Höhere Analysis II

FSU Jena - SS 2011

Vorlesungsscript

Stilianos Louca

3. Februar 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

1.1 Was dies ist

Hierbei handelt es sich hauptsächlich um persönliche Aufzeichnungen des Stoffes der im SS 2011 an der FSU Jena von Prof. D. Haroske im Fach *Höhere Analysis II* gelehrt wurde. Ich werde immer mal weiteren, komplementären, Stoff aus andere Quellen hinzufügen. Beweise sind nur marginal inkludiert. Das Auswahlaxiom wird vorausgesetzt. Lineare Räume sind, ohne weitere Angabe, stets über dem Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ zu verstehen.

1.2 Verbesserungen

Ich werde immer mal dieses Skript verbessern bzw. erweitern. Im Falle von Fehlern, ist mir Bescheid zu sagen das beste was du machen kannst, da so alle davon profitieren können. Wissen ist das einzige auf dieser Welt das vom Teilen mehr wird!
Ich bin zu erreichen unter *stilianos.louca@apfel.uni-jena.de*, ohne das *Obst*.

2 Vorbetrachtungen

2.1 Das Lemma von Zorn

2.1.1 Definition: Ordnung

Eine Relation $\leq$ auf einer Menge $X \neq \emptyset$ heißt **Partialordnung** (oder **Halbordnung**) falls gelten:

1. $\leq$ ist reflexiv, das heißt $x \leq x$ für jedes $x \in X$.
2. $\leq$ ist antisymmetrisch, das heißt $x \leq y \in R$ und $y \leq x \in R$ implizieren $x = y$ für jedes Paar $x, y \in X$.
3. $\leq$ ist transitiv, das heißt $x \leq y$ und $y \leq z$ impliziert $x \leq z$ für alle $x, y, z \in X$.

Das Paar $(X, \leq)$ heißt gegebenfalls **halbgeordnete Menge**. Eine Untermenge $K \subseteq X$ heißt **Kette** oder **vollständig geordnete Menge** falls für alle $x, y \in K$ gilt: $x \leq y$ oder $y \leq x$. Für zwei Elemente $x, y \in X$ schreiben wir $x < y$ falls $x \leq y$ und $x \neq y$.

Beispiele:

(i) $(\mathbb{N}, \leq)$ ist eine vollständig geordnete Menge.

(ii) Für beliebige Menge M ist $(\mathscr{P}(M), \subseteq)$ eine halbgeordnete Menge.

2.1.2 Definition: Maximales Element

Sei $(X, \leq)$ eine halbgeordnete Menge und $X_o \subseteq X$ eine beliebige Untermenge.

1. Ein Element $x \in X_o$ heißt **maximales** bzw. **minimales** Element von X_o falls kein $z > x$ bzw. kein $z < x$ in X_o existiert.
2. Ein Element $x \in X$ heißt **obere** bzw. **untere Schranke** von X_o falls $z \leq x$ bzw. $z \geq x$ für alle $z \in X_o$ gilt.
3. $(X, \leq)$ heißt **induktiv nach oben** bzw. **induktiv nach unten geordnet**, falls jede Kette $K \subseteq X$ eine obere bzw. eine untere Schranke besitzt.

Beispiele:

(i) $(\mathbb{N}, \leq)$ ist induktiv nach unten, jedoch nicht nach oben, geordnet.

(ii) Für beliebige Menge M ist $(\mathscr{P}(M), \subseteq)$ induktiv nach unten und nach oben geordnet.

(iii) Ist $(X, \leq)$ induktiv nach oben geordnet und $p \in X$, so ist auch die Untermenge $X^p := \{x \in X : x \geq p\}$ induktiv nach oben geordnet.

2.1.3 Lemma von Zorn

Ist $(X, \leq)$ eine induktiv nach oben bzw. nach unten geordnete Menge, so existiert in X mindestens ein maximales bzw. minimales Element.

Bemerkungen:

(i) Das Lemma von Zorn ist äquivalent zum Auswahlaxiom.

(ii) Nach Beispiel 2.1.2(iii) gilt sogar folgendes: Ist $(X, \leq)$ eine induktiv nach oben geordnete Menge und $x \in X$, so existiert mindestens ein in X maximales Element $x_{\mathrm{m}} \in X$ das auch noch $x \leq x_{\mathrm{m}}$ erfüllt.

2.2 Vektorräume

2.2.1 Definition: Algebraische Basis

Ein System $B \subseteq X$ von Vektoren in einem $\mathbb{K}$-linearen Raum X heißt **linear unabhängig** falls für alle $b_1, .., b_n \in B$ und $\lambda_1, .., \lambda_n \in \mathbb{K}$ die Bedingung $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_j = 0$ stets impliziert $\lambda_j = 0\ \forall j \in \{1, .., n\}$. Ein linearer Unterraum $U \subseteq X$ von X heißt **von B aufgespannt** falls für jedes $u \in U$ Vektoren $b_1, .., b_n \in B$ und Skalare $\lambda_1, .., \lambda_n \in \mathbb{K}$ existieren mit $u = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_j$. In dem Fall schreibt man $U = \operatorname{span} B$. Das System B heißt **algebraische Basis** (oder **Hammel Basis**) von X falls X von B aufgespannt wird und B linear unabhängig ist.

2.2.2 Satz: Existenz von Basen

Sei $X \neq \{0\}$ ein linearer Raum. Dann gilt:

1. Zu jeder linear unabhängigen Menge $Y \subseteq X$ gibt es eine Basis von X die Y enthält.
2. Zu jeder den Raum X aufspannenden Menge $Y \subseteq X$ gibt es eine Basis von X die in Y enthalten ist.

2.2.3 Theorem: Dimensionstheorem für lineare Räume

Je zwei algebraische Basen eines linearen Raumes haben gleiche Kardinalität. Diese Kardinalität, geschrieben $\dim X$, heißt **Dimension** des Raumes X.

2.2.4 Satz: Dimension von Banachräumen

Es gibt keinen Banachraum mit einer abzählbar unendlichen algebraischen Basis, das heißt, jede Basis ist entweder endlich oder überabzählbar unendlich.

Beweis: Folgerung des Satzes von Baire 3.1.6.

Beispiele:

(i) Der Raum $\mathcal{C}[0,1]$ aller reellen, stetigen Funktionen ist mit der ∞-Norm vollständig. Es existiert daher <u>kein</u> abzählbares System $S \subseteq \mathcal{C}[0,1]$ mit $\operatorname{span} S = \mathcal{C}[0,1]$.

(ii) Der Unterraum $\mathbb{R}[X] := \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{(x \mapsto x^n) : n \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathcal{C}[0,1]$ aller reellen Polynome auf $[0,1]$ ist bzgl. der ∞-Norm nicht vollständig, da er eine abzählbar-unendliche algebraische Basis besitzt.

2.2.5 Definition: Komplementärraum

Sei X ein linearer Raum und $U, V \subseteq X$ Teilräume. Dann heißt V **algebraisches Komplement** zu U in X falls $X = U + V$ und $U \cap V = \{0\}$. Man schreibt dann $X = U \oplus V$. Im Falle eines Hilbertraumes schreiben wir $U = X \ominus V$ falls V abgeschlossen ist und U das Orthogonalkomplement von V in X ist.

Bemerkungen:

(i) Es ist $X = U \oplus V$ genau dann wenn zu jedem $x \in X$ genau ein Paar $(u, v) \in U \times V$ existiert so dass $x = u + v$.

(ii) Ist $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $U \subseteq \mathcal{H}$ ein Teilraum, so gilt $\mathcal{H} = \overline{U} \oplus U^{\perp}$, wobei $U^{\perp} = \overline{U}^{\perp}$ das orthogonale Komplement von U sei. Dies rechtfertigt die Notation $\overline{U} = \mathcal{H} \ominus \overline{U}^{\perp}$ und $\overline{U}^{\perp} = \mathcal{H} \ominus \overline{U}$.

2.2.6 Satz: Existenz von algebraischen Komplementen

Sei X ein linearer Raum und $U \subseteq X$ ein Teilraum. Dann gilt:

1. Es gibt einen algebraischen Komplementärraum zu U.
2. Sind V_1, V_2 algebraische Komplemente zu U, so gilt $\dim V_1 = \dim V_2$.

2.2.7 Definition: Kodimension

Seien X ein linearer Raum und $U, V \subseteq X$ in X komplementäre Teilräume. Dann nennt man $\operatorname{codim} U := \dim V$ **Kodimension** von U in X.

Bemerkung: Nach Satz 2.2.6 ist die Kodimension eines beliebigen Teilraumes U wohldefiniert.

2.2.8 Definition: Topologischer Quotientenraum

Sei X ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation $[x]_\sim$ auf X. Der Raum $X/\sim$ aller Äquivalenzklassen heißt **Quotientenraum** von X über $\sim$. Die Abbildung $\Pi : X \to X/\sim,\ x \mapsto [x]_\sim$ heißt **Quotientenabbildung** in den Quotientenraum $X/\sim$. Die **Quotiententopologie** auf $X/\sim$ ist die feinste Topologie bzgl. der die Quotientenabbildung noch stetig ist, das heißt $U \subseteq X/\sim$ ist offen genau dann wenn das Urbild $\Pi^{-1}(U)$ in X offen ist.

2.2.9 Definition: Algebraischer Quotientenraum

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein linearer Raum und $U \subseteq X$ ein Teilraum. Zu $x \in X$ bezeichne $[x]_U := x + U$ die Nebenklasse von x bzgl. U. Die Menge aller Nebenklassen $X/U := \{[x]_U : x \in X\}$, ausgestattet mit der binären Verknüpfung $X/U \times X/U \to X/U,\ [x]_U + [y]_U := [x+y]_U$ und der skalaren Multiplikation $\mathbb{K} \times X/U \to X/U,\ \lambda \cdot [x]_U := [\lambda x]_U$, ist ein linearer Raum und heißt **Quotientenraum von X über U**. Beachte dass X/U der Quotientenraum von X bzgl. der Äquivalenzrelation $x \sim y \ :\Leftrightarrow\ x - y \in U$ ist.

2.2.10 Satz: Dimension des Quotientenraumes

Sei X ein linearer Raum und $U \subseteq X$ ein Teilraum, dazu der Quotientenraum X/U.

1. Ist $V \subseteq X$ ein Komplementärraum von U, so ist die Einschränkung der Quotientenabbildung $X \to X/U$ auf V ein Isomorphismus.
2. Insbesondere gilt $\operatorname{codim} U = \dim X/U$.

2.2.11 Satz: Der Quotientenraum als normierter Raum

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $U \subseteq X/U$ ein abgeschlossener Teilraum, dazu der Quotientenraum X/U. Für $[x]_U \in X/U$ setzt man

$$\|[x]_U\|_{X/U} := \inf_{u \in U} \|x + u\| . \tag{2.1}$$

Dann gilt:

1. $\|\cdot\|_{X/U}$ definiert auf X/U eine Norm.
2. Die Norm $\|\cdot\|_{X/U}$ induziert auf X/U genau die Quotiententopologie.
3. Die Quotientenabbildung $\Pi : X \to X/U,\ x \mapsto [x]_U$ ist eine lineare, surjektive, stetige und offene Abbildung mit Norm $\|\Pi\| \leq 1$. Im Falle dass $U \subsetneq X$, gilt sogar $\|\Pi\| = 1$.
4. Falls X vollständig ist, so ist es auch $\left(X/U, \|\cdot\|_{X/U}\right)$.

