Höhere Analysis 2
FSU Jena - SS 2011
Serie 01 - Lösungen

Stilianos Louca

April 11, 2011

Aufgabe III-1

(i) Folgt aus der zweiten Aussage (ii) für den Spezialfall $\mathbb{Y} = \emptyset$.

(ii) Sei $\mathfrak{A} \subseteq 2^{\mathbb{X}}$ das System aller linear unabhängigen Untermengen von $\mathbb{X}$ die $\mathbb{Y}$ enthalten, versehen mit der Ordnungsrelation induziert durch die Mengeninklusion. Sei $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ ein beliebiges total geordnetes Untersystem. Setze $A := \bigcup_{B\in\mathfrak{B}} B$, dann ist A auch linear unabhängig, da für $x_1, .., x_n \in A$ stets ein $B \in \mathfrak{B}$ existiert so dass $x_1, .., x_n \in B$. Offensichtlich ist $A \in \mathfrak{A}$ eine obere Schranke für $\mathfrak{B}$, so dass $\mathfrak{A}$ induktiv nach oben geordnet ist und daher nach Zorn ein maximales Element $M \in \mathfrak{A}$ besitzt, wobei per Konstruktion $\mathbb{Y} \subseteq M$. Daraus folgt dass $\mathbb{X} = \operatorname{span} M$, da es sonst ein $x \in \mathbb{X} \setminus \operatorname{span} M$ gäbe und daher das Element $M \cup \{x\} \in \mathfrak{A}$ echt-größer wäre als M.

Aufgabe III-2

(i) Da $\mathcal{L}_\Phi(\mathbb{R})$ Untermenge des linearen Raumes der messbaren Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist, genügt es zu zeigen dass $\mathcal{L}_\varphi(\mathbb{R})$ abgeschlossen bzgl. linearkombinationen ist und das neutrale Element enthält. Offensichtlich ist $0 \in \mathcal{L}_\Phi(\mathbb{R})$. Es seien $f_1, f_2 \in \mathcal{L}_\Phi(\mathbb{R}),\ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ beliebig und $c_1, c_2 > 0$ so dass $\int_\mathbb{R} \Phi\left(\frac{|f_i(x)|}{c_i}\right)\ dx < \infty$ für $i \in \{1, 2\}$. Dann gilt

$$\int\limits_\mathbb{R} \Phi\left(\frac{|\lambda f_1(x)|}{|\lambda|\, c_1}\right)\ dx = \int\limits_\mathbb{R} \Phi\left(\frac{|f_1(x)|}{c_1}\right)\ dx < \infty \quad , \tag{0.1}$$

sprich $\lambda f_1 \in \mathcal{L}_\Phi(\mathbb{R})$. Anderseits ist Φ nach Hilfsaussage 02 monoton wachsend. Daher lässt sich abschätzen

$$\begin{aligned}\Phi\left(\frac{|f_1(x) + f_2(x)|}{c_1 + c_2}\right) &\overset{\text{monot.}}{\leq} \Phi\left(\frac{|f_1(x)|}{c_1 + c_2} + \frac{|f_2(x)|}{c_1 + c_2}\right) = \Phi\Bigg(\frac{f_1}{c_1} \cdot \underbrace{\frac{c_1}{c_1 + c_2}}_{=:t\in[0,1]} + \frac{f_2}{c_2} \cdot \underbrace{\frac{c_2}{c_1 + c_2}}_{=1-t}\Bigg) \\ &\overset{\text{konvex}}{\leq} t \cdot \Phi\left(\frac{|f_1(x)|}{c_1}\right) + (1-t) \cdot \Phi\left(\frac{|f_2(x)|}{c_2}\right),\end{aligned} \tag{0.2}$$

bzw.

$$\int\limits_\mathbb{R} \Phi\left(\frac{|f_1(x) + f_2(x)|}{c_1 + c_2}\right)\ dx \leq \frac{c_1}{c_1 + c_2} \cdot \int\limits_\mathbb{R} \Phi\left(\frac{|f_1(x)|}{c_1}\right)\ dx + \frac{c_2}{c_1 + c_2} \cdot \int\limits_\mathbb{R} \Phi\left(\frac{|f_2(x)|}{c_2}\right)\ dx < \infty, \tag{0.3}$$

sprich $f_1 + f_2 \in \mathcal{L}_\Phi(\mathbb{R})$. Somit ist gezeigt dass $\mathcal{L}_\Phi(\mathbb{R})$ ein linearer Raum ist.

