Höhere Analysis, II

3. Übungsserie

III-7 Seien $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ Banachräume und $T : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to \mathbb{K}$ bilinear und *partiell stetig*, d.h. $T(\cdot, y) \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{K})$ für alle $y \in \mathbb{Y}$, sowie $T(x, \cdot) \in \mathcal{L}(\mathbb{Y}, \mathbb{K})$ für alle $x \in \mathbb{X}$. Beweisen Sie, dass die bilineare Abbildung T stetig ist.

Hinweis: Satz von Banach-Steinhaus

III-8 Seien X ein linearer Vektorraum und $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ zwei Normen auf $\mathbb{X}$, so dass sowohl $[\mathbb{X}, \|\cdot\|_1]$ als auch $[\mathbb{X}, \|\cdot\|_2]$ Banachräume sind. Es gelte:

$$\exists\, c > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{X} : \ \|x\|_1 \leq c\, \|x\|_2.$$

Zeigen Sie, dass dann $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ sogar äquivalent sind.

Hinweis: Satz vom inversen Operator

III-9 Seien $\mathbb{X} = \mathbb{Y} = c_{00}(\mathbb{N})$, und $A : c_{00}(\mathbb{N}) \to c_{00}(\mathbb{N})$ mit

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, \ldots) = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \ldots, \frac{x_m}{m}, 0, \ldots\right), \quad \text{d.h. falls } x_k = 0,\ k \geq m+1.$$

Verifizieren Sie:

- $\|A\|_{\mathcal{L}(c_{00}(\mathbb{N}))} = 1$,
- $A^{-1} : c_{00}(\mathbb{N}) \to c_{00}(\mathbb{N})$ existiert,

$$A^{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, \ldots) = (x_1, 2x_2, \ldots, m x_m, 0, \ldots), \quad \text{für} \quad x_k = 0,\ k \geq m+1,$$

- A^{-1} ist nicht beschränkt.

Frage: Ist dies ein Gegenbeispiel zum Satz über die inverse Abbildung?

III-10 Seien $\mathbb{X} = \mathbb{Y} = \ell_2(\mathbb{N})$ sowie

$$A : \mathbf{D}(A) \to \ell_2(\mathbb{N}), \quad A : x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \mapsto Ax = (k x_k)_{k\in\mathbb{N}}, \quad x \in \mathbf{D}(A) \subset \ell_2(\mathbb{N}).$$

Untersuchen Sie, ob A in den Fällen

(a) $\mathbf{D}(A) = \left\{x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N}) :\ (k x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N})\right\}$,

(b) $\mathbf{D}(A) = c_{00}(\mathbb{N})$

ein abgeschlossener Operator ist.