldsymbol{\sigma}_{\mathsf{p}}^*(T) = \emptyset$.

IV-4 Seien $\mathbb{X}$ ein Banachraum, $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$. Bestimmen Sie $\|T\|_{\mathcal{L}(\mathbb{X})}$, $\boldsymbol{\sigma}(T)$, $\boldsymbol{\sigma}_{\mathsf{p}}^*(T)$, und überprüfen Sie, ob $T \in \mathcal{K}(\mathbb{X})$ gilt.

(a) $X = \ell_\infty(\mathbb{N})$, $T : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (x_2, x_3, x_4, \dots)$,

(b) $X = \{f \in \mathsf{C}[0,1] : f(0) = 0\}$, $T : f \mapsto Tf$, mit $Tf(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

IV-5 Seien $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ ein Polynom mit $a_k \in \mathbb{C}$, sowie $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$. Beweisen Sie:

$$\boldsymbol{\sigma}(p(T)) = p(\boldsymbol{\sigma}(T)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \boldsymbol{\sigma}(T)\}.$$