(ii) **Halbnorm:** Bezeichnen $\|\cdot|L_\Phi(\mathbb{R})\| =: \|\cdot\|_\Phi$ und zeigen zunächst dass $\|\cdot\|_\Phi$ eine Halbnorm auf $\mathcal{L}_\Phi(\mathbb{R})$ ist. Für Funktion $f \in \mathcal{L}_\Phi(\mathbb{R})$ bezeichnen

$$C(f) := \left\{c > 0 : \int\limits_\mathbb{R} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{c}\right)\ dx < 1\right\}, \tag{0.4}$$

so dass $\|f\|_\Phi = \inf C(f)$. Ist nun $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ beliebig, so ist leicht zu erkennen dass $C(\lambda f) \supseteq |\lambda| \cdot C(f)$. Aus Symmetriegründen ist genauso gut $C(f) = C\left(\frac{1}{\lambda}\lambda f\right) \supseteq \frac{1}{|\lambda|} \cdot C(\lambda f)$, sprich $C(\lambda f) \subseteq |\lambda| \cdot C(f)$ und somit $C(\lambda f) = |\lambda| \cdot C(f)$, daher $\|\lambda f\|_\Phi = |\lambda| \cdot \|f\|_\Phi$. Der Fall $\lambda = 0$ ist klar da $\|0\|_\Phi = 0$.

Sei nun $\widetilde{f} \in \mathcal{L}_\Phi(\mathbb{R})$. Um zu zeigen dass $\|f + \widetilde{f}\|_\Phi \leq \|f\|_\Phi + \|\widetilde{f}\|_\Phi$, genügt es zu zeigen dass für beliebige $c \in C(f)$, $\widetilde{c} \in C(\widetilde{f})$ ein $b \in C(f + \widetilde{f})$ existiert mit $b \leq c + \widetilde{c}$. Doch dies ist schon gegeben, da man einfach $b := c + \widetilde{c}$ setzen kann wobei nach (0.3) gilt

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi\left(\frac{\left|f(x) + \widetilde{f}(x)\right|}{c + \widetilde{c}}\right) dx \leq \frac{c}{c + \widetilde{c}} \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{c}\right) dx}_{\leq 1} + \frac{\widetilde{c}}{c + \widetilde{c}} \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \Phi\left(\frac{|\widetilde{f}(x)|}{\widetilde{c}}\right) dx}_{\leq 1}$$

$$\leq \frac{c}{c + \widetilde{c}} + \frac{\widetilde{c}}{c + \widetilde{c}} = 1 \quad . \tag{0.5}$$

Somit ist $\|\cdot\|_\Phi$ eine Halbnorm auf $\mathcal{L}_\Phi(\mathbb{R})$. Sind nun $f, \widetilde{f} \in \mathcal{L}_\Phi(\mathbb{R})$ fast überall identisch, so sind es auch $\Phi\left(\frac{|f(\cdot)|}{c}\right)$ und $\Phi\left(\frac{|\widetilde{f}(\cdot)|}{c}\right)$ für jedes $c > 0$, das heißt $C(f) = C(\widetilde{f})$ und somit $\|f\|_\Phi = \|\widetilde{f}\|_\Phi$. Anders gesagt, $\|\cdot\|_\Phi$ geht über zum Quotientenraum $L_\Phi(\mathbb{R})$, wo sie natürlich noch stets eine Halbnorm ist.