2.2.12 Definition: Kompakter Operator

Ein linearer Operator $K : X \to Y$ zwischen zwei normierten Räumen heißt **kompakt** falls das Bild $K(B)$ der abgeschlossenen Einheitskugel $B \subseteq X$ relativ kompakt ist. Wir schreiben $\mathcal{K}(X, Y)$ für den linearen Raum aller kompakten Operatoren zwischen X und Y.

Bemerkungen:

(i) Jeder kompakte Operator ist beschränkt, das heißt $\mathcal{K}(X,Y) \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$.

(ii) Ein linearer Operator $K : X \to Y$ ist genau dann kompakt wenn für jede beschränkte Folge $(x_n)_n \subseteq X$, $(Kx_n)_n \subseteq Y$ eine konvergente Teilfolge besitzt.

(iii) Falls X, Y Banachräume sind, so ist $\mathcal{K}(X,Y)$ ein abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{L}(X,Y)$.

2.2.13 Lemma: Approximation endlich-dimensionaler Räume

Sei X ein normierter Raum und $U \subseteq X$ ein endlich-dimensionaler Teilraum. Dann existiert zu jedem $x \in X$ ein $u \in U$ mit $\|x - u\| = d(x, U)$.

2.2.14 Lemma: Existenz von fast-senkrechten

Sei X ein normierter Raum und $U \subsetneq X$ ein echter, abgeschlossener Teilraum. Dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $x \in X$ mit $\|x\| = 1$ und $d(x, U) \geq 1 - \varepsilon$.

2.2.15 Definition: Nilpotenter Operator

Ein linearer Operator $A : X \to X$ auf einem linearen Raum X heißt **nilpotent** falls ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $A^n = 0$.

2.2.16 Definition: Unitärer Operator

Ein linearer Operator $A : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ zwischen zwei Prähilberträumen $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ heißt **unitär** falls er surjektiv und normerhaltend ist.

Bemerkung:

(i) $A : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ ist unitär genau dann wenn A surjektiv ist mit $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$ für alle $x, y \in \mathcal{H}$.

2.2.17 Satz über die Norm inverser Operatoren

Seien X, Y normierte Räume, $T : X \to Y$ ein bijektiver, linearer Operator und $\lambda > 0$. Dann gilt $\left\|T^{-1}y\right\| \leq \lambda \cdot \|y\|$ für alle $y \in Y$ genau dann wenn $\|Tx\| \geq \frac{1}{\lambda} \|x\|$ für alle $x \in X$. Insbesondere gilt

$$\|Tx\| \geq \frac{\|x\|}{\|T^{-1}\|} \tag{2.2}$$

für jedes $x \in X$.

2.2.18 Lemma von Lax-Milgram

Sei $\mathcal{H}$ ein $\mathbb{K}$-Hilbertraum und $S : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ eine beschränkte Sesquilinearform, das heißt $|S(x,y)| \leq C \cdot \|x\| \cdot \|y\|$ für eine Konstante $C \geq 0$ und alle $x, y \in \mathcal{H}$. Dann existiert genau ein linearer Operator $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ der $S(x,y) = \langle Tx, y \rangle_{\mathcal{H}}$ für alle $x, y \in \mathcal{H}$ erfüllt. Dieser Operator ist stetig mit $\|T\| \leq C$.

2.3 Das Spektrum eines Operators

2.3.1 Definition: Weylsche Folge

Seien X, Y normierte Räume, $D(A) \subseteq X$ ein Teilraum und $A : D(A) \to Y$ ein linearer Operator. Eine Folge $(x_n)_n \subseteq D(A)$ heißt **Weylsch zu** A falls sie beschränkt, jedoch nicht total beschränkt ist und erfüllt $Ax_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

2.3.2 Lemma: Total-Beschränktheit von Folgen

Sei X ein normierter Raum und $(x_n)_n \subseteq X$ eine Folge. Falls irgendeine der folgenden Aussagen zutrifft, so ist $(x_n)_n$ nicht total beschränkt.

1. $(x_n)_n$ ist besitzt keine Cauchy-Teilfolge.
2. Es existiert eine Konstante $\alpha > 0$ mit $\|x_n - x_m\| \geq \alpha$ für alle $n \geq m$.
3. X ist ein Prähilbertraum und es existiert eine Konstante $\alpha > 0$ mit $\|x_n\| \geq \alpha$ und $x_n \perp x_m$ für alle $n \neq m$.

2.3.3 Lemma: Existenz Weylscher Folgen

Seien X, Y normierte Räume, $D(A) \subseteq X$ ein Teilraum und $A : D(A) \to Y$ ein injektiver, linearer Operator.

1. Existiert eine Weylsche Folge $(x_n)_n \subseteq D(A)$ zu A, so ist $A^{-1} : \mathcal{R}(A) \to X$ unbeschränkt.
2. Ist X vollständig, A abgeschlossen und $A^{-1} : \mathcal{R}(A) \to X$ unbeschränkt, so existiert eine Weylsche Folge zu A.

Beweis:

1. Wählen eine Weylsche Folge $(x_n)_n \subseteq D(A)$ und setzen $y_n := Ax_n$. Dann gehen $y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, dennoch $A^{-1}y_n \overset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$.
2. Wähle $(y_n)_n \subseteq \mathcal{R}(A)$ so dass $y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ und $\left\|A^{-1}y_n\right\| = 1$. Dann ist $(x_n)_n := (A^{-1}y_n)_n$ eine Weylsche Folge für A, denn anderenfalls gäbe es eine gegen ein $x \in X$ konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_k \subseteq (x_n)_n$, wobei $\|x\| = 1$. Nach Abgeschlossenheit von A müsste dann $x \in D(A)$ und $Tx = \lim_{k\to\infty} Tx_{n_k} = 0$, daher $\ker(T) \neq \{0\}$ sein. Dies wäre ein Widerspruch zur Injektivität von A.

□

2.3.4 Definition: Spektrum

Sei X ein $\mathbb{K}$-linearer, normierter Raum, $D(A) \subseteq X$ ein Teilraum und $A : D(A) \to X$ ein linearer Operator.

1. Die Menge
$$\rho(A) := \left\{\lambda \in \mathbb{K} : \overline{\mathcal{R}(\lambda - A)} = X \text{ und } \exists\ (\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{R}(\lambda - A), D(\lambda - A))\right\} \tag{2.3}$$
heißt **Resolventenmenge** von A.
2. Die Menge $\sigma(A) := \mathbb{K} \setminus \rho(A)$ heißt **Spektrum** von A.
3. Die Menge $\sigma_p(A) := \{\lambda \in \mathbb{K} : \ker(\lambda - A) \neq \{0\}\}$ heißt **Punktspektrum** von A. Die Elemente von $\sigma_p(A)$ heißen **Eigenwerte** von A.
4. Der Wert $\dim \ker(\lambda - A)$ heißt **geometrische Vielfachheit** des Eigenwertes $\lambda \in \sigma_p(A)$.
5. Es bezeichne $\sigma_{p,o}(A)$ die Menge aller Eigenwerte von A mit endlicher geometrischer Vielfachheit.
6. Die Menge
$$\sigma_e(A) := \{\lambda \in \mathbb{K} : \exists (x_n)_n \subseteq D(A) \text{ Weylsche Folge zu } (\lambda - A)\} \tag{2.4}$$
heißt **wesentliches/stetiges Spektrum** von A.
7. Man definiert
$$\sigma_r(A) := \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(\lambda - A) = \{0\},\ (\lambda - A)^{-1} \text{ unbeschränkt oder } \overline{\mathcal{R}(\lambda - A)} \subsetneq X\right\}. \tag{2.5}$$
8. Der Wert $s(A) := \sup\{\Re\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$ heißt **Spektralschranke** von A.

Bemerkungen:

(i) Die genauen Definitionen von σ_r und σ_e sind in der gängigen Literatur nicht einheitlich.

(ii) Es gilt stets $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_r(A)$, wobei $\sigma_p(A) \cap \sigma_r(A) = \emptyset$ und $\sigma_{p,0}(A) \subseteq \sigma_p(A)$.

(iii) Es gilt stets $\sigma_e(A) \subseteq \sigma(A)$ und $(\sigma_e(A) \setminus \sigma_p(A)) \subseteq \sigma_r(A)$.

(iv) Sei X ein Banachraum, Y ein normierter Raum, $D(T) \subseteq X$ ein Teilraum und $T : D(T) \to Y$ ein abgeschlossener Operator mit $T^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{R}(T), X)$. Dann ist das Bild $\mathcal{R}(T)$ abgeschlossen in Y. Demnach gilt im Banachraum-Fall für abgeschlossene Operatoren $A : D(A) \to X$:

$$\begin{aligned} \rho(A) &= \left\{\lambda \in \mathbb{K} : \exists (\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\right\} \\ \sigma_r(A) &= \left\{\lambda \in \mathbb{K} : \ker(\lambda - A) = \{0\}\,,\ \mathcal{R}(\lambda - A) \subsetneq X \text{ oder } (\lambda - A)^{-1} \text{ unbeschränkt}\right\} \end{aligned} \tag{2.6}$$

Ist ferner $D(A) = X$, so gilt nach Satz 3.4.6 und 3.3.3 $\lambda \in \rho(A)$ genau dann wenn $(\lambda - A) : X \to X$ bijektiv ist.

(v) Seien X, Y Banachräume, $D(A) \subseteq X$ ein Teilraum und $A : D(A) \to Y$ beschränkt.

- Nehme an dass $A^{-1} : \mathcal{R}(A) \to X$ existiert und beschränkt ist. Dann gilt $\overline{\mathcal{R}(A)} = \mathcal{R}(\widetilde{A})$ und $\overline{D(A)} = \mathcal{R}(\widetilde{A^{-1}})$, wobei $\widetilde{A}$ und $\widetilde{A^{-1}}$ jeweils die stetigen Fortsetzungen von A auf $\overline{D(A)}$ und von A^{-1} auf $\overline{\mathcal{R}(A)}$ sind. Letztere sind zu einander invers.
- Ist nun $A : D(A) \subseteq X \to X$ dicht auf X definiert und beschränkt, so ist $\lambda \in \rho(A)$ genau dann wenn die stetige Fortsetzung von $(\lambda - A)$ auf ganz X, eine Inverse in $\mathcal{L}(X)$ besitzt. Ist $\widetilde{A}$ die stetige Fortsetzung von A auf X, so heißt dies

$$\rho(A) = \rho(\widetilde{A}) = \left\{\lambda \in \mathbb{K} : \exists (\lambda - \widetilde{A})^{-1} \in \mathcal{L}(X)\right\}. \tag{2.7}$$

Beachte dass an dem Punkt A oft stillschweigend gleich mit $\widetilde{A}$ identifiziert wird.

(vi) Ist X unendlich-dimensional und $K \in \mathcal{K}(X)$ kompakt, so ist $0 \in \sigma(K)$.

2.3.5 Definition: Spektralradius eines Operators

Sei X ein normierter Raum und $A \in \mathcal{L}(X)$. Dann existiert der Grenzwert

$$r(A) := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{\|A^n\|} \tag{2.8}$$

und heißt **Spektralradius** von A. Dabei gilt stets $r(A) \leq \|A\|$. Für $x \in X$ heißt

$$r(A, x) := \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\|A^n x\|} \tag{2.9}$$

lokaler Spektralradius von A in x.

Bemerkungen:

(i) Ist X ein Hilbertraum und $A \in \mathcal{L}(X)$ selbstadjungiert (allgemeiner: normal), so lässt sich zeigen dass sogar $r(A) = \|A\|$.

