Höhere Analysis 2
FSU Jena - SS 2011
Serie 05 - Lösungen

Stilianos Louca

May 30, 2011

Aufgabe III-15

(a) Konvergiert $(x_n)_n \subseteq X$ gegen $x \in X$, so folgt $ax_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} ax$ für jedes $a \in X'$ aufgrund der Stetigkeit von a. Die Umkehrung gilt allerdings nicht! Betrachte z.B. die Folge $(e_n)_n \subseteq l_p(\mathbb{N})$ für irgendein $1 < p < \infty$. Sie konvergiert schwach gegen die Nullfolge da für jedes $a := (a_n) \in l_q(\mathbb{N})$ gilt

$$\langle e_n, a\rangle = a_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{0.1}$$

wobei $1 < q < \infty$ Hölder-konjugiert zu p sei. Jedoch ist stets $\|e_n\| = 1$, so dass e_n nicht gegen 0 (eigentlich sogar überhaupt nicht) konvergiert.

(b) Sei $A \subseteq X$ so dass für alle $\varphi \in X'$ das Bild $\varphi(A)$ in $\mathbb{K}$ beschränkt ist (A heißt **schwach beschränkt**). Dann ist die Familie stetiger, linearer Funktionale $J(A) \subseteq X''$ punktweise beschränkt auf X', wobei $J : X \hookrightarrow X''$ die kanonische Einbettung in den Bidualraum von X sei. Beachte dass X' stets ein Banachraum ist, so dass nach Banach-Steinhaus $J(A)$ beschränkt in X'' ist. Da J eine Isometrie ist, ist auch A beschränkt in X. Jede schwach beschränkte Menge in X ist also auch beschränkt.

Ist nun eine Folge $(x_n)_n \subseteq X$ schwach konvergent, so ist sie als Menge schwach beschränkt da für jedes $\varphi \in X'$ das Bild $\varphi(\{x_n\}_n)$ beschränkt ist, daher beschränkt.

(c) Für jedes $a \in Y'$ gilt $aSx_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} aSx$, da die Komposition $a \circ S$ stetig ist. Daher gehen $Sx_n \underset{w}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} Sx$.

Nun ist die Folge $(x_n)_n$ eine beschränkte Menge, daher ihr Bild $\{Tx_n\}_n$ relativ-kompakt. Beachte dass natürlich $Tx_n \underset{w}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} Tx$. Daher genügt es für die zweite Aussage folgendes zu zeigen:

Behauptung: Ist $(y_n)_n \subseteq Y$ eine schwach gegen $y \in Y$ konvergente Folge, die noch dazu relativ kompakt ist, so muss $y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$.
Beweis: Es sei bemerkt dass jede konvergente Teilfolge einer schwach konvergenten Folge den gleichen Grenzwert wie die Ursprüngliche Folge besitzt. Dies ist lediglich eine Konsequenz des Hahn-Banach Theorems. Nehme nun an $(y_n)_n$ konvergiert nicht gegen y, dann existiert ein $\varepsilon > 0$ und eine Teilfolge $(y_{n_k})_k \subseteq (y_n)_n$ mit $\|y_{n_k} - y\| \geq \varepsilon \ \forall k$. Diese wiederum besitzt aufgrund der relativen Kompaktheit eine konvergente Teilfolge, die nach obigen Überlegungen gegen y konvergieren muss, ein Widerspruch!

(d) **Richtung "$\Rightarrow$":** Nehme an $x_n \rightharpoonup 0$, dann ist $(x^n)_n$ nach (b) beschränkt. Ferner geht für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$x_k^n = \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i^n \delta_{ik} = \langle x^n, e_k\rangle =\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{0.2}$$

da $e_k \in (l_p(\mathbb{N}))'$.

Richtung "$\Leftarrow$": Nehme an $(x^n)_n$ ist beschränkt und $x_k^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Ist $A \subseteq (l_p(\mathbb{N}))'$ irgendeine dichte Teilmenge, so genügt es nach Beschränktheit von $(x^n)_n$ zu zeigen dass $ax_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ für jedes $a \in A$. Wählen nun $A := \{a \in l_q(\mathbb{N}) : \mathrm{supp}(a) \text{ kompakt}\}$ als Menge aller Funktionale dargestellt durch Folgen aus $l_q(\mathbb{N})$ mit kompaktem Träger $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$. Diese setzen sich als endliche Linearkombinationen der *Basisfolgen* $(e_k)_k$ zusammen, so dass es genügt zu zeigen $\langle x^n, e_k\rangle \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Doch dies wurde vorausgesetzt.

(e) **Richtung "$\Rightarrow$":** Klar.