Positiv-Definitheit: Sei nun schließlich $\|f\|_\Phi = 0$ für irgendein $f \in \mathcal{L}_\Phi(\mathbb{R})$. Wir wollen zeigen dass f fast überall verschwindet. Dazu genügt es zu zeigen dass für jedes $\varepsilon > 0$ fast überall $|f| \leq \varepsilon$ gilt. Nehme zwecks eines Widerspruchbeweises an dass $A_\varepsilon := \{|f| > \varepsilon\}$ für irgendein $\varepsilon > 0$ nicht-verschwindendes Maß hat. Bemerke dass nach Voraussetzungen Φ monoton wächst und $\Phi(y) \stackrel{y\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ (siehe Hilfsaussage 01), das heißt

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{c \cdot \varepsilon}\right) dx \geq \int_{A_\varepsilon} \underbrace{\Phi\left(\frac{|f(x)|}{c \cdot \varepsilon}\right)}_{\geq \Phi\left(\frac{\varepsilon}{c \cdot \varepsilon}\right)} dx \stackrel{\text{monot.}}{\geq} \underbrace{\mathrm{Vol}(A_\varepsilon)}_{>0} \cdot \Phi\left(\tfrac{1}{c}\right) \stackrel{c\to 0^+}{\longrightarrow} \infty \quad , \tag{0.6}$$

ein Widerspruch zu $\inf C(f) = 0$.

(iii) Es ist klar dass $H_\Phi(\mathbb{R}) \subseteq L_\Phi(\mathbb{R})$. Da $\Phi(0) = 0$, gilt $0 \in H_\Phi(\mathbb{R})$. Sind nun $f_1, f_2 \in H_\Phi(\mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so gilt für jedes $c > 0$

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi\left(\frac{|\lambda \cdot f_1(x)|}{c}\right) dx = \int_{\mathbb{R}} \Phi\left(\frac{|f_1(x)|}{c/|\lambda|}\right) dx < \infty \quad , \tag{0.7}$$

sprich $\lambda f_1 \in H_\Phi(\mathbb{R})$. Nach (0.3) gilt außerdem für beliebiges $c > 0$

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi\left(\frac{|f_1(x) + f_2(x)|}{c}\right) dx = \int_{\mathbb{R}} \Phi\left(\frac{|f_1(x) + f_2(x)|}{c/2 + c/2}\right) dx$$

$$\leq \frac{1}{2} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \Phi\left(\frac{|f_1(x)|}{c/2}\right) dx}_{<\infty} + \frac{1}{2} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \Phi\left(\frac{|f_2(x)|}{c/2}\right) dx}_{<\infty} < \infty, \tag{0.8}$$

sprich $f_1 + f_2 \in H_\Phi(\mathbb{R})$. Somit ist $H_\Phi(\mathbb{R})$ linear abgeschlossen. Zu zeigen bleibt die topologische Abgeschlossenheit. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H_\Phi(\mathbb{R})$ eine Folge und $f \in L_\varphi(\mathbb{R})$ so dass $f_n \underset{\|\cdot\|_\Phi}{\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow}} f$, das heißt

$$\inf\left\{c > 0 : \int_{\mathbb{R}} \Phi\left(\frac{|f(x) - f_n(x)|}{c}\right) dx \leq 1\right\} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{0.9}$$

Dann gibt es eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (0, \infty)$ mit $c_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ und $\int_{\mathbb{R}} \Phi\left(\frac{|f(x) - f_n(x)|}{c_n}\right) dx \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Sei nun $c > 0$ beliebig und wähle $n \in \mathbb{N}$ so dass $2c_n \leq c$. Dann lässt sich nach (0.3) abschätzen

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{c}\right)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \Phi\left(\frac{|f(x)-f_n(x)+f_n(x)|}{c-c_n+c_n}\right)\,dx$$

$$\leq \frac{c-c_n}{c}\cdot\int_{\mathbb{R}} \Phi\left(\frac{|f(x)-f_n(x)|}{c-c_n}\right)\,dx + \frac{c_n}{c}\cdot\int_{\mathbb{R}} \Phi\left(\frac{|f_n(x)|}{c_n}\right)\,dx$$

$$\leq \frac{c-c_n}{c}\cdot\underbrace{\int_{\mathbb{R}} \Phi\left(\frac{|f(x)-f_n(x)|}{c_n}\right)\,dx}_{<\infty} + \frac{c_n}{c}\cdot\underbrace{\int_{\mathbb{R}} \Phi\left(\frac{|f_n(x)|}{c_n}\right)\,dx}_{<\infty} < \infty\quad, \tag{0.10}$$

so dass auch $f \in H_\Phi(\mathbb{R})$.