(ii) Ist X ein Hilbertraum und $A \in \mathcal{K}(X)$ kompakt und selbstadjungiert, so lässt sich zeigen dass $r(A) = |\lambda|$ für ein $\lambda \in \sigma_p(A)$.

(iii) Sind $A, B \in \mathcal{L}(X)$ zwei kommutierende Operatoren auf dem Banachraum X, so gilt $r(AB) \leq r(A) \cdot r(B)$ [3].

(iv) Ist X ein Banachraum und $A \in \mathcal{L}(X)$, so gilt $\|A^n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ genau dann wenn $r(T) < 1$ [3].

2.3.6 Satz über lokalen Spektralradius und Spektralradius

Sei X ein $\mathbb{K}$-Banachraum und $A \in \mathcal{L}(X)$. Dann gilt

$$r(A) = \max\{r(A, x) : x \in E\}. \tag{2.10}$$

Beweis: Siehe [8, pp. 20].

2.3.7 Satz: Die Neumannsche Reihe eines Operators

Sei X ein normierter Raum und $A \in \mathcal{L}(X)$ so dass die **Neumannsche Reihe** $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ in $\mathcal{L}(X)$ konvergiert. Dann ist $\mathrm{Id} - A$ invertierbar und es gilt

$$(\mathrm{Id} - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n. \tag{2.11}$$

Bemerkungen:

(i) Die Voraussetzungen des Satzes sind z.B. erfüllt wenn X ein Banachraum ist und $\sum_n \|A^n\| < \infty$.

2.3.8 Satz: Die Neumannsche Reihe und das Spektrum eines Operators

Sei X ein $\mathbb{K}$-Banachraum und $A \in \mathcal{L}(X)$ mit Spektralradius $r(A)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}$ konvergiert in $\mathcal{L}(X)$ genau dann wenn $|\lambda| > r(A)$.
2. Für $|\lambda| > r(A)$ existiert $(\lambda - A)^{-1}$ und es gilt
$$(\lambda - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}. \tag{2.12}$$
3. Für $|\lambda| > \|A\|$ gilt ferner
$$\left\|(\lambda - A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|A\|}. \tag{2.13}$$

Beachte:

(i) Für $\lambda \leq r(A)$ divergiert zwar $\sum_n A^n/\lambda^{n+1}$, doch mag der Inverse $(\lambda - A)^{-1}$ sehr wohl in $\mathcal{L}(X)$ existieren!

2.3.9 Satz: Der Spektralradius und das Spektrum eines Operators

Sei X ein $\mathbb{K}$-Banachraum und $A \in \mathcal{L}(X)$ mit Spektralradius $r(A)$. Dann gilt:

1. $|\lambda| \leq r(A)$ für jedes $\lambda \in \sigma(A)$.
2. Falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist, so existiert ein $\lambda \in \sigma(A)$ mit $|\lambda| = r(A)$, das heißt
$$r(A) = \max\left\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\right\}. \tag{2.14}$$

2.3.10 Satz: Allgemeine Eigenschaften des Spektrums

Sei X ein $\mathbb{K}$-Banachraum und $A \in \mathcal{L}(X)$. Dann gilt:

1. $\rho(A)$ ist offen in $\mathbb{K}$. Ist $\lambda_0 \in \rho(A)$, so gilt $\lambda \in \rho(A)$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda - \lambda_0| < \left\|(\lambda_0 - A)^{-1}\right\|^{-1}$.
2. Die **Resolventenabbildung**
$$\rho(A) \to \mathcal{L}(X) \quad , \quad \lambda \mapsto (\lambda - A)^{-1} \tag{2.15}$$
ist analytisch, das heißt sie wird lokal durch eine in $\mathcal{L}(X)$ konvergente Potenzreihe mit Koeffizienten aus $\mathcal{L}(X)$ beschrieben.
3. $\sigma(A)$ ist kompakt mit Radius kleiner oder gleich dem Spektralradius $r(A)$.
4. Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so ist das Spektrum $\sigma(A)$ nicht-leer.

2.3.11 Satz: Polynome und Spektren

Sei E ein $\mathbb{C}$-Banachraum, $A \in \mathcal{L}(E)$ und $Q \in \mathbb{C}[X]$ ein komplexes Polynom. Dann gilt:

$$\sigma(Q(A)) = Q(\sigma(A)) \quad , \quad \sigma_p(Q(A)) = Q(\sigma_p(A)). \tag{2.16}$$

Die rechte Gleichung gilt sogar im Falle dass $A : E \to E$ unbeschränkt ist.

2.4 Stabilitätsanalyse

2.4.1 Definition: Stabilität

Ein linearer Operator A auf einem $\mathbb{K}$-Banachraum X heißt **stark stabil** falls $\lim\limits_{n\to\infty} T^n x = 0$ für alle $x \in X$. Er heißt **potenzbeschränkt** falls $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A^n\| < \infty$.

Bemerkungen:

(i) Für jeden potenzbeschränkten linearen Operator A gilt $r(A) \leq 1$.

(ii) Jeder stark stabile lineare Operator auf X ist auch potenzbeschränkt.

2.4.2 Satz: Charakterisierung exponentieller Stabilität

Sei X ein $\mathbb{K}$-Banachraum und $A \in \mathcal{L}(X)$. Dann sind äquivalent:

1. $r(A) < 1$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \|A^n\| = 0$.
3. A ist uniform exponentiell stabil, das heißt es existieren Konstanten $M > 0$, $\varepsilon > 0$ so dass $\|T^n\| \leq M \cdot e^{-\varepsilon n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Siehe [6, pp. 38].

2.4.3 Lemma über potenzbeschränkte Operatoren

Sei A ein potenzbeschränkter linearer Operator auf einem $\mathbb{K}$-Banachraum X und $x \in X$. Dann gilt:

1. Falls für eine Unterfolge $(n_k)_k \subseteq \mathbb{N}$ gilt $\lim\limits_{k\to\infty} A^{n_k} x = 0$, so gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} A^n x = 0$.
2. Ist A eine Kontraktion, so existiert der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \|A^n x\|$.

Beweis: Siehe [6, pp. 46].

2.4.4 Satz: Charakterisierung starker Stabilität

Ein linearer Operator A auf einem $\mathbb{K}$-Banachraum X ist stark stabil genau dann wenn

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \left\|A^k x\right\|^2 = 0 \quad \forall x \in X \quad \text{und} \\ &\sup_n \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \left\|A'^k y\right\|^2 < \infty \quad \forall y \in X'. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Ist A potenzbeschränkt, so ist er stark stabil genau dann wenn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \left\|T^k x\right\|^2 = 0 \tag{2.18}$$

für alle x in einer dichten Teilmenge von X.

2.4.5 Lemma über potenzbeschränkte Operatoren

Sei A ein potenzbeschränkter linearer Operator auf dem $\mathbb{K}$-Banachraum X mit $\sigma(A) \cap S^1 \subseteq \{1\}$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} A^n x = 0$ für jeden $x \in \mathrm{cl}(\mathrm{image}(\mathrm{Id} - A))$. Falls zusätzlich gilt $1 \notin \sigma_p(A')$, so ist A stark stabil.

Beweis: Siehe [6, pp. 51].

2.4.6 Theorem über potenzbeschränkte Operatoren

Sei A ein potenzbeschränkter linearer Operator auf dem $\mathbb{K}$-Banachraum X, mit $\sigma_p(A') = \emptyset$ und $\sigma(A) \cap S^1$ abzählbar. Dann ist A stark stabil.

Beweis: Siehe [6, pp. 51].

2.4.7 Definition: $\mathcal{C}_0$-Halbgruppe

Eine **stark stetige Halbgruppe** (**$\mathcal{C}_0$-Halbgruppe**, **strongly continuous semigroup**) auf einem $\mathbb{C}$-Banachraum X ist eine Abbildung $T : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(X)$ die erfüllt:

1. $T(0) = \mathrm{Id}$.
2. $T(t+s) = T(t)T(s)$ für alle $t, s \geq 0$.
3. $\|T(t)x - x\| \overset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ für jedes $x \in X$.

Sie heißt **uniform stetig** falls die Abbildung $t \to T(t)$, stetig von $[0, \infty)$ auf $\mathcal{L}(X)$ ist. Sie heißt **schließlich norm-stetig** (**eventually norm-continuous**) falls es ein $t_o \geq 0$ gibt so dass $t \mapsto T(t)$ stetig von (t_o, ∞) auf $\mathcal{L}(X)$ ist. Sie heißt **gleich norm-stetig** (**immediately norm continuous**) falls $t_o = 0$ gewählt werden kann. Si eheißt **schließlich kompakt** falls es ein $t_o > 0$ gibt so dass $T(t_o)$ kompakt ist. Beachte dass dann $T(t)$ für alle $t \geq t_o$ kompakt ist. Sie heißt **gleich kompakt** falls $T(t)$ für alle $t > 0$ kompakt ist.
Der **Generator** einer stark stetigen Halbgruppe ist definiert als

$$Ax := \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t} \left[T(t) - \mathrm{Id}\right] x \tag{2.19}$$

wann immer der Grenzwert existiert. Sein Definitionsgebiet $D(A)$ ist ein dichter, linearer Unterraum von X und A ist ein linearer, abgeschlossener Operator auf $D(A)$. Siehe [6] und [7] für mehr Details. Die **Wachstumsschranke** (**growth bound**) einer stark stetigen Halbgruppe ist gegeben durch

$$\omega_o(T) := \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t} \ln \|T(t)\| = \inf\left\{\omega \in \mathbb{R} : \exists M \geq 1 \text{ mit } \|T(t)\| \leq M e^{\omega t} \ \forall t \geq 0\right\}. \tag{2.20}$$

Bemerkungen:

(i) Jede uniform stetige Halbgruppe ist gleich norm-stetig und somit schließlich norm-stetig.

(ii) Jede schließlich kompakte Halbgruppe ist schließlich norm-stetig.

(iii) Jeder beschränkte lineare Operator $A \in \mathcal{L}(X)$ erzeugt eine uniform stetige Halbgruppe durch $T(t) := e^{tA} = \sum_n \frac{(tA)^n}{n!}$. Ihr Generator ist genau A.

(iv) Eine stark stetige Halbgruppe T ist genau dann uniform stetig wenn ihr Generator A ein beschränkter, linearer Operator auf X ist. In dem Falle gilt $T(t) = e^{tA} = \sum_n \frac{(tA)^n}{n!}$.

(v) Ist A der Generator einer stark stetigen Halbgruppe T, so gilt $\sigma_p(T(t)) = e^{t\sigma_p(A)}$ und $s(A) \leq \omega_o(T)$, wobei $s(A) \in \mathbb{R}$ die Spektralschranke von A sei.

2.4.8 Lemma über Spektralradius und Wachstumsschranke von $\mathcal{C}_o$-Halbgruppen

Sei T eine $\mathcal{C}_0$-Halbgruppe auf dem $\mathbb{C}$-Banachraum X. Dann gilt $r(T(t)) = e^{t\omega_o(T)}$ für jedes $t \geq 0$.

2.4.9 Theorem: Spektrum schließlich norm-stetiger $\mathcal{C}_0$-Halbgruppen

Sei T eine schließlich norm-stetige $\mathcal{C}_0$-Halbgruppe auf dem $\mathbb{C}$-Banachraum X, so gelten:

$$\sigma(T(t)) = e^{t\sigma(A)} \quad , \quad s(A) = \omega_o(T) \tag{2.21}$$

für alle $t \geq 0$. Dabei ist $s(A)$ die Spektralschranke von A und $\omega_o(T)$ die Wachstumsschranke von T. Siehe [6, 7] für mehr Details.

