Höhere Analysis 2
FSU Jena - SS 2011
Serie 02 - Lösungen

Stilianos Louca

May 2, 2011

Aufgabe III-3

(a) Es sei bemerkt dass für beliebige Untermenge $\Omega \subseteq X$ eines topologischen Raumes X gilt:

- $\overline{\Omega} = X$ genau dann wenn Ω dicht in X ist.
- $\Omega^o = \emptyset$ genau dann wenn Ω^c dicht in X ist.

Zu zeigen wäre nun dass $\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n} = \mathbb{X}$, sprich $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n^c$ leeres Inneres besitzt. Doch O_n^c sind abgeschlossen, so dass wir nach Baire fertig sind da sonst irgendein O_n^c nicht-leeres inneres besäße und damit O_n nicht dicht in X wäre.

(b) Es bezeichne

$$\mathcal{C}_o^0 := \{f \in \mathcal{C}[0,1] : \exists\, x_o \in [0,1] : f \text{ in } x_0 \text{ differenzierbar}\} \tag{0.1}$$

den Raum aller stetigen, reellen, an mindestens einem Punkt differenzierbaren Funktionen auf $[0,1]$. Wir werden zeigen dass $\mathcal{C}_o^0$ von 1. Kategorie (mager) in $(\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ und daher insbesondere nach Baire echt kleiner als $\mathcal{C}[0,1]$ ist. Für $n,k \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$T_{k,n} := \left\{ f \in \mathcal{C}[0,1] : \exists\, x_o \in [0,1] : \forall\, x \in \left[x_o - \tfrac{1}{n}, x_o + \tfrac{1}{n}\right] : \left| \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \right| \le k \right\} \tag{0.2}$$

und bemerken dass $\mathcal{C}_o^0 \subseteq \bigcup_n \bigcup_k T_{k,n} =: T$. Es genügt also zu zeigen dass T in $\mathcal{C}[0,1]$ mager ist. Hierfür genügt es wiederum zu zeigen dass jedes $T_{k,n}$ abgeschlossen und mit leerem Inneren ist. Seien nun $k,n \in \mathbb{N}$ fest.

Behauptung: $T_{k,n}$ hat leeres Inneres.
Beweis: Wir zeigen dass für jedes $f \in T_{k,n}$ und $\varepsilon > 0$ ein $g \in T_{k,n}^c \cap B_{2\varepsilon}^o(f)$ existiert. Bekanntlich sind die Polynome $\mathbb{R}[X]$ dicht in $\mathcal{C}[0,1]$, so dass es ein $p \in \mathbb{R}[X]$ gibt mit $p \in B_\varepsilon^o(f)$. Sei $s \in \mathcal{C}[0,1]$ eine Sägezahnfunktion mit Anstieg $\ge k + \|p'\|_\infty + \varepsilon$ und $\|s\| < \varepsilon$. Dann ist natürlich $g := (p+s) \in B_{2\varepsilon}^p(f)$. Außerdem gilt

$$\left|\frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o}\right| \ge \left|\frac{s(x)-s(x_o)}{x-x_o}\right| - \underbrace{\left|\frac{p(x)-p(x_o)}{x-x_o}\right|}_{\le \|p'\|_\infty} \ge k + \|p'\|_\infty + \varepsilon - \|p'\|_\infty = k + \varepsilon \tag{0.3}$$

für jedes $x_o \in [0,1]$, dazu x genügend nah an x_o gewählt, sprich $g \notin T_{k,n}$.

$\square$

Behauptung: $T_{k,n}$ ist abgeschlossen.
Beweis: Seien $(f_m)_m \subseteq T_{k,n}$ mit $f_m \underset{\|\cdot\|_\infty}{\overset{m\to\infty}{\longrightarrow}} f \in \mathcal{C}[0,1]$ und für jedes $m \in \mathbb{N}$ der Punkt $x_o^m \in [0,1]$ wie in (0.2), das heißt

$$\left|\frac{f_m(x)-f_m(x_o^m)}{x-x_o^m}\right| \le k \quad \forall x \in \left[x_o^m - \tfrac{1}{n}, x_o^m + \tfrac{1}{n}\right]. \tag{0.4}$$

