Höhere Analysis 2
FSU Jena - SS 2011
Serie 04 - Lösungen

Stilianos Louca

May 17, 2011

Aufgabe III-11

Sei $x_1, .., x_n$ eine Basis auf U und $a_1, .., a_n \in U'$ die dazu duale Basis, sprich $\langle x_i, a_j \rangle = \delta_{ij}\ \forall i, j \in \{1, .., n\}$. Nach Auerbach kann man annehmen dass die Basis $x_1, .., x_n$ eine Auerbach-Basis ist, sprich $\|x_i\| = 1 = \|a_i\|_{U'}$ für jedes $i \in \{1, .., n\}$. Nach Hahn-Banach kann man annehmen dass jedes a_i auf ganz X definiert ist mit Norm $\|a_i\|_{X'} = \|a_i\|_{U'} = 1$. Setze nun

$$P := \sum_{i=1}^n a_i \otimes x_i : X \to U \quad , \quad P(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, a_i \rangle \cdot x_i. \tag{0.1}$$

Dann ist P linear, stetig und es gilt

$$P^2(x) = \sum_i \langle P(x), a_i \rangle \cdot x_i = \sum_i \sum_j a_j(x) \underbrace{\langle x_j, a_i \rangle}_{\delta_{ij}} \cdot x_i = \sum_i a_i(x) \cdot x_i = P(x), \tag{0.2}$$

sprich P ist eine Projektion. Ferner ist

$$\|P\| \leq \sum_i \|a_i \otimes x_i\| = \sum_i \|a_i\| \cdot \|x_i\| = n = \dim U. \tag{0.3}$$

Da $P(x_i) = x_i$ für jedes $i \in \{1, .., n\}$, ist $\text{image}(P) = U$. Die Tatsache $X = \text{image}(P) \oplus \ker(P)$ ist eine allgemeine Tatsache über Projektionen.

Aufgabe III-12

Es sei bemerkt dass die separabilität eines normierten Raumes X äquivalent zur Separabilität der Oberfläche $\partial B(X)$ seines Einheitskugel $B(X)$ ist. Sei nun X' separabel, dazu $\{a_1, a_2, ..\} \subseteq B(X')$ eine abzählbare, in $B(X')$ dichte Familie stetiger Linearformen. Es existieren nun $x_1, x_2, .. \in B(X)$ so dass $\langle x_i, a_i \rangle \geq \frac{1}{2}$ für jedes $i \in \mathbb{N}$.

Behauptung: $U := \text{span}\{x_1, x_2, ..\}$ liegt dicht in X.

> **Beweis:** Nach Hahn-Banach wäre zu zeigen dass $U^\perp = \{0\}$. Nehme an dass $a \in U^\perp \setminus \{0\}$, o.B.d.A. $\|a\| = 1$. Dann existiert ein $i \in \mathbb{N}$ mit $\|a - a_i\| \leq \frac{1}{4}$. Doch $|(a - a_i)(x_i)| = |0 + a_i(x_i)| \geq \frac{1}{2}$, ein Widerspruch!

Die abzählbare Untermenge $U_o := \text{span}_{\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}} \{x_1, x_2, ..\}$ ist dicht in U, daher auch dicht in X.

□

Aufgabe III-13

Bezeichnen die Elemente $x + U$ von X/U mit $[x]$.

(i) Ist $(a_n)_n \subseteq U^\perp$ eine gegen $a \in X'$ konvergente Folge, spricht $\|a - a_n\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, so gilt insbesondere $\|ax\| = \lim_{n\to\infty} \|ax - a_n x\| = 0$ für jedes $x \in U$, sprich $a \in U^\perp$ und $U^\perp$ ist abgeschlossen. Ist $(x_n)_n \subseteq V_\perp$ eine gegen $x \in X$ konvergierende Folge, so gilt $ax = \lim_{n\to\infty} ax_n = 0$ für jedes $a \in V$, sprich $x \in V_\perp$ und V ist abgeschlossen.

(ii) Auf X/U gelte die Norm $\|[x]\| := \inf_{u\in U} \|x+u\|$. Bemerke dass $\|[x]\| \leq \|x\|$ für jedes $x \in X$. Jede stetige Linearform $a \in U^\perp$ geht aufgrund von $U \subseteq \ker(a)$ zum Quotientenraum X/U durch $\widetilde{a}\,[x] := ax$ über. Dabei ist die Linearform $\widetilde{a} : (X/U) \to \mathbb{K}$ beschränkt mit $\|\widetilde{a}\| \leq \|a\|$ denn für jedes $x \in X$ existiert eine Folge $(u_n)_n \subseteq U$ so dass $\|x+u_n\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|[x]\|$ und somit

$$|\widetilde{a}[x]| = |ax| \overset{au_n=0}{=} \lim_{n\to\infty} |a(x+u_n)| \leq \lim_{n\to\infty} \|a\| \cdot \|x+u_n\| = \|a\| \cdot \|[x]\|\,. \tag{0.4}$$

