Höhere Analysis, II

5. Übungsserie

III-15 Sei $\mathbb{X}$ ein normierter Raum. Eine Folge $(x_n)_n \subset \mathbb{X}$ heißt *schwach konvergent* gegen $x \in \mathbb{X}$, d.h. $x_n \xrightharpoonup[n\to\infty]{} x$, falls für alle $\varphi \in \mathbb{X}'$ gilt: $\langle x_n, \varphi\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle x, \varphi\rangle$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Jede konvergente Folge $(x_n)_n \subset \mathbb{X}$ konvergiert auch schwach, die Umkehrung ist i.a. aber falsch.

Hinweis: $\mathbb{X} = \ell_p(\mathbb{N})$, $1 < p < \infty$, $x_n = e_n$, $n \in \mathbb{N}$

(b) Jede schwach konvergente Folge ist beschränkt.

Hinweis: Beweisen Sie mit dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit zunächst: $A \subset \mathbb{X}$ ist beschränkt genau dann, wenn für alle $\varphi \in \mathbb{X}'$ die Menge $\varphi(A)$ in $\mathbb{K}$ beschränkt ist.

(c) Seien $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ Banachräume, $S \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, $T \in \mathcal{K}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, $x \in \mathbb{X}$, $(x_n)_n \subset \mathbb{X}$ mit $x_n \xrightharpoonup[n\to\infty]{} x$. Daraus folgen

$$Sx_n \xrightharpoonup[n\to\infty]{} Sx \quad \text{in } \mathbb{K}, \qquad \text{sowie} \quad Tx_n \xrightarrow[n\to\infty]{} Tx \quad \text{in } \mathbb{Y}.$$

(d) Seien $\mathbb{X} = \ell_p(\mathbb{N})$, $1 < p < \infty$, und $(x^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell_p(\mathbb{N})$ mit $x^n = (x_k^n)_{k\in\mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$x^n \xrightharpoonup[n\to\infty]{} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x^n)_n \ \text{ beschränkt, sowie } \ x_k^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

(e) Es sei $\mathbb{X} = \mathbb{H}$ ein Hilbertraum und $(x_k)_k \subset \mathbb{H}$. Beweisen Sie folgende Äquivalenz:

$$x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} x \quad \text{in } \mathbb{H} \quad \Longleftrightarrow \quad x_k \xrightharpoonup[k\to\infty]{} x \quad \text{und} \quad \|x_k\|_{\mathbb{H}} \xrightarrow[k\to\infty]{} \|x\|_{\mathbb{H}}.$$

III-16 Seien $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ Banachräume und $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Für einen Banachraum $\mathbb{W}$ und $S \in \mathcal{L}(\mathbb{Y}, \mathbb{W})$ gilt: $(ST)' = T'S'$.

(b) Es gilt:

$$\mathbf{N}(T') = (\mathbf{R}(T))^{\perp}, \qquad \mathbf{N}(T) = (\mathbf{R}(T'))_{\perp} \qquad \text{sowie} \quad \overline{\mathbf{R}(T)} = (\mathbf{N}(T'))_{\perp}.$$

III-17 Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Aus jeder beschränkten Folge in einem reflexiven Banachraum kann man eine schwach-konvergente Teilfolge auswählen.

(b) Der Raum $\mathrm{C}[0,1]$ ist nicht reflexiv.

Hinweis: Betrachten Sie die Folge $f_n(t) = (1-nt)\chi_{[0,\frac{1}{n}]}$ und zeigen Sie, dass keine Teilfolge schwach in $\mathrm{C}[0,1]$ konvergiert. Benutzen Sie dazu, dass die Funktionale $\delta_t : f \to f(t)$ in $(\mathrm{C}[0,1])'$ liegen.

(c) Sei $\mathbb{X}$ ein reflexiver Banachraum und $K \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$. Es gilt genau dann $K \in \mathcal{K}(\mathbb{X})$, wenn für jede schwach-konvergente Folge $(x_n)_n \subset \mathbb{X}$ die Folge $(Kx_n)_n$ (stark-)konvergent ist.