2.4.10 Satz: Charakterisierung exponentieller Stabilität von $\mathcal{C}_0$-Halbgruppen

Sei $T(\cdot)$ eine stark stetige Halbgruppe auf dem $\mathbb{C}$-Banachraum X mit Generator A. Dann sind folgende äquivalent:

1. Es gibt $M, \omega > 0$ so dass $\|T(t)\| \leq Me^{-\omega t}$ für alle $t \geq 0$.
2. Die Wachstumsschranke $\omega_o(T)$ ist negativ.
3. $\lim\limits_{t\to\infty} \|T(t)\| = 0$.
4. Es existiert ein $t_o > 0$ so dass $\|T(t_o)\| < 1$.
5. Es existiert ein $t_1 > 0$ so dass $r(T(t_1)) < 1$.
6. $r(T(t)) < 1$ für alle $t > 0$.
7. Es existiert ein $p \in [1, \infty)$ so dass $\int_0^\infty \|T(t)x\|^p \ dt < \infty$ für jedes $x \in X$ [Datko-Pazy].
8. Falls T sogar schließlich norm stetig ist mit: $s(A) < 0$.

Die Halbgruppe T heißt **uniform exponentiell stabil** falls eine der obigen Eigenschaften erfüllt sind. Siehe [6, 7] für weitere Details.

2.4.11 Satz: Hinreiche Bedingung für uniforme exponentielle Stabilität[Rolewicz]

Sei T eine $\mathcal{C}_0$-Halbgruppe auf dem $\mathbb{C}$-Banachraum X. Es existiere eine strikt-positive, monoton wachsende Funktion $\Phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ so dass $\int_0^\infty \Phi(\|T(t)x\|) \ dt < \infty$ für alle $x \in X$ mit $\|x\| \leq 1$. Dann ist T uniform exponentiell stabil.

3 Hauptsätze der Funktionalanalysis

3.1 Der Satz von Baire und Folgerungen

3.1.1 Definition: Innerer Punkt

Sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$. Dann heißt $x \in A$ **innerer Punkt** von A falls es eine offene Menge $U \subseteq X$ gibt mit $x \in U \subseteq A$. Die Menge aller inneren Punkte von A, geschrieben A^o, heißt **Inneres** von A. Sie ergibt sich als Vereinigung aller offenen, in A enthaltenen Mengen.

3.1.2 Definition: Häufungspunkt und Adhärenzpunkt

Sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$. Dann heißt $x \in A$ **Adhärenzpunkt** (oder **Berührungspunkt**) von A falls jede offene, den Punkt x enthaltende Menge U die Menge A schneidet. Er heißt **Häufungspunkt** (oder **Limespunkt**) falls für jede, den Punkt x enthaltende, offene Menge $U \subseteq X$ gilt $(U \cap A) \setminus \{p\} \neq \emptyset$. Somit ist jeder Häufungspunkt von A auch Adhärenzpunkt von A. Die Menge aller Adhärenzpunkte von A, geschrieben $\overline{A}$, heißt **Abschluss** von A. Sie ergibt sich als Schnitt aller abgeschlossenen, A enthaltenden Mengen. Wir nennen A **dicht in** X falls $\overline{A} = X$.

3.1.3 Lemma: Inneres, Abschluss und Mengenoperationen

Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{A} \subseteq \mathscr{P}(X)$ ein beliebiges Mengensystem. Dann gilt:

1. $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} \overline{A} \subseteq \overline{\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A}$.
2. $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} \overline{A} \supseteq \overline{\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A}$.
3. $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A^o \subseteq \left[\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A\right]^o$.
4. $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A^o \supseteq \left[\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A\right]^o$.

3.1.4 Definition: Nirgends dichte und magere Mengen

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $N \subseteq X$. Dann heißt N:

1. **Nirgends dicht** falls $\overline{N}^{\,o} = \emptyset$, das heißt deren Abschluss leeres Inneres hat.
2. **Mager** (oder **1. Kategorie**) falls sie eine abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen ist. Ansonsten heißt sie **fett** (oder **2. Kategorie**).

Insbesondere ist jede nirgends dichte Menge auch mager.

3.1.5 Lemma: Grenzwert einer Kugelschachtelung

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $X \supseteq K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots$ eine absteigende Folge abgeschlossener Mengen mit $\operatorname{diam} K_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Dann existiert genau ein $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$.

3.1.6 Satz von Baire

Seien (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, $(A_n)_n \subseteq \mathscr{P}(X)$ eine Folge abgeschlossener Mengen mit leerem Inneren. Dann hat auch deren Vereinigung $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ leeres Inneres.

Alternativformulierung: Der abzählbare Schnitt offener, in X dichter Mengen ist wieder dicht in X.

3.1.7 Satz über magere Mengen in vollständigen Räumen

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum. Dann gilt:

1. Jede nicht-leere offene Menge in X ist fett.
2. Für jede magere Menge $M \subseteq X$ ist $X \setminus M$ dicht in X.

3.2 Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

3.2.1 Definition: Punktweise Beschränktheit

Seien X, Y zwei metrische Räume und $\mathcal{F}$ eine Familie von Abbildungen von X nach Y. Dann heißt $\mathcal{F}$ **punktweise (total) beschränkt** falls für jedes $x \in X$ die Menge $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\} \subseteq Y$ (total) beschränkt ist. Sie heißt **gleichmäßig (total) beschränkt** falls die Menge $\{f(x) : x \in X, f \in \mathcal{F}\} \subseteq Y$ (total) beschränkt ist.

Bemerkungen:

(i) Gleichmäßige (totale) Beschränktheit impliziert stets punktweise (totale) Beschränktheit.

(ii) Für den Fall $Y = \mathbb{R}^n$ oder $Y = \mathbb{C}^n$ ist punktweise totale Beschränktheit äquivalent zur punktweisen Beschränktheit.

3.2.2 Satz von Osgood

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ punktweise beschränkt. Dann gibt es eine abgeschlossene Kugel $\emptyset \neq B \subseteq X$ und $M \geq 0$ so dass $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in B$ und $f \in \mathcal{F}$.

3.2.3 Theorem: Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit [Banach-Steinhaus]

Seien X ein Banachraum, Y ein normierter Raum und $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$ punktweise beschränkt, das heißt $\sup_{T\in\mathcal{T}} \|Tx\| < \infty$ für jedes $x \in X$. Dann ist $\mathcal{T}$ in $\mathcal{L}(X,Y)$ beschränkt, das heißt $\sup_{T\in\mathcal{T}} \|T\| < \infty$.

3.2.4 Satz: Stetigkeit von Grenzoperatoren

Seien X ein Banachraum, Y ein normierter Raum und $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$ so dass der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} T_n x =: Tx$ für jedes $x \in X$ existiere. Dann ist $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ und es gilt $\|T\| \leq \sup_n \|T_n\| < \infty$.

Beweis: Folgerung des Prinzips der gleichmäßigen Beschränktheit 3.2.3.

3.2.5 Satz über die Neumannsche Reihe

Sei X ein Banachraum und $T \in \mathcal{L}(X)$ so dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} T^n x =: Sx$ für jedes $x \in X$ konvergiere. Dann ist $(\mathrm{Id} - T)$ eine Bijektion und es gilt $(\mathrm{Id} - T)^{-1} = S \in \mathcal{L}(X)$.

Beweis: Folgerung aus 3.2.4.

3.2.6 Satz: Existenz von Grenzoperatoren

Es seien X, Y Banachräume und $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$. Dann sind äquivalent:

1. Die Folge $(T_n)_n$ ist beschränkt in $\mathcal{L}(X,Y)$ und der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} T_n x$ existiert für jedes $x \in X_o$ aus einer in X dichten Teilmenge X_o.
2. Der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} T_n x =: Tx$ existiert für alle $x \in X$.

Gegebenfalls ist dann $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ mit $\|T\| \leq \sup_n \|T_n\|$.

3.2.7 Beispiel: Quadraturformeln

Betrachten den Raum $\mathcal{C}[0,1]$ ausgestattet mit der Supremumsnorm, darauf den linearen, beschränkten Integraloperator $f \mapsto \int_0^1 f$ den es zu Approximieren gilt. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ seien $r_n \in \mathbb{N}$ eine *Stützpunktanzahl*, $0 \leq x_{n,1} \leq \cdots \leq x_{n,r_n} \leq 1$ beliebige *Stützpunkte* und $\alpha_{n,1}, ..., \alpha_{n,r_n} \in \mathbb{R}$ *Gewichte*. Dann gilt für die Folge der linearen, beschränkten Operatoren

$$Q_n : \mathcal{C}[0,1] \to \mathbb{R} \quad , \quad Q_n f := \sum_{k=1}^{r_n} \alpha_{n,k} f(x_{n,k}) \tag{3.1}$$

die Äquivalenz der Aussagen:

1. $Q_n f \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(x)\, dx$ für alle $f \in \mathcal{C}[0,1]$.
2. $Q_n(p) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 p(x)\, dx$ für alle Polynome $p \in \mathbb{R}[X]$ und es gilt $\sup_n \sum_{k=1}^{r_n} |\alpha_{n,k}| < \infty$.

Beweis: Beachte dass die Operatornorm der Q_n in $\mathcal{L}(\mathcal{C}[0,1], \mathbb{R})$ gegeben ist durch $\|Q_n\| = \sum_{k=1}^{r_n} |\alpha_{n,k}|$. Damit folgt die Aussage aus 3.2.6 und der Dichtheit der Polynome in $\mathcal{C}[0,1]$ [Weierstraß].

3.3 Das Prinzip der offenen Abbildung

3.3.1 Definition: Offene Abbildung

Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen X, Y heißt **offen** falls für jede offene $U \subseteq X$ auch $f(U) \subseteq Y$ offen ist.

3.3.2 Theorem: Offenheit von Operatoren

Seien X, Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ surjektiv. Dann ist T offen.

3.3.3 Satz vom inversen Operator [Banach]

Seien X, Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ bijektiv. Dann ist auch $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.

Bemerkung: Die Vollständigkeit der Räume X, Y ist für die Aussage wesentlich! Betrachte zum Beispiel die Räume

$$\begin{aligned}(X, \|\cdot\|_X) &:= (\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty) \\ (Y, \|\cdot\|_Y) &:= \left(\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_{L_1}\right)\end{aligned} \tag{3.2}$$

und den Operator $T := \mathrm{Id} : X \to Y$. Dann ist $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ mit Norm $\|T\| = 1$. Jedoch ist der Inverse $T^{-1} : Y \to X$ nicht beschränkt. Betrachte dazu die Folge $(f_n)_n \in \mathcal{C}[0,1]$ definiert durch $f_n(x) := x^n$, für die gilt $\|f_n\|_\infty = 1 \ \forall n$ obwohl $\|f_n\|_{L_1} = \frac{1}{n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Die Erklärung für diesen Widerspruch ist lediglich die nicht-Vollständigkeit des Raumes Y.

3.3.4 Korollar: Stetigkeit des eingeschränkten inversen Operators

Seien X, Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ injektiv. Dann gilt $T^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{R}(T), X)$ genau dann wenn das Bild $\mathcal{R}(T) \subseteq Y$ abgeschlossen ist.