Da $[0,1]$ folgenkompakt ist, können wir o.B.d.A. annehmen dass die x_o^m gegen ein $x_o \in [0,1]$ konvergieren. Wir zeigen dass $f \in T_{k,n}$. Sei $x \in \left[x_o - \frac{1}{n}, x_o + \frac{1}{n}\right]$, o.B.d.A. $x \neq x_o$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\right| &\leq \left|\frac{f(x_o^m)-f(x+(x_o^m-x_o))}{x_o^m-(x+(x_o^m-x_o))}\right| + \underbrace{\left|\frac{f(x_o^m)-f(x_o)}{x_o^m-(x+(x_o^m-x_o))}\right|}_{A_m} + \underbrace{\left|\frac{f(x+(x_o^m-x_o))-f(x)}{x_o^m-(x+(x_o^m-x_o))}\right|}_{B_m} \\
&\leq \underbrace{A_m + B_m}_{\stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} 0} + \underbrace{\left|\frac{f_m(x_o^m)-f(x_o)}{x_o^m-(x+(x_o^m-x_o))}\right|}_{\stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} 0} + \underbrace{\left|\frac{f_m(x_o^m)-f_m(x_o^m+(x-x_o))}{x_o^m-(x+(x_o^m-x_o))}\right|}_{\leq k} \\
&\quad + \underbrace{\left|\frac{f(x_o)-f(x_o^m)}{x_o^m-(x+(x_o^m-x_o))}\right|}_{\stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} 0} + \underbrace{\left|\frac{f(x+(x_o^m-x_o))-f_m(x+(x_o^m-x_o))}{x_o^m-(x+(x_o^m-x_o))}\right|}_{\stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} 0}
\end{aligned} \tag{0.5}$$

für jedes $m \in \mathbb{N}$, sprich

$$\left|\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\right| \leq k \tag{0.6}$$

und daher $f \in T_{k,n}$.

$\square$

Aufgabe III-4

Betrachten

$$c_{00}(\mathbb{N}) := \left\{(x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : |\mathrm{supp}(x_n)_n| < \infty\right\} \tag{0.7}$$

ausgestattet mit der $\|\cdot\|_\infty$ norm.

(a) Linearität ist klar. Da

$$|T_n x| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_n| \leq n \cdot \|x\|_\infty \tag{0.8}$$

ist $\|T_n\| \leq n$ und insbesondere $T_n \in \mathcal{L}(c_{00}(\mathbb{N}), \mathbb{R})$.

(b) Offensichtlich ist für jedes $x \in c_{00}(\mathbb{N})$

$$|T_n x| \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}}_{\substack{\text{endliche}\\ \text{summe}}} |x_k| =: M_x \tag{0.9}$$

(c) Für gegebenes $n \in \mathbb{N}$ sei $x := (1,..,1,0,0,..)$ mit $|\mathrm{supp}\, x| = n$. Dann ist $\|x\|_\infty = 1$ und $|T_n x| = n$, sprich $\|T_n\| = n$. Daher ist $\sup_n \|T_n\|_\infty = \infty$.

Da $(c_{00}(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$ nicht vollständig ist[1], ist dies **kein** Widerspruch zum Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit!

[1]Betrachte z.B. die Folge $(x^{(n)})_n \subseteq c_{00}(\mathbb{N})$ definiert durch $x^{(n)} = (\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, .., \frac{1}{n}, 0, 0, ..)$ die gegen $x := (\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..) \in l_\infty(\mathbb{N}) \setminus c_{00}(\mathbb{N})$ konvergiert und daher eine Cauchyfolge ohne Grenzwert ist.

Aufgabe III-5

Es ist klar dass $(\mathbb{X} \times \mathbb{Y}, +, \cdot)$ ein Vektorraum und $\|\cdot\|_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}}$ eine Norm ist. Ist nun $(x_n, y_n)_n \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ eine Cauchyfolge, so sind es offensichtlich auch deren Komponenten $(x_n)_n$ und $(y_n)_n$. Da diese jeweils in $\mathbb{X}$ und $\mathbb{Y}$ konvergieren, konvergiert $(x_n, y_n)_n$ in $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$.

Aufgabe III-6

Offensichtlich ist $\|T_n\| \leq 1$. Wähle nun irgendein $x := (x_k)_k \in l_2(\mathbb{N})$ mit norm 1 und setze $\overline{x} := (\overbrace{0, .., 0}^{\times n}, x_1, x_2, ..)$. Dann ist $\|\overline{x}\|_2 = 1$ und

$$\|T_n \overline{x}\|_2 = \|x\|_2 = 1, \tag{0.10}$$

sprich $\|T_n\| = 1$ und $\lim_{n\to\infty} \|T_n\| = 1$. Anderseits ist

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n x\|_2 = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_{k+n}|^2} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2} = 0 \tag{0.11}$$

für jedes $x \in l_2(\mathbb{N})$ da $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$.