Sommersemester 2011 | montags, 10.00-11.30 Uhr, HS 5 A

Höhere Analysis, II

4. Übungsserie

III-11 Seien $[\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}}]$ ein normierter Raum und $U \subset \mathbb{X}$ ein Teilraum mit $\dim U < \infty$. Zeigen Sie, dass dann eine lineare und stetige Projektion $P : \mathbb{X} \to U \subset \mathbb{X}$ von $\mathbb{X}$ auf U existiert, so dass gelten

$$\|P\|_{\mathcal{L}(\mathbb{X})} \leq \dim U, \quad \text{sowie} \quad \mathbb{X} \cong U \oplus \mathbf{N}(P).$$

Hinweis: Fortsetzungssatz von Hahn-Banach

III-12 Sei $\mathbb{X}$ ein normierter Raum, dessen Dualraum $\mathbb{X}'$ separabel ist. Beweisen Sie, dass dann auch $\mathbb{X}$ separabel sein muss.

Hinweis: Separabilität der Einheitskugeln & Folgerung 3.47

III-13 Seien $\mathbb{X}$ ein normierter Raum, $U \subset \mathbb{X}$ und $V \subset \mathbb{X}'$ Teilmengen, sowie

$$U^{\perp} = \{\varphi \in \mathbb{X}' : \forall\, x \in U : \ \langle x, \varphi \rangle = 0\}, \qquad V_{\perp} = \{x \in \mathbb{X} : \forall\, \varphi \in V : \ \langle x, \varphi \rangle = 0\}$$

deren Annihilatoren. Zeigen Sie:

(i) $U^{\perp} \subset \mathbb{X}'$ und $V_{\perp} \subset \mathbb{X}$ sind abgeschlossene Teilräume

(ii) Ist $U \subset \mathbb{X}$ ein abgeschlossener Teilraum, so sind folgende Räume isometrisch-isomorph:

$$(\mathbb{X}/U)' \cong U^{\perp} \qquad \text{sowie} \quad U' \cong \mathbb{X}'/U^{\perp}.$$

III-14 Beweisen Sie, dass $(L_p(0,1))' = \{0\}$ für alle $0 < p < 1$ gilt. Es gibt für Quasi-Banachräume also keine Version des Satzes von Hahn-Banach!

Hinweis: Für jedes $f \neq 0$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$, so dass gilt

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} |f(x)|^p \, \mathrm{d}x = \frac{\|f|L_p(0,1)\|^p}{n}, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$