3.4 Der Satz von abgeschlossenem Graphen

3.4.1 Definition: Abgeschlossener Operator

Es seien X, Y normierte Räume. Dann versieht man $X \times Y$ mit der **Graphennorm** $\|(x,y)\| := \|x\| + \|y\|$, $x \in X$, $y \in Y$. Für jeden Teilraum $D(T) \subseteq X$ und linearem Operator $T : D(T) \to Y$ heißt

$$G_T := \{(x, Tx) : x \in D(T)\} \subseteq X \times Y \tag{3.3}$$

Graph von T. Der Operator T heißt **abgeschlossen** falls sein Graph G_T in $X \times Y$ abgeschlossen ist.

Bemerkungen:

(i) Der Raum $X \times Y$ ist vollständig genau dann wenn X und Y vollständig sind.

(ii) $T : D(T) \subseteq X \to Y$ ist abgeschlossen genau dann wenn für alle Folgen $(x_n)_n \subseteq X$ und $(x, y) \in X \times Y$ mit $(x_n, Tx_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (x, y)$ gilt $x \in D(T)$ und $y = Tx$.

(iii) Ist $D(T) \subseteq X$ abgeschlossen und $T \in \mathcal{L}(D(T), Y)$, so ist T abgeschlossen.

Beispiel: Betrachten die Räume $X := Y := \mathcal{C}(\mathbb{R})$, dazu den linearen Operator $T : D(T) := \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \subseteq X \to Y$, $Tf := f'$. Dieser ist abgeschlossen, das heißt für $(f_n)_n \subseteq \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ und $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ mit $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ und $f_n' \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} g$ gilt $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ und $f' = g$.

3.4.2 Definition: Erweiterung eines Operators, abschließbarer Operator

Seien X, Y normierte Räume, $D(A), D(B) \subseteq X$ Teilräume und $A : D(A) \to Y$, $B : D(B) \to Y$ lineare Operatoren. Dann nennt man B **Erweiterung** von A und schreibt $A \subseteq B$, falls gilt $D(A) \subseteq D(B)$ und $Bx = Ax \ \forall x \in D(A)$. Der Operator A heißt **abschließbar** falls eine abgeschlossene Erweiterung $B \supseteq A$ existiert.

Bemerkungen:

(i) Die Relation "$\subseteq$" ist eine Partialordnung zwischen linearen Operatoren.

3.4.3 Definition: Von einem Operator induzierte Norm

Seien X, Y normierte Räume, $D(A) \subseteq X$ ein Teilraum und $A : D(A) \to Y$ linear. Dann induziert A durch

$$\|x\|_A := \sqrt{\|x\|^2 + \|Ax\|^2} \quad , \quad x \in D(A) \tag{3.4}$$

eine Norm auf $D(A)$.

Bemerkungen:

(i) Oft wird auf $D(A)$ die *zurückgezogene* Graphennorm $\|x\|_{A,\mathrm{Gr}} := \|(x, Ax)\| = \|x\| + \|Ax\|$ betrachtet. Diese ist äquivalent zur Norm $\|\cdot\|_A$.

(ii) Bzgl. der Norm $\|\cdot\|_A$ ist $A : D(A) \to Y$ beschränkt mit Norm kleiner oder gleich 1.

3.4.4 Satz: Charakterisierung abgeschlossener Operatoren

Seien X, Y Banachräume, $D(A) \subseteq X$ ein Teilraum und $A : D(A) \to Y$ linear. Dann ist A abgeschlossen genau dann wenn $(D(A), \|\cdot\|_A)$ vollständig ist.

3.4.5 Satz: Existenz eines Abschlusses

Seien X, Y Banachräume, $D(A) \subseteq X$ ein Teilraum und $A : D(A) \to Y$ ein abschließbarer, linearer Operator. Dann gibt es eine minimale abgeschlossene Erweiterung $\overline{A}$ von A. *Minimalität* bedeutet hier dass jede weitere abgeschlossene Erweiterung von A auch Erweiterung von $\overline{A}$ ist. Der Operator $\overline{A} : D(\overline{A}) \to Y$ heißt **Abschluss** von A und ist mit diesen Eigenschaften eindeutig bestimmt. Der Abschluss $\overline{A}$ ist genau der lineare Operator dessen Graph $G_{\overline{A}}$ der Abschluss des Graphs $G_A \subseteq X \times Y$ in der Graphennorm ist. Es gilt $D(\overline{A}) = \overline{D(A)}^{\|\cdot\|_{\overline{A}}}$.

Beweis: Wir zeigen zunächst die Existenz von $\overline{A}$. Nach Voraussetzung existiert eine abgeschlossene Erweiterung $B \supseteq A$ von A. Nach Satz 3.4.4 ist $(D(B), \|\cdot\|_B)$ vollständig. Wir setzen $D(\overline{A}) := \overline{D(A)}^{\|\cdot\|_B} \subseteq D(B)$ und $\overline{A}x := Bx$ für $x \in D(\overline{A})$. Dann stimmen $\|\cdot\|_{\overline{A}}$ und $\|\cdot\|_B$ auf $D(\overline{A})$ überein, so dass $D(\overline{A}) = \overline{D(A)}^{\|\cdot\|_{\overline{A}}}$. Beachte dass $\overline{A} \supseteq A$. Als abgeschlossene Menge in einem vollständigen Raum $(D(B), \|\cdot\|_B)$ ist auch $(D(\overline{A}), \|\cdot\|_B) = (D(\overline{A}), \|\cdot\|_A)$ vollständig, was nach Satz 3.4.4 die Abgeschlossenheit von $\overline{A}$ impliziert.

Wir zeigen nun die Minimalität von $\overline{A}$. Sei $\widetilde{B} \supseteq A$ eine weitere abgeschlossene Erweiterung von A. Sei $x \in D(\overline{A})$, dann existiert nach obigen Überlegungen eine Folge $(x_n)_n \subseteq D(A)$ mit $\|x_n - x\|_{\overline{A}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, sprich $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ und $Ax_n = \overline{A}x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \overline{A}x$. Da $\widetilde{B} \supseteq A$ gilt dann auch $\widetilde{B}x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \overline{A}x$, das heißt $(x_n, \widetilde{B}x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (x, \overline{A}x)$. Nach Abgeschlossenheit des Graphen $G_{\widetilde{B}}$ muss $(x, \overline{A}x) \in G_{\widetilde{B}}$, das heißt $x \in D(\widetilde{B})$ und $\overline{A}x = \widetilde{B}x$. Folglich ist $\overline{A} \subseteq \widetilde{B}$.

Die Eindeutigkeit des Abschlusses $\overline{A}$ folgt durch seine Minimalität. Ferner sind zwei Operatoren mit gleichem Graph identisch. Wir zeigen nun dass $G_{\overline{A}}$ der Abschluss von G_A in $X \times Y$ ist. Da $\overline{A}$ abgeschlossen ist, ist $G_{\overline{A}}$ in $X \times Y$ abgeschlossen und daher $\overline{G_A} \subseteq G_{\overline{A}}$. Sei nun $(x, y) \in G_{\overline{A}}$, dann existiert eine Folge $(x_n)_n \subseteq D(A)$ mit $\|x_n\|_{\overline{A}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, das heißt

$$\|x_n - x\| + \overbrace{\|\overline{A}x_n - \overline{A}x\|}^{\|Ax_n - y\|} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{3.5}$$

bzw. $(x_n, Ax_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (x, y)$. Daher ist auch $G_{\overline{A}} \subseteq \overline{G_A}$.

□

Bemerkungen:

(i) Ist $D(A) \subseteq X$ dicht und $A : D(A) \to Y$ stetig, so ist der Abschluss $\overline{A}$ genau die stetige Fortsetzung von A auf X.

3.4.6 Satz vom abgeschlossenen Operator

Seien X, Y Banachräume, $D(T) \subseteq X$ ein abgeschlossener Teilraum und $T : D(T) \subseteq X \to Y$ ein linearer Operator. Dann ist T stetig genau dann wenn er abgeschlossen ist.

3.4.7 Definition: Projektion

Sei X ein linearer Raum. Ein linearer Operator $\Pi : X \to X$ mit $\Pi^2 = \Pi$ heißt **Projektion**.

3.4.8 Satz: Projektion entlang eines Teilraumes

Sei X ein linearer Raum. Dann gilt:

1. Sind $U, V \subseteq X$ algebraisch komplementäre Teilräume, das heißt $X = U \oplus V$, so definiert $\Pi(u + v) := v$ für $u \in U,\ v \in V$ eine Projektion auf X, genannt **Projektion von X auf V entlang U**. Sie erfüllt $U = \mathcal{N}(\Pi)$ und $V = \mathcal{R}(\Pi)$.
2. Für jede Projektion $\Pi : X \to X$ gilt $X = \mathcal{N}(\Pi) \oplus \mathcal{R}(\Pi)$ und Π ist genau die Projektion von X auf $\mathcal{R}(\Pi)$ entlang $\mathcal{N}(\Pi)$.
3. Für jede Projektion $\Pi : X \to X$ ist auch $\mathrm{Id} - \Pi$ eine Projektion und es gilt $\mathcal{N}(\mathrm{Id} - \Pi) = \mathcal{R}(\Pi)$ und $\mathcal{R}(\mathrm{Id} - \Pi) = \mathcal{N}(\Pi)$.

Insbesondere wird ersichtlich, dass jede Projektion eindeutig durch Ihren Kern und Bild definiert ist.

3.4.9 Satz: Charakterisierung stetiger Projektionen

Sei X ein Banachraum, $U, V \subseteq X$ komplementäre Teilräume und $\Pi : X \to X$ die Projektion von X auf V entlang U. Dann ist $\Pi \in \mathcal{L}(X)$ genau dann wenn U und V abgeschlossen sind.

3.4.10 Definition: Komplementiertheit eines Teilraumes

Ein Teilraum $V \subseteq X$ eines normierten Raumes X heißt **komplementiert** falls es eine stetige Projektion Π von X auf V gibt.

3.4.11 Korollar: Charakterisierung der Komplementiertheit

Sei X ein Banachraum und $V \subseteq X$ ein Teilraum. Dann sind äquivalent:

1. V ist komplementiert.
2. V ist abgeschlossen und besitzt ein abgeschlossenes, algebraisches Komplement.

Gegebenfalls ist dann $X = \mathcal{N}(\Pi) \oplus V$ für eine stetige Projektion Π.

Beispiel: Der abgeschlossene Teilraum $c_0(\mathbb{N})$ von $l_\infty(\mathbb{N})$ ist nicht komplementiert (siehe [1], Satz IV.6.5).

3.4.12 Satz: Hinreichende Bedingung für die Komplementiertheit

Sei X ein normierter Raum und $V \subseteq X$ ein Teilraum endlicher Dimension. Dann existiert eine stetige Projektion $\Pi : X \to V$ von X auf V mit $\|\Pi\| \leq \dim V$ und $X = \mathcal{N}(\Pi) \oplus V$.

Beweis: Folgerung des Fortsetzungssatzes von Hahn-Banach 3.5.6.

3.4.13 Satz: Isomorphie zum Hilbertraum

Ein Banachraum X ist genau dann isomorph zu einem Hilbertraum, falls jeder abgeschlossene Teilraum komplementiert ist.

3.5 Hahn-Banach Sätze

3.5.1 Definition: Sublineares Funktional

Ein Funktional $p : X \to \mathbb{R}$ auf einem $\mathbb{R}$-linearen Raum X heißt **sublinear** falls

1. $p(\lambda x) = \lambda \cdot p(x)$ für alle $\lambda \geq 0,\ x \in X$.
2. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ für alle $x, y \in X$.

Beispiele:

(i) Jedes lineare Funktional $X \to \mathbb{R}$ ist sublinear.

