Höhere Analysis, II

2. Übungsserie

III-3 **(a)** Seien $(\mathbb{X}, d)$ ein vollständiger metrischer Raum und $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge offener und dichter Teilmengen in $\mathbb{X}$. Zeigen Sie, dass dann $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ dicht ist in $\mathbb{X}$.

<u>Hinweis</u>: Beweis von Satz 3.15 (Baire)

(b) Zeigen Sie, dass es Funktionen $f \in \mathrm{C}[0,1]$ gibt, die an keiner Stelle differenzierbar sind.

<u>Hinweis</u>: Teilaufgabe (a)

III-4 Seien $\mathbb{X} = c_{00}(\mathbb{N})$, $Y = \mathbb{R}$ und

$$T_n : c_{00}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}, \qquad T_n : x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \longmapsto T_n x = \sum_{k=1}^{n} x_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) $T_n \in \mathcal{L}(c_{00}(\mathbb{N}), \mathbb{R})$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

(b) $|T_n x| \leq M_x$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $x \in c_{00}(\mathbb{N})$,

(c) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| = \infty$.

Frage: Steht dies im Widerspruch zum Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit?

III-5 Zeigen Sie, dass $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ mit komponentenweiser Addition und skalarer Multiplikation ein linearer Vektorraum ist, auf dem $\|(x,y)\|_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}} = \|x\|_{\mathbb{X}} + \|y\|_{\mathbb{Y}}$, $x \in \mathbb{X}$, $y \in \mathbb{Y}$, eine Norm darstellt. Zudem ist $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ ein Banachraum, falls $\mathbb{X}$ und $\mathbb{Y}$ Banachräume sind.

III-6 Seien $S \in \mathcal{L}(\ell_2(\mathbb{N}))$ der Rechts-Shiftoperator,

$$S : \ell_2(\mathbb{N}) \to \ell_2(\mathbb{N}), \qquad S : x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \longmapsto Sx = (x_{k+1})_{k\in\mathbb{N}},$$

und $T_n = S^n$, $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie $\|T_n\|$, $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \|T_n\|$, sowie $\lim\limits_{n\to\infty} \|T_n x\|$, $x \in \ell_2(\mathbb{N})$.