Höhere Analysis 2
FSU Jena - SS 2011
Serie 03 - Lösungen

Stilianos Louca

April 20, 2011

Aufgabe III-07

Nehmen auf $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ die Norm $\|(x,y)\| := \|x\| + \|y\|$, $x \in \mathbb{X}, y \in \mathbb{Y}$ an. Dann lässt sich schreiben

$$\|T\| = \sup_{\|(x,y)\| \leq 1} \|T(x,y)\| \leq \sup_{\substack{\|x\| \leq \\ \|y\| \leq 1}} \|T(x,y)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \underbrace{\sup_{\|y\| \leq 1} \|T(x,y)\|}_{\|T(x,\cdot)\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x,\cdot)\|. \tag{0.1}$$

Für jedes $y \in \mathbb{Y}$ ist die linearform $T(\cdot, y)$ stetig so dass gilt

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x,y)\| < \infty. \tag{0.2}$$

Nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit von Banach-Steinhaus, angewandt auf die Familie $(T(x,\cdot))_{\|x\| \leq 1}$ stetiger Linearformen, folgt

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x,\cdot)\| < \infty, \tag{0.3}$$

was zusammen mit (0.1) impliziert $\|T\| < \infty$.

Aufgabe III-08

Betrachten die Identitätsabbildung $\mathrm{Id} : X \to X$ als lineare Abbildung $\mathrm{Id} : (X, \|\cdot\|_2) \to (X, \|\cdot\|_1)$ zwischen zwei verschiedenen Banachräumen. Nach Voraussetzung an die beiden Normen $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ ist Id stetig mit $\|\mathrm{Id}\| \leq c$. Nach dem Satz vom inversen Operator ist dies auch die Inverse $\mathrm{Id}^{-1} : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$. Aus

$$\|x\|_2 = \left\|\mathrm{Id}^{-1} x\right\|_2 \leq \underbrace{\left\|\mathrm{Id}^{-1}\right\|}_{<\infty} \cdot \|x\|_1 \tag{0.4}$$

folgt schließlich die Behauptung.

Aufgabe III-09

Der Operator $A : c_{00}(\mathbb{N}) \to c_{00}(\mathbb{N})$ ist linear da für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $(x_1, .., x_m, 0, ..), (y_1, .., y_n, 0..) \in c_{00}(\mathbb{N})$ (o.B.d.A $m \leq n$) gilt

$$\begin{aligned} A\left[\lambda(x_1, .., x_m, 0, ..) + (y_1, .., y_n, 0..)\right] &= A(\lambda x_1 + y_1, .., \lambda x_m + y_m, y_{m+1}, .., y_n, 0, ..) \\ &= \left(\lambda \frac{x_1}{1} + \frac{y_1}{1}, .., \lambda \frac{x_m}{m} + \frac{y_m}{m}, \frac{y_{m+1}}{m+1}, .., \frac{y_n}{n}, 0..\right) \\ &= \lambda A(x_1, .., x_m, 0, ..) + A(y_1, .., y_n, 0, ..). \end{aligned} \tag{0.5}$$

Offensichtlich ist $\|A\| \leq 1$. Weiter gilt $\|A(1,0,..)\|_\infty = \|(1,0,..)\|_\infty = 1$ so dass $\|A\| = 1$. A ist surjektiv da für beliebiges $(x_1, x_2, .., x_m, 0, ..) \in c_{00}(\mathbb{N})$ gilt

$$A\left(x_1, 2x_2, .., mx_m, 0, ..\right) = (x_1, x_2, .., x_m, 0..). \tag{0.6}$$

Es ist auch klar dass A injektiv ist da $\ker(A) = \{0\}$. Somit existiert A^{-1}, mit

$$A^{-1}(x_1, .., x_m, 0, ..) = (x_1, 2x_2, .., mx_m, 0, ..). \tag{0.7}$$

Für $e_m := (0, .., 0, 1, 0, ..) \in c_{00}(\mathbb{N})$ mit dem Eintrag 1 an der m-ten Stelle, gilt $\left\|A^{-1}e_m\right\| = m$ obwohl $\|e_m\|_\infty = 1$, so dass $\left\|A^{-1}\right\| = \infty$. Dies spricht nicht gegen der Satz über die inverse Abbildung, da $c_{00}(\mathbb{N})$ kein Banachraum ist.

Aufgabe III-10

a) Wir zeigen dass $A : D(A) \to l_2(\mathbb{N})$ ein abgeschlossener Operator ist. Zu zeigen wäre, dass für beliebige $(x^n)_n \subseteq D(A),\ x \in l_2(\mathbb{N}), y \in l_2(\mathbb{N})$ mit $x^n \overset{n\to\infty}{\underset{l_2}{\longrightarrow}} x$ und $Ax^n \overset{n\to\infty}{\underset{l_2}{\longrightarrow}} y$ gilt $x \in D(A)$ und $Ax = y$. Seien $x^n = (x^n_k)_k \in D(A)$, $x = (x_k)_k \in l_2(\mathbb{N})$ und $y =: (k\widetilde{x}_k)_k \in l_2(\mathbb{N})$ wie gerade erwähnt. Dann folgt aus

$$\|Ax^n - y\|_{l_2} = \sum_k k^2 \left|x^n_k - \widetilde{x}_k\right|^2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{0.8}$$

dass insbesondere $(x^n_k)_k \overset{n\to\infty}{\underset{l_2}{\longrightarrow}} (\widetilde{x}_k)_k$ und daher $(x_k)_k = (\widetilde{x}_k)_k$ aufgrund der Eindeutigkeit des Grenzwertes. Wegen $(k\widetilde{x}_k)_k \in l_2(\mathbb{N})$ ist also $(x_k)_k \in D(A)$ und es gilt

$$Ax = (kx_k)_k = (k\widetilde{x}_k)_k = y. \tag{0.9}$$

b) Wir zeigen dass $A : D(A) \to l_2(\mathbb{N})$ **kein** abgeschlossener Operator ist. Betrachten dazu die Elemente $(x^n_k)_k := (\frac{1}{1^2}, .., \frac{1}{n^2}, 0..) \in D(A)$. Sie konvergieren in $l_2(\mathbb{N})$ gegen $(x_k)_k := \left(\frac{1}{k^2}\right)_k$. Ferner konvergieren deren Bilder $A(x^n_k)_k = \left(\frac{1}{1}, .., \frac{1}{n}, 0, ..\right)$ in $l_2(\mathbb{N})$ gegen $(y_k)_k := \left(\frac{1}{k}\right)_k$. Doch nicht desto trotz, ist $(x_k)_k \notin D(A)$, daher der Graph von A nicht abgeschlossen.