(iv) Im Fall $\Phi(x) = x^p$ ist $L_\Phi(\mathbb{R}) = H_\Phi(\mathbb{R})$ da für alle $f \in L_\Phi(\mathbb{R})$ und $c, \widetilde{c} > 0$ gilt $\int_{\mathbb{R}} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{c}\right)\,dx < \infty$ genau dann wenn $\int_{\mathbb{R}} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\widetilde{c}}\right)\,dx < \infty$. Insbesondere ist jegliche messbare $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genau dann in $L_\Phi(\mathbb{R})$ wenn $\int_{\mathbb{R}} \Phi(|f(x)|)\,dx < \infty$, sprich $f \in L_p(\mathbb{R})$.

Betrachten nun den Fall $\Psi(x) = e^{x^2} - 1$. Beachte dass für jegliches $\widetilde{\Psi} \geq \Psi$ gilt $L_{\widetilde{\Psi}}(\mathbb{R}) \subseteq L_\Psi$. Da $e^{x^2} - 1 \geq \frac{x^{2k}}{k!}$ für jegliches $k \in \mathbb{N}$, folgt $L_\Psi(\mathbb{R}) \subseteq L_{2k}(\mathbb{R})$ für jegliches $k \in \mathbb{N}$. Da $L_p(\mathbb{R}) \cap L_q(\mathbb{R}) \subseteq L_s(\mathbb{R})$ für jegliche $1 \leq p \leq s \leq q < \infty$, folgt somit

$$\boxed{L_\Psi(\mathbb{R}) \subseteq \bigcap_{2\leq p<\infty} L_p(\mathbb{R}).} \tag{0.11}$$

Behauptung: Es gilt $H_\Psi(\mathbb{R}) \subsetneq L_\Psi(\mathbb{R})$.
Beweis: Betrachte die Abbildung

$$f(x) := \begin{cases} \sqrt{\ln(1/|x|)} & : |x| \leq 1 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}\quad. \tag{0.12}$$

Sie erfüllt

$$\int_{\mathbb{R}} \Psi\left(|f(x)|\cdot\alpha\right)\,dx = \int_{[-1,1]} \left[\frac{1}{|x|^{\alpha^2}} - 1\right]\,dx < \infty \tag{0.13}$$

genau dann wenn $|\alpha| < 1$.

□

Behauptung: Es gilt $L_2(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R}) \subseteq H_\Psi(\mathbb{R})$.
Beweis: Ist $f \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})$, so muss auf jeden Fall für jedes $\varepsilon > 0$ gelten $\mathrm{Vol}(\{|f| > \varepsilon\}) < \infty$. Da $\Psi(y) \in \mathcal{O}(y^2)$ für $y \to 0^+$, existieren Konstanten $a, C > 0$ so dass $\Psi(y)\cdot 1_{[0,a]}(y) \leq C\cdot y^2$. Folglich gilt für jedes $c > 0$

$$\int_{\mathbb{R}} \Psi(|f(x)|/c)\,dx \leq \underbrace{\int_{\{|f|/c>a\}} \left[e^{|f(x)|^2/c^2} - 1\right]\,dx}_{\substack{<\infty \\ \text{da } f\in L_\infty(\mathbb{R}) \text{ und } \mathrm{Vol}\{|f|/c>a\}<\infty}} + \int_{\{|f|/c\leq a\}} \Psi(|f(x)|/c)\,dx$$

$$\leq \text{const} + \frac{C}{c^2}\cdot\underbrace{\int_{\{|f|/c<a\}} |f(x)|^2\,dx}_{\substack{<\infty \\ \text{da } f\in L_2(\mathbb{R})}} < \infty\quad, \tag{0.14}$$

sprich $L_2(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R}) \subseteq H_\Psi(\mathbb{R})$.