Richtung "$\Leftarrow$": Nehme an $x_k \rightharpoonup x$ und $\|x_k\| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \|x\|$. Zu zeigen wäre dass $\langle x_k - x, x_k - x\rangle \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Tatsächlich

$$\langle x_k - x, x_k - x\rangle = \underbrace{\|x_k\|^2}_{\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}\|x\|^2} + \|x\|^2 - \underbrace{\langle x_k, x\rangle}_{\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}\langle x,x\rangle} - \underbrace{\langle x, x_k\rangle}_{\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}\langle x,x\rangle} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{0.3}$$

Aufgabe III-16

(a) Zu zeigen wäre dass für jedes $w' \in W'$ und jedes $x \in X$ gilt $\langle x, (ST)'w'\rangle = \langle x, T'S'\rangle$. Tatsächlich folgt direkt aus der Definition des dualen Operators

$$\langle x, (ST)'w'\rangle = \langle STx, w'\rangle = \langle Tx, S'w'\rangle = \langle x, T'S'w'\rangle . \tag{0.4}$$

(b) Es ist $y' \in \ker(T')$ genau dann wenn $\langle x, T'y'\rangle = 0$ für jedes $x \in X$, sprich $\langle Tx, y'\rangle = 0$ bzw. $\langle y, y'\rangle$ für jedes $y \in T(X)$. Daher ist $\ker(T') = (T(X))^\perp$.

Nach Hahn-Banach ist $x \in \ker(T)$ genau dann wenn $\langle Tx, a\rangle = 0$ sprich $\langle x, T'a\rangle$ für jedes $a \in Y'$, das heißt $x \in (T'(Y'))_\perp$. Daher ist $\ker(T) = (T'(Y'))_\perp$.

Sei $y \in \overline{T(X)}$, sprich $T(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$ für irgendwelche $x_n \in X$. Für jedes $a \in \ker(T')$ gilt nun

$$\langle y, a\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Tx_n, a\rangle = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\langle x_n, T'a\rangle}_{0} = 0, \tag{0.5}$$

sprich $y \in (\ker(T'))_\perp$ bzw. $\overline{T(X)} \subseteq (\ker(T'))_\perp$. Ist anderseits $y \in (\ker(T'))_\perp$, so impliziert $a \in \ker(T')$ stets $\langle y, a\rangle = 0$. Nach obigen Überlegungen impliziert also $a \in (T(X))^\perp$ stets $\langle y, a\rangle = 0$. Nehme nun an dass $y \notin \overline{T(X)}$, so existiert nach dem Hahn-Banachschen Trennungssatz ein $\varphi \in Y'$ mit $\varphi \in \left(\overline{T(X)}\right)^\perp$ (insbesondere $\varphi \in (T(X))^\perp$) und $\langle y, \varphi\rangle \neq 0$, ein Widerspruch. Daher muss $y \in \overline{T(X)}$ und ferner $(\ker(T'))_\perp = \overline{T(X)}$.

Aufgabe III-17

(a) Knapp gefasst: Die Aussage ist bekannt als Satz von Banach-Alaoglu. Sie lässt sich für separable, reflexive, normierte Räume mittels des Cantorschen Diagonalisierungsverfahrens zeigen. Dabei verwendet man die Tatsache dass nach Aufgabe III-12 (Serie 04) ein reflexiver Raum genau dann separabel ist wenn sein Dualraum separabel ist. Für allgemeine Räume betrachtet man die Folge im Abschluss des von ihr aufgespannten Unterraumes, der nun wiederum separabel und reflexiv ist.

(b) Betrachten die beschränkte Folge $(f_n)_n \subseteq \mathcal{C}[0,1]$, $f_n(t) = (1-nt)\cdot 1_{[0,\frac{1}{n}]}(t)$ und nehmen an dass eine Teilfolge $(f_{n_k})_k \subseteq (f_n)_n$ schwach gegen $f \in \mathcal{C}[0,1]$ konvergiert. Nun, für jedes $t \in (0,1]$ hat man $\langle f_{n_k}, \delta_t\rangle \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ und $\langle f_{n_k}, \delta_0\rangle \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, was impliziert $f = 1_{\{0\}}$. Dies ist ein Widerspruch da $1_{\{0\}} \notin \mathcal{C}[0,1]$.

(c) Richtung "$\Rightarrow$" ist schon in Aufgabe III-15(c) gezeigt worden.

Nehme nun umgekehrt an dass $K(B_1)$ nicht relativ-kompakt ist, wobei B_1 die abgeschlossene Einheitskugel in X sei. Dann existiert eine Folge $(y_n)_n \subseteq T(B_1)$ die keine konvergente Teilfolge besitzt, mit $y_n = K(x_n)$ für irgendwelche $x_n \in B_1$. Nach (a) besitzt jedoch $(x_n)_n$ eine schwach-konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_k$ deren Bildfolge $(Tx_{n_k})_k$ natürlich trotzdem nicht stark konvergiert.