Tatsächlich ist $\|\widetilde{a}\| = \|a\|$ da es eine Folge $(x_n)_n \subseteq X$ gibt mit $\|x_n\| \leq 1$ und $|ax_n| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|a\|$, so dass

$$\lim_{n\to\infty} |a\,[x_n]| = \lim_{n\to\infty} |ax_n| = \|a\| \tag{0.5}$$

wobei $\|[x_n]\| \leq \|x_n\| \leq 1$, sprich $\|\widetilde{a}\| \geq \|a\|$. Daher ist die lineare Abbildung $X' \to (X/U)$, $a \mapsto \widetilde{a}$ eine Isometrie und insbesondere injektiv. Zu zeigen bleibt ihre Surjektivität. Doch diese ist klar, denn für jedes $b \in (X/U)'$ ist $a \in X'$ definiert durch $ax := b[x]$ linear, beschränk (da $\|x\| \leq 1$ impliziert $\|[x]\| \leq 1$), in $U^\perp$ (da $[u] = 0$ für jedes $u \in U$) und erfüllt $\widetilde{a} = b$. Somit sind $(X/U)'$ und $U^\perp$ isometrisch isomorph.

Zeigen nun das gleiche für die beiden Räume U' und $X'/U^\perp$. Da $U^\perp$ in X' abgeschlossen ist, ist $X'/U^\perp$ tatsächlich ein normierter Raum mit Norm $\|[a]\| := \inf_{b\in U^\perp} \|a+b\|$. Zu $a \in U'$ sei $\widetilde{a} \in X'$ eine normerhaltende Fortsetzung (vgl. Hahn-Banach) und $[\widetilde{a}] \in X'/U^\perp$ seine Projektion. Die Zuordnung $U' \to X'/U^\perp$, $a \mapsto [\widetilde{a}]$ ist unabhängig von der speziell gewählten Fortsetzung $\widetilde{a}$, denn für jede andere Fortsetzung $\hat{a} \in X'$ und $u \in U$ gilt $(\widetilde{a} - \hat{a})(u) = au - au = 0$, sprich $\widetilde{a} - \hat{a} \in U^\perp$ bzw. $[\widetilde{a}] = [\hat{a}]$. Sie ist linear, denn für je zwei $a, b \in U'$ mit normerhaltenden Fortsetzungen $\widetilde{a}, \widetilde{b} \in X'$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ ist $\lambda\widetilde{a} + \widetilde{b}$ eine Fortsetzung von $\lambda a + b$, daher $\left[\widetilde{\lambda a + b}\right] = \lambda\,[\widetilde{a}] + [\widetilde{b}]$. Nun existiert eine Folge $(b_n)_n \subseteq U^\perp$ so dass $\|\widetilde{a} + b_n\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|[\widetilde{a}]\|$ und folglich

$$\|[\widetilde{a}]\| = \lim_{n\to\infty} \|\widetilde{a} + b_n\| \geq \lim_{n\to\infty} \underbrace{\|\widetilde{a}\,|_U + b_n\,|_U\|}_{\|a\|} = \|a\|\,. \tag{0.6}$$

Ferner ist

$$\|[\widetilde{a}]\| = \inf_{b\in U^\perp} \|\widetilde{a} + b\| \leq \|\widetilde{a}\| = \|a\|\,, \tag{0.7}$$

so dass $[\widetilde{a}] = \|a\|$, sprich die Zuordnung $a \mapsto [\widetilde{a}]$ ist eine Isometrie. Sie ist surjektiv denn für $[b] \in X'/U^\perp$ (mit $b \in X'$ als beliebigen Repräsentanten von $[b]$) ist die Einschränkung $b\,|_U \in U'$ ein Urbild. Somit sind U' und $X/U^\perp$ isometrisch isomorph.

□

Aufgabe III-14

Wir führen die Existenz eines $0 \neq a \in (L_p(0,1))'$ zu einem Widerspruch. Sei $f \in L_p(0,1)$ so dass $af \neq 0$, o.B.d.A. $af = 1$. Nach Aufgabenhinweis existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung $\{A_{n1}, .., A_{nn}\}$ des Intervalls $(0,1)$ so dass $\|f \cdot 1_{A_n,i}\|_p = \|f\|_p \,/\, \sqrt[p]{n}$ für jedes $i \in \{1,..,n\}$. Da $f = \sum_{i=1}^n f \cdot 1_{A_{n,i}}$ ist $1 = af = \sum_{i=1}^n a(f \cdot 1_{A_{n,i}})$, so dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ mindestens ein $i_n \in \{1,..,n\}$ gibt mit $a(f \cdot 1_{A_{n,i_n}}) \geq 1/n$. Setzen $f_n := f \cdot 1_{A_{n,i_n}} / \left\|f \cdot 1_{A_{n,i_n}}\right\|_p$. Dann gilt $\|f_n\|_p = 1 \;\forall n \in \mathbb{N}$ und

$$a(f_n) \geq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\left\|f \cdot 1_{A_{n,i_n}}\right\|_p} = \frac{1}{\|f\|_p} \cdot \frac{\sqrt[p]{n}}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \tag{0.8}$$

ein Widerspruch zur Beschränktheit von a.

□