$\square$

Behauptung: Es gilt $L_\infty(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R}) \neq H_\Psi(\mathbb{R})$.
Beweis: Betrachte die Abbildung

$$f(x) := \begin{cases} \sqrt{n-1} & x \in [1/n!,\ 1/(n-1)!]\,,\ n \in \mathbb{N} \\ \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}. \tag{0.15}$$

Sie erfüllt

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \Psi\left(\frac{|f(x)|}{c}\right)\, dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}\left(e^{c^{-2}}\right)^{n-1} < \infty \tag{0.16}$$

für jedes $c > 0$ und daher $f \in H_\Psi(\mathbb{R})$. Anderseits ist aber $f \notin L_\infty(\mathbb{R})$, woraus die Behauptung folgt.

$\square$

Hilfsaussage 01

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $\Phi : I \to \mathbb{R}$ konvex und $x_1, x_2, x_3 \in I$ so dass $x_1 < x_2 \leq x_3$. Dann gilt

$$\Phi(x_1) + \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} \cdot [\Phi(x_2) - \Phi(x_1)] \leq \Phi(x_3). \tag{0.17}$$

Beweis: Sei $L_2 : I \to \mathbb{R}$ die lineare Abbildung definiert durch $L_2(x_1) = \Phi(x_1)$ und $L_2(x_2) = \Phi(x_2)$. Ähnlich, sei $L_3 : I \to \mathbb{R}$ die lineare Abbildung definiert durch $L_3(x_1) = \Phi(x_1)$ und $L_3(x_3) = \Phi(x_3)$. Nach Konvexität von Φ muss wegen $x_2 \in [x_1, x_3]$ gelten $L_2(x_2) = \Phi(x_2) \leq L_3(x_2)$. Doch per Konstruktion ist $L_2(x_1) = L_3(x_1)$, so dass $L_2 \leq L_3$ für jegliches $x \geq x_1$, insbesondere $L_2(x_3) \leq L_3(x_3) = \Phi(x_3)$. Bemerke schließlich dass $L_2(x_3)$ durch den linken Ausdruck in (0.17) gegeben ist.

$\square$

Folgerung: Ist $\Phi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ konvex mit $\Phi(0) = 0$ und $\Phi(x_2) > 0$ für irgendein $x_2 > 0$, so geht $\Phi(x) \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ da nach Hilfsaussage 01

$$\Phi(x) \overset{x \geq x_2}{\geq} 0 + \frac{x - 0}{x_2 - 0} \cdot [\Phi(x_2) - 0] = \frac{x}{x_2} \cdot \underbrace{\Phi(x_2)}_{>0} \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty. \tag{0.18}$$

Hilfsaussage 02

Sei Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $\Phi : I \to \mathbb{R}$ konvex und $x_1, x_2 \in I$ so dass $x_1 < x_2$ und $\Phi(x_1) \leq \Phi(x_2)$. Dann ist Φ auf $[x_2, \infty) \cap I$ monoton wachsend.

Beweis: Aus Ungleichung (0.17) in Hilfsaussage 01 ist zu erkennen dass für alle $x_3 \in I$ mit $x_3 \geq x_2$ gilt $\Phi(x_3) \geq \Phi(x_2)$. Genauso gut lässt sich auch für das Paar (x_1, x_3) und ein neues $x_4 \geq x_3$ argumentieren, so dass $\Phi(x_4) \geq \Phi(x_3)$.

$\square$

Folgerung: Ist $\Phi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ konvex mit $\Phi(0) = 0$ und $\Phi(x) > 0\ \forall x > 0$, so ist Φ monoton wachsend.