Sommersemester 2011

montags, 10.15-11.45 Uhr, HS 5 A

Höhere Analysis, II

1. Übungsserie

III-1 Beweisen Sie die Sätze 3.7 und 3.8 aus der Vorlesung:

- Jeder Vektorraum $\mathbb{X}$, $\mathbb{X} \neq \{0\}$, besitzt eine (algebraische) Basis U.
- Sei $\mathbb{X}$ ein Vektorraum, $\mathbb{X} \neq \{0\}$. Zu jeder linear unabhängigen Menge $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ gibt es eine Basis in $\mathbb{X}$, die $\mathbb{Y}$ enthält.

Hinweis: Zornsches Lemma, Axiom 3.3

III-2 Seien $\Phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ eine stetige, konvexe Funktion mit $\Phi(t) = 0$ genau dann, wenn $t = 0$ gilt, sowie

$$\mathcal{L}_\Phi(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ f \text{ messbar}, \quad \exists\, c > 0 : \int_{\mathbb{R}} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{c}\right) \mathrm{d}x < \infty \right\}.$$

Man bezeichnet den Quotientenraum

$$L_\Phi(\mathbb{R}) = \mathcal{L}_\Phi(\mathbb{R}) / \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f = 0 \text{ fast überall} \}$$

als *Orliczraum*, und versieht ihn mit der *Luxemburg*-Norm

$$\| f | L_\Phi(\mathbb{R}) \| = \inf \left\{ c > 0 : \int_{\mathbb{R}} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{c}\right) \mathrm{d}x \leq 1 \right\}.$$

- Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}_\Phi(\mathbb{R})$ ein Vektorraum ist.
- Verifizieren Sie, dass $\| \cdot | L_\Phi(\mathbb{R}) \|$ eine Norm auf $L_\Phi(\mathbb{R})$ darstellt.
- Beweisen Sie, dass

  $$H_\Phi(\mathbb{R}) = \left\{ f \in L_\Phi(\mathbb{R}) : \forall\, c > 0 : \int_{\mathbb{R}} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{c}\right) \mathrm{d}x < \infty \right\}$$

  ein abgeschlossener Unterraum von $L_\Phi(\mathbb{R})$ ist.
- Betrachten Sie die Spezialfälle $\Phi(x) = x^p$, $1 \leq p < \infty$, bzw. $\Psi(x) = e^{x^2} - 1$, und die zugehörigen Räume $L_\Phi(\mathbb{R})$, $H_\Phi(\mathbb{R})$ bzw. $L_\Psi(\mathbb{R})$, $H_\Psi(\mathbb{R})$.

Hinweis: **Wir wünschen Ihnen einen guten Start ins neue Semester!**