(ii) Für jedes lineare Funktional $\varphi : X \to \mathbb{R}$ ist $|\varphi|$ sublinear.

(iii) Jede Halbnorm auf einem $\mathbb{R}$-linearen Raum ist sublinear.

(iv) Die Abbildung $(x_n)_n \mapsto \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ ist auf dem reellen Raum $X := l_\infty(\mathbb{N})$ sublinear.

3.5.2 Lemma über sublineare Funktionale

Sei X ein reeller Vektorraum und $\mathcal{S}(X)$ die Menge aller sublinearer Funktionale auf X, versehen mit der Halbordnung $q \leq p \;:\Leftrightarrow\; q(x) \leq p(x)\ \forall x \in X$. Dann gilt:

1. $\mathcal{S}(X)$ ist induktiv nach unten geordnet.
2. $p \in \mathcal{S}(X)$ ist ein minimales Element genau dann wenn es linear ist.

3.5.3 Satz: Existenz minimaler sublinearer Funktionale

Sei X ein reeller Vektorraum und $p : X \to \mathbb{R}$ ein sublineares Funktional. Dann existiert eine lineare Abbildung $\varphi : X \to \mathbb{R}$ mit $\varphi \leq p$.

3.5.4 Theorem von Hahn-Banach für reelle Vektorräume

Seien X ein reeller Vektorraum, $p : X \to \mathbb{R}$ ein sublineares Funktional und $Y \subseteq X$ ein Teilraum. Sei $\varphi_0 : Y \to \mathbb{R}$ linear mit $\varphi_0 \leq p\big|_Y$. Dann existiert eine lineare Fortsetzung $\varphi : X \to \mathbb{R}$ von φ_0 mit $\varphi \leq p$.

3.5.5 Theorem von Hahn-Banach für allgemeine Vektorräume

Sei X ein $\mathbb{K}$-linearer Raum, $p : X \to [0, \infty)$ eine Halbnorm auf X und $Y \subseteq X$ ein Teilraum. Sei $\varphi_0 : Y \to \mathbb{K}$ linear mit $|\varphi_0| \leq p\big|_Y$. Dann existiert eine lineare Fortsetzung $\varphi : X \to \mathbb{K}$ von φ_0 mit $|\varphi| \leq p$.

3.5.6 Fortsetzungssatz von Hahn-Banach

Sei X ein $\mathbb{K}$-linearer normierter Raum, $Y \subseteq X$ ein Teilraum und $\varphi_0 : Y \to \mathbb{K}$ ein lineares, stetiges Funktional. Dann existiert eine Fortsetzung $\varphi \in X'$ von φ_0 mit $\|\varphi\|_{X'} = \|\varphi_0\|_{Y'}$.

3.5.7 Korollar des Fortsetzungssatzes

Sei X ein normierter Raum. Dann gilt:

1. Für jedes $0 \neq x \in X$ existiert ein $\varphi \in X'$ mit $\|\varphi\| = 1$ und $\varphi(x) = \|x\|$. Insbesondere ist $\{0\} \subsetneq X'$ insofern $\{0\} \subsetneq X$.
2. Für jedes $x \in X$ gilt $\|x\| = \sup_{\substack{\varphi \in X' \\ \|\varphi\| \leq 1}} |\varphi(x)|$.
3. Falls für ein $x \in X$ und alle $\varphi \in X'$ gilt $\varphi(x) = 0$, so muss $x = 0$ sein.

Beispiele:

(i) Im Falle eines Hilbertraumes $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist (1) automatisch durch $\varphi(\cdot) := \left\langle \frac{x}{\|x\|}, \cdot \right\rangle$ gegeben.

3.5.8 Trennungstheorem für Teilräume [Hahn-Banach]

Sei X ein normierter Raum, $U \subseteq X$ ein Teilraum und $x \in X$ mit $d(x, U) > 0$. Dann existiert ein $\varphi \in X'$ mit den Eigenschaften:

1. $\varphi(u) = 0$ für jedes $u \in U$.
2. $\|\varphi\| = 1$.
3. $\varphi(x) = d(x, U)$.

3.5.9 Satz: Optimierung auf Konvexen Mengen

Sei X ein reeller Vektorraum, $\emptyset \neq A \subseteq X$ eine konvexe Menge und $p : X \to \mathbb{R}$ ein sublineares Funktional. Dann existiert ein lineares Funktional $\varphi : X \to \mathbb{R}$ mit $\varphi \leq p$ und $\inf_{x \in A} p(x) = \inf_{x \in A} \varphi(x)$.

3.5.10 Trennungstheorem für konvexe Mengen [Hahn-Banach]

Sei X ein reeller normierter Raum und $\emptyset \neq A, B \subseteq X$ konvexe Mengen mit $d(A, B) > 0$. Dann existiert ein $\varphi \in X'$ mit $\sup_{a \in A} \varphi(a) < \inf_{b \in B} \varphi(b)$.

3.6 Duale Operatoren

3.6.1 Definition: Annihilatorräume

Sei X ein normierter Raum.

1. Zu Teilraum $U \subseteq X$ schreibt man $U^\perp := \{a \in X' : \langle u, a \rangle = 0 \ \forall u \in U\}$.
2. Zu Teilraum $V \subseteq X'$ schreibt man $V_\perp := \{x \in X : \langle x, v \rangle = 0 \ \forall v \in V\}$.

Man nennt $U^\perp$ bzw. $V_\perp$ **Annihilatorräume**.

Bemerkungen:

(i) Sowohl $U^\perp$ als auch $V_\perp$ sind abgeschlossene Teilräume von X' bzw. X.

(ii) Es gilt stets $(U^\perp)_\perp = \overline{U}$ und $(V_\perp)^\perp = \overline{V}$.

3.6.2 Definition: Schwache und schwache* Topologie

Die **schwache Topologie** auf einem normierten Raum X ist die kleinste Topologie bzgl. der alle $\varphi \in X'$ noch stetig sind, wird also erzeugt durch die Subbasis $\{\varphi^{-1}(U) : \varphi \in X',\ U \subseteq \mathbb{R} \text{ offen}\}$. Die **schwache* Topologie** auf X' ist die kleinste Topologie bzgl. der alle Bidualformen aus $\mathcal{J}_X(X) \subseteq X''$ noch stetig sind, wobei $\mathcal{J}_X : X \hookrightarrow X''$ die kanonische Einbettung sei.

Bemerkungen:

(i) Die schwache Topologie bzw. die schwache* Topologie ist gröber als die von der Norm erzeugten (**starken**) Topologie auf X bzw. X'.

(ii) Ausgestattet mit der schwachen Topologie ist X ein topologischer Vektorraum.

(iii) Ausgestattet mit der schwachen* Topologie ist X' ein topologischer Vektorraum.

(iv) Die schwache Topologie und schwache* Topologie sind beide Hausdorff.

3.6.3 Definition: Schwache und schwache* Konvergenz

Sei X ein normierter Raum. Eine Folge $(x_n)_n \subseteq X$ konvergiert **schwach** gegen $x \in X$ falls $\varphi(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(x)$ für jedes $\varphi \in X'$. Man schreibt in dem Fall $x_n \underset{\text{w}}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} x$.

Eine Folge $(\varphi_n)_n \subseteq X'$ konvergiert **schwach*** gegen $\varphi \in X'$ falls $\varphi_n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(x)$ für jedes $x \in X$. Man schreibt in dem Fall $\varphi_n \underset{\text{w}*}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} \varphi$.

Bemerkungen:

(i) Jede Folge besitzt höchstens einen schwachen bzw. schwachen* Grenzwert.

(ii) Die Konvergenz einer Folge im normierten Raum (bzw. Dualraum) impliziert ihre schwache (bzw. schwache*) Konvergenz gegen den gleichen Grenzwert. Die Umkehrung ist im allgemeinen falsch!

(iii) Die schwache bzw. schwache* Konvergenz entspricht der Konvergenz bzgl. der schwachen Topologie auf X bzw. schwachen* Topologie auf X'.

3.6.4 Lemma: Eindeutigkeit von Dualen

Seien X, Y normierte Räume, $D(A) \subseteq X$ ein Teilraum und $A : D(A) \to Y$ linear. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) D ist dicht in X.

(ii) Für jedes $\psi \in Y'$ existiert höchstens ein $\varphi_\psi \in X'$ mit $\langle Ax, \psi \rangle = \langle x, \varphi_\psi \rangle \ \forall x \in D(A)$.

3.6.5 Definition: Dualer Operator

Seien X, Y normierte Räume, $D(A) \subseteq X$ ein dichter Teilraum und $A : D(A) \to Y$ linear. Dann setzt man

$$D(A') = \{\psi \in Y' : \exists\ \varphi_\psi \in X' : \forall x \in D(A) : \langle Ax, \psi \rangle = \langle x, \varphi_\psi \rangle\} \subseteq Y' \tag{3.6}$$

und nennt den Operator

$$A' : D(A') \to X' \quad , \quad A' : \psi \mapsto A'\psi := \varphi_\psi \tag{3.7}$$

dualen Operator zu A.

3.6.6 Satz: Der duale Operator als linearer Operator

Seien X, Y normierte Räume, $D(A) \subseteq X$ ein dichter Teilraum und $A : D(A) \to Y$ linear.

1. Der duale Operator $A' : D(A') \subseteq Y' \to X'$ ist linear und abgeschlossen.
2. Falls $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, so ist $D(A') = Y'$ und $A' \in \mathcal{L}(Y', X')$ mit $\|A'\| = \|A\|$. In dem Fall nimmt A' die Form $A' : \psi \mapsto \psi \circ A$ an.

Bemerkungen:

(i) Der Begriff des dualen Operators A' steht im engen Zusammenhang zu dem des adjungierten Operators $A^\dagger$ in Hilberträumen. Seien $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ Hilberträume und $\mathscr{R}_{\mathcal{H}_i} : \mathcal{H}_i \to \mathcal{H}_i'$ für $i \in \{1, 2\}$ der isometrische Isomorphismus definiert durch $x \mapsto \mathscr{R}_{\mathcal{H}_i} x := \langle x, \cdot \rangle$. Dann gilt für jeden Operator $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ mit dualem $A' \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2', \mathcal{H}_1')$ und adjungiertem $A^\dagger \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ die Beziehung $A^\dagger = \mathscr{R}_{\mathcal{H}_1}^{-1} \circ A' \circ \mathscr{R}_{\mathcal{H}_2}$, das heißt das Diagram

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}_2 \arrow[r, "A^\dagger"] \arrow[d, "\mathscr{R}_{\mathcal{H}_2}"'] & \mathcal{H}_1 \arrow[d, "\mathscr{R}_{\mathcal{H}_1}"] \\
\mathcal{H}_2' \arrow[r, "A'"'] & \mathcal{H}_1'
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

3.6.7 Satz: Duale Operatoren und Annihilatorräume

Seien X, Y normierte Räume und $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ mit dualem Operator $A' \in \mathcal{L}(Y', X')$. Dann gilt $\mathcal{N}(A') = \mathcal{R}(A)^\perp$ und $\mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(A')_\perp$.

3.6.8 Satz vom offenen Graphen

Seien X, Y Banachräume und $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ mit dualem Operator $A' \in \mathcal{L}(Y', X')$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $\mathcal{R}(A)$ ist abgeschlossen in Y.
2. $\mathcal{R}(A) = \mathcal{N}(A')_\perp$.
3. $\mathcal{R}(A')$ ist abgeschlossen in X'.
4. $\mathcal{R}(A') = \mathcal{N}(A)^\perp$.

3.6.9 Definition: Bidualraum und bidualer Operator

Seien X, Y normierte Räume. Dann heißt $X'' := (X')'$ **Bidualraum** von X. Ist $A : D(A) \subseteq X \to Y$ ein linearer Operator und $D(A')$ dicht in Y', so heißt $A'' := (A')' : D(A'') \subseteq X'' \to Y''$ **bidualer Operator** zu A.

3.6.10 Lemma: Die kanonische Einbettung

Sei X ein normierter Raum. Die Abbildung $\mathcal{J}_X : X \to X''$ gegeben durch

$$\langle \varphi, \mathcal{J}_X x \rangle := \langle x, \varphi \rangle \quad , \quad x \in X, \ \varphi \in X' \tag{3.8}$$

ist linear, isometrisch und heißt **kanonische Einbettung** von X in seinen Bidualraum X''. Falls X vollständig ist, so ist $\mathcal{J}_X(X)$ ein abgeschlossener Teilraum von X''.

3.6.11 Definition: Reflexiver Raum

Ein normierter Raum X heißt **reflexiv** falls seine kanonische Einbettung $\mathcal{J}_X : X \hookrightarrow X''$ surjektiv ist.

Beispiele:

(i) Für beliebigen Maßraum $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ und $1 < p < \infty$ ist $L_p(\mu)$ reflexiv.

(ii) Jeder Hilbertraum ist reflexiv.

(iii) Endlich-dimensionale Vektorräume sind reflexiv.

(iv) Der Raum $c_0(\mathbb{N}) \subseteq l_\infty(\mathbb{N})$ ist nicht reflexiv. Tatsächlich ist $(c_0(\mathbb{N}))' \cong l_1(\mathbb{N})$ und daher $(c_0(\mathbb{N}))'' \cong (l_1(\mathbb{N}))' \cong l_\infty(\mathbb{N})$.

3.6.12 Satz über biduale Operatoren und die kanonische Einbettung

Seien X, Y normierte Räume und $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dann gilt für den bidualen Operator $A'' : X'' \to Y''$ die Identität

$$A''(\mathcal{J}_X(x)) = \mathcal{J}_Y(Ax) \tag{3.9}$$

für alle $x \in X$, das heißt das Diagram

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\mathcal{J}_X"] \arrow[d, "A"'] & X'' \arrow[d, "A''"] \\
Y \arrow[r, "\mathcal{J}_Y"'] & Y''
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

3.6.13 Satz: Kompaktheit des dualen Operators

Seien X, Y normierte Räume und $A \in \mathcal{K}(X, Y)$ ein kompakter Operator. Dann ist auch $A' \in \mathcal{K}(Y', X')$.

3.6.14 Theorem: Kompaktheit des dualen Operators [Schauder]

Seien X ein normierter Raum, Y ein Banachraum und $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dann gilt $A \in \mathcal{K}(X, Y)$ genau dann wenn $A' \in \mathcal{K}(Y', X')$.

Beispiele:

(i) Sind $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ Hilberträume und $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ mit dualem $A' \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2', \mathcal{H}_1')$ und adjungiertem $A^\dagger \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$, so ist A kompakt genau dann wenn A' kompakt ist und dies nach Bemerkung 3.6.6(i) genau dann wenn $A^\dagger$ kompakt ist.

3.6.15 Satz: Das Spektrum des dualen Operators

Sei X ein Banachraum und $A \in \mathcal{L}(X)$ mit dualem Operator $A' \in \mathcal{L}(A')$. Dann gilt $\sigma(A) = \sigma(A')$.

Bemerkungen:

(i) Ist X ein Hilbertraum und $A \in \mathcal{L}(X)$ mit adjungiertem $A^\dagger$, so gilt ähnlich $\sigma(A^\dagger) = \{\lambda^* : \lambda \in \sigma(A)\}$.

4 Die Theorie von Riez, Schauder und Fredholm

4.1 Kompakte Störungen invertierbarer Operatoren

Im Vordergrund dieses Abschnittes stehen lineare Operatoren auf normierten Räumen der Form $T - K$ mit K kompakt und $T \in \mathcal{L}(X)$ bijektiv, im folgenden *kompakte Störung* von T genannt.

4.1.1 Satz über Kern und Bild kompakter Störungen

Sei X ein normierter Raum, $K \in \mathcal{K}(X)$ und $T \in \mathcal{L}(X)$ mit $T^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Dann gelten:

1. $\dim \mathcal{N}(T - K) < \infty$.
2. Das Bild $\mathcal{R}(T - K)$ ist abgeschlossen.

4.1.2 Lemma: Potenzen kompakter Störungen

Sei X ein normierter Raum, $K \in \mathcal{K}(X)$ kompakt, $T \in \mathcal{L}(X)$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $(T - K)^n$ eine kompakte Störung des Operators T^n.

Beweis: Der Fall $m = 0$ ist klar. Andernfalls ist

$$(T - K)^n = \sum_{\mathbf{s} \in \{0,1\}^n} \prod_{k=1}^{n} T^{1-s_k}(-K)^{s_k} = T^n + \sum_{\mathbf{s} \in \{0,1\}^n \setminus 0} \prod_{k=1}^{n} T^{1-s_k}(-K)^{s_k} \tag{4.1}$$

wobei die rechte Summe nur aus kompakten Operatoren besteht.

□

4.1.3 Korollar über Kern und Bild iterierter kompakter Störungen

Sei X ein normierter Raum, $K \in \mathcal{K}(X)$ kompakt und $T \in \mathcal{L}(X)$ mit $T^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Dann gelten:

1. $\dim \mathcal{N}((T - K)^n) < \infty$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$.
2. $\mathcal{R}((T - K)^n)$ ist für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ abgeschlossen.

4.1.4 Lemma: Monotonie von Kernen und Bildern

Sei X ein linearer Raum und $A : X \to X$ ein linearer Operator.

1. Es gilt $\{0\} = \mathcal{N}(A^0) \subseteq \mathcal{N}(A^1) \subseteq \ldots$
2. Es gilt $X = \mathcal{R}(A^0) \supseteq \mathcal{R}(A^1) \supseteq \ldots$
3. Falls für irgendein $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\mathcal{N}(A^n) = \mathcal{N}(A^{n+1})$, so gilt $\mathcal{N}(A^n) = \mathcal{N}(A^m)$ für alle $m \geq n$.
4. Falls für irgendein $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\mathcal{R}(A^n) = \mathcal{R}(A^{n+1})$, so gilt $\mathcal{R}(A^n) = \mathcal{R}(A^m)$ für alle $m \geq n$.
5. Falls für irgendein $n \in \mathbb{N}_0$ sowohl $\mathcal{N}(A^n) = \mathcal{N}(A^{n+1})$ als auch $\mathcal{R}(A^n) = \mathcal{R}(A^{n+1})$ gilt, so ist $X = \mathcal{N}(A^n) \oplus \mathcal{R}(A^n)$.

Beweis: Die Aussagen (1) bis (4) sind klar. Wir zeigen nun Aussage (5). Sei einerseits $w \in X$ beliebig, dann ist $A^n w \in \mathcal{R}(A^n) = \mathcal{R}(A^{2n})$, das heißt $A^n w = A^{2n} y$ für ein $y \in X$. Wir setzen $z := A^n y$, dann ist $w = z + (w - z)$ und $A^n(w - z) = A^{2n} y - A^{2n} y = 0$. Folglich ist $X = \mathcal{N}(A^n) + \mathcal{R}(A^n)$. Sei nun anderseits $y \in \mathcal{N}(A^n) \cap \mathcal{R}(A^n)$, das heißt $A^n y = 0$ und $y = A^n x$ für irgendein $x \in X$. Dann ist $A^{2n} x = A^n y = 0$ und daher nach Voraussetzung $A^n x = 0$, sprich $y = 0$.

□

4.1.5 Theorem: Existenz der Riesz-Zahl für kompakte Störungen der Identität

Sei X ein normierter Raum, $K \in \mathcal{K}(X)$ kompakt und $A := \mathrm{Id} - K$ die zugehörige Störung der Identität. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl $r \in \mathbb{N}_0$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\{0\} = \mathcal{N}(A^0) \subsetneq \mathcal{N}(A^1) \subsetneq .. \subsetneq \mathcal{N}(A^r) = \mathcal{N}(A^{r+1}) = ...$
2. $X = \mathcal{R}(A^0) \supsetneq \mathcal{R}(A^1) \supsetneq .. \supsetneq \mathcal{R}(A^r) = \mathcal{R}(A^{r+1}) = ...$

Diese Zahl r heißt **Riesz-Zahl** des kompakten Operators $K \in \mathcal{K}(X)$. Nach Lemma 4.1.4(5) erfüllt sie insbesondere $X = \mathcal{N}(A^r) \oplus \mathcal{R}(A^r)$.

4.1.6 Korollar über kompakte Störungen der Identität

Sei X ein normierter Raum und $K \in \mathcal{K}(X)$ kompakt mit Riesz-Zahl $r \in \mathbb{N}_0$ und $A := \mathrm{Id} - K$ die zugehörige Störung der Identität. Dann gelten:

(i) Die Einschränkung $A\big|_{\mathcal{N}(A^r)} : \mathcal{N}(A^r) \to \mathcal{N}(A^r)$ ist nilpotent.

(ii) Die Einschränkung $A\big|_{\mathcal{R}(A^r)} : \mathcal{R}(A^r) \to \mathcal{R}(A^r)$ ist ein isomorphismus.

Man erhält somit eine Zerlegung $X = \mathcal{N}(A^r) \oplus \mathcal{R}(A^r)$ des Raumes in zwei A-invariante Unterräume, auf denen A jeweils nilpotent und isomorph ist.

4.1.7 Satz über die Invertierbarkeit kompakter Störungen

Sei X ein normierter Raum, $K \in \mathcal{K}(X)$ kompakt und $T \in \mathcal{L}(X)$ mit $T^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Dann ist die Störung $(T - K)$ injektiv genau dann wenn sie surjektiv ist. Gegebenfalls ist dann $(T - K)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.

Interpretation: Das Problem $(T - K)x \overset{!}{=} y$ in der unbekannten Variablen $x \in X$ kann genau einem der beiden Fälle zugeordnet werden:

- Die Lösung $x = x(y)$ existiert ein-eindeutig für alle $y \in X$ und hängt stetig von y ab.
- Es existieren $y \in X$ für die es keine Lösung des Problems $(T - K)x = y$ gibt. Für alle anderen $y \in X$ gibt es unendlich viele Lösungen. Ist $x_s \in X$ eine spezielle Lösung des Problems und $\mathcal{N}(T - K) = \mathrm{span}\{x_1, .., x_n\}$ (beachte 4.1.1(1)), so nehmen alle anderen Lösungen die Form $x = x_s + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$ mit $\alpha_j \in \mathbb{K}$ an.

4.1.8 Lemma über Projektionen und kompakte Störungen der Identität

Sei X ein normierter Raum, $K \in \mathcal{K}(X)$ mit Riesz-Zahl $r \in \mathbb{N}_0$, dazu die Projektion P von X auf $\mathcal{N}((\mathrm{Id} - K)^r)$ entlang $\mathcal{R}((\mathrm{Id} - K)^r)$. Dann gilt:

1. $P \in \mathcal{K}(X, \mathcal{N}((\mathrm{Id} - K)^r))$.
2. $\mathrm{Id} - (K + P) : X \to X$ ist eine Bijektion und es gilt $[\mathrm{Id} - (K + P)]^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.

4.1.9 Satz über das Spektrum kompakter Operatoren

Sei X ein normierter Raum und $K \in \mathcal{K}(X)$ kompakt. Dann gilt:

1. Falls X unendlich-dimensional ist, so muss $0 \in \sigma(K)$
2. $\sigma(K) \setminus \{0\} = \sigma_p(K) \setminus \{0\} = \sigma_{p,0}(K) \setminus \{0\}$. Insbesondere ist für $\lambda \neq 0$ der Operator $(\lambda - K)$ injektiv genau dann wenn er surjektiv ist, wobei dann gilt $(\lambda - K)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.
3. $\sigma(K) \setminus \{0\}$ besteht aus höchstens abzählbar unendlich vielen Eigenwerten endlicher Vielfachheit, die sich nur in 0 häufen können.

4.1.10 Definition: Fredholm Operator

Ein beschränkter, linearer Operator $A : X \to Y$ zwischen zwei normierten Räumen X, Y heißt **Fredholmsch** falls $\dim \mathcal{N}(A) < \infty$ und $\operatorname{codim} \mathcal{R}(A) < \infty$. Die Differenz

$$\operatorname{ind} A := \dim \mathcal{N}(A) - \operatorname{codim} \mathcal{R}(A) \tag{4.2}$$

heißt **Index** des Fredholmschen Operators A.

Interpretation: Die Endlichkeit der Dimension des Nullraumes und Kodimension des Bildes von A bringt eine *fast-Invertierbarkeit* des Operators zum Ausdruck. Im Fall $\operatorname{ind} A > 0$ ist A nicht-injektiv, im Fall $\operatorname{ind} A < 0$ ist A nicht surjektiv. Ist A bijektiv, so ist $\operatorname{ind} A = 0$.

4.1.11 Satz: Kompakte Störungen als Fredholm Operatoren

Sei X ein normierter Raum, $K \in \mathcal{K}(X)$ kompakt und $T \in \mathcal{L}(X)$ mit $T^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Dann ist $(T - K)$ Fredholmsch mit Index $\operatorname{ind}(T - K) = 0$, das heißt $\dim \mathcal{N}(T - K) = \operatorname{codim} \mathcal{R}(T - K) < \infty$.

4.2 Die Fredholmtheorie in Dualsystemen

4.2.1 Definition: Bilinearform und Dualsystem

Seien $X, X^\dagger$ $\mathbb{K}$-lineare Räume. Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X^\dagger \to \mathbb{K}$ heißt **Bilinearform** falls für alle $x, y \in X$, $\varphi, \psi \in X^\dagger$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt $\langle \lambda x + y, \varphi \rangle = \lambda \langle x, \varphi \rangle + \langle y, \varphi \rangle$ und $\langle x, \lambda\varphi + \psi \rangle = \lambda \langle x, \varphi \rangle + \langle x, \psi \rangle$. Sie heißt **nicht-entartet** falls $\langle \cdot, \varphi \rangle \neq 0$ solange $\varphi \neq 0$ und $\langle x, \cdot \rangle \neq 0$ solange $x \neq 0$. Das Tupel $(X, X^\dagger, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ heißt **Dualsystem** falls $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine nicht-entartete Bilinearform auf $X \times X^\dagger$ ist.

4.2.2 Definition: Konjugierte Operatoren

Seien $(X, X^\dagger, \langle \cdot, \cdot \rangle_X)$ und $(Y, Y^\dagger, \langle \cdot, \cdot \rangle_Y)$ Dualsysteme. Zwei Operatoren $A : X \to Y$ und $B : Y^\dagger \to X^\dagger$ heißen zu einander **konjugiert**, falls $\langle Ax, \varphi \rangle = \langle x, B\varphi \rangle$ für alle $x \in X, \varphi \in Y^\dagger$ gilt.

Beachte:

(i) Jeder lineare Operator $A : X \to Y$ besitzt höchstens einen konjugieren Operator, geschrieben $A^\dagger$.

(ii) Der konjugierte $A^\dagger$ existiert nicht immer. Sind z.B. $X := X^\dagger := Y := Y^\dagger := \mathcal{C}[0, 1]$ mit $\langle x, \varphi \rangle := \int_0^1 x(t) \cdot \varphi(t)\, dt$, so besitzt $A : X \to Y$ definiert durch $A : x \mapsto x(1)$ keinen konjugierten Operator.

Beispiele:

(i) Ist X ein normierter Raum und $X^\dagger := X'$, so macht die nicht-entartete Bilinearform $\langle x, \varphi \rangle := \varphi(x)$ aus $(X, X^\dagger)$ ein Dualsystem. Jeder lineare, stetige Operator $A : X \to Y$ zwischen zwei normierten Räumen X, Y ist konjugiert zu seinem dualen Operator $A' \in \mathcal{L}(Y', X')$.

(ii) Ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und sind $X := X^\dagger := \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, so macht $\langle \varphi, \psi \rangle := \int\limits_\Omega \varphi(x) \cdot \psi(x)\, dx$ aus $(X, X^\dagger)$ ein Dualsystem. Ist $\varkappa \in \mathcal{C}(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$, so ist der Operator $K : X \to X$ definiert durch

$$(Kf)(x) := \int\limits_\Omega \varkappa(x, y) f(y)\, dy \quad , \quad f \in X \tag{4.3}$$

kompakt. Er besitzt den konjugierten Operator $K^\dagger : X^\dagger \to X^\dagger$, gegeben auf ähnlicher Weise durch den Integralkern $\varkappa^\dagger(x, y) := \varkappa(y, x)$.

(iii) Ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und sind $X := X^\dagger := L_2(\Omega)$, so macht $\langle \varphi, \psi \rangle := \int\limits_\Omega \varphi(x) \cdot \psi(x)\, dx$ aus $(X, X^\dagger)$ ein Dualsystem. Ist $\varkappa \in L_2(\Omega \times \Omega)$, so ist der Operator $K : X \to X$ definiert durch

$$(Kf)(x) := \int\limits_\Omega \varkappa(x, y) f(y)\, dy \quad , \quad f \in X \tag{4.4}$$

kompakt. Er besitzt den konjugierten Operator $K^\dagger : X^\dagger \to X^\dagger$, gegeben auf ähnlicher Weise durch den Integralkern $\varkappa^\dagger(x, y) := \varkappa(y, x)$.

(iv) Ist $(\mathcal{H}_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}_1})$ ein Hilbertraum, so ist $(X, X^\dagger, \langle\cdot,\cdot\rangle) := (\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}_1})$ ein Dualsystem. Setzt man zusätzlich $(Y, Y^\dagger, \langle\cdot,\cdot\rangle) := (\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}_2})$ für einen weiteren Hilbertraum $(\mathcal{H}_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}_2})$, so ist jeder lineare Operator $A : X = \mathcal{H}_1 \to Y = \mathcal{H}_2$ konjugiert zu seinem adjungiertem $A^\dagger : \mathcal{H}_2 = Y^\dagger \to \mathcal{H}_1 = X^\dagger$ (falls auf ganz $\mathcal{H}_2$ definiert).

4.2.3 Definition: Biorthogonales System

Sei $(X, X^\dagger, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Dualsystem. Eine Familie $\{\varphi_i\}_{i\in I} \subseteq X^\dagger$ heißt **biorthogonal** zu $\{x_i\}_{i\in I} \subseteq X$, falls gilt $\langle x_i, \varphi_j\rangle = \delta_{ij}$ für alle $i, j \in I$.

Bemerkungen:

(i) Ist $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ biorthogonal zu $\{x_i\}_{i\in I}$, so sind sowohl $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ als auch $\{x_i\}_{i\in I}$ linear unabhängig.

4.2.4 Satz: Existenz biorthogonaler Systeme

Sei $(X, X^\dagger, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Dualsystem und $X_0 := \{x_1, .., x_n\} \subseteq X$ linear unabhängig. Dann existiert ein zu X_0 biorthogonales System $X_0^\dagger \subseteq X^\dagger$.

4.2.5 Definition: Annihilatorräume in Dualsystemen

Sei $(X, X^\dagger, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Dualsystem.

1. Zu Teilraum $U \subseteq X$ schreibt man $U^\perp := \big\{\varphi \in X^\dagger : \langle u, \varphi\rangle = 0\ \forall u \in U\big\}$.
2. Zu Teilraum $V \subseteq X^\dagger$ schreibt man $V_\perp := \{x \in X : \langle x, \psi\rangle = 0\ \forall \psi \in V\}$.

Man nennt $U^\perp$ bzw. $V_\perp$ **Annihilatorräume** zu U und V. Der Teilraum U bzw. V heißt **orthogonalabgeschlossen** falls $(U^\perp)_\perp = U$ bzw. $(V_\perp)^\perp = V$.

Beispiele:

(i) Es gilt stets $\{0\}^\perp = X^\dagger$, $\{0\}_\perp = X$, $X^\perp = \{0\}$ und $(X^\dagger)_\perp = \{0\}$.

(ii) Sei X ein normierter Raum und $X^\dagger := X'$ wie in Beispiel 4.2.2(i). Nach Bemerkung 3.6.1(ii) ist $U \subseteq X$ bzw. $V \subseteq X'$ genau dann orthogonalabgeschlossen wenn U bzw. V topologisch abgeschlossenen ist.

(iii) Ist $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}})$ ein Hilbertraum und $(X, X^\dagger, \langle\cdot,\cdot\rangle) := (\mathcal{H}, \mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}})$, so sind für $U \subseteq X$ bzw. $V \subseteq X^\dagger$ die Annihilatorräume $U^\perp$ bzw. $V_\perp$ genau deren orthogonale Komplemente in $\mathcal{H}$.

4.2.6 Satz: Charakterisierung der Orthogonalabgeschlossenheit

Sei $(X, X^\dagger, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Dualsystem und $U \subseteq X$ ein Teilraum. Dann ist U orthogonalabgeschlossen genau dann wenn es zu jedem $x \in X \setminus U$ ein $x^\dagger \in U^\perp$ gibt mit $\big\langle x, x^\dagger\big\rangle \neq 0$.

4.2.7 Satz über konjugierte Operatoren und Annihilatorräume

Seien $(X, X^\dagger, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ und $(Y, Y^\dagger, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ zwei Dualsysteme und $A : X \to Y$, $A^\dagger : Y^\dagger \to X^\dagger$ konjugierte, lineare Operatoren. Dann gilt:

1. $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{N}(A^\dagger)_\perp$ und $\mathcal{R}(A^\dagger) \subseteq \mathcal{N}(A)^\perp$.
2. $\mathcal{R}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^\dagger)$ und $\mathcal{R}(A^\dagger)_\perp = \mathcal{N}(A)$.

Beispiele:

(i) Anwendung von Satz 4.2.7(2) auf lineare, beschränkte Operatoren $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ zwischen zwei normierten Räumen X, Y (vgl. Beispiel 4.2.2(i)) mit dualem $A' \in \mathcal{L}(Y', X')$, führt auf die schon seit Satz 3.6.7 bekannte Tatsache dass $\mathcal{R}(A)^\perp = \mathcal{N}(A')$ und $\mathcal{R}(A')_\perp = \mathcal{N}(A)$.

(ii) Anwendung von Satz 4.2.7(2) auf lineare Operatoren $A : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ zwischen zwei Hilberträumen $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ (vgl. Beispiele 4.2.2(iv) und 4.2.5(iii)) mit adjungiertem $A^\dagger : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ (falls auf ganz $\mathcal{H}_2$ definiert), führt auf die bekannte Tatsache dass $\mathcal{R}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^\dagger)$ und $\mathcal{R}(A^\dagger)^\perp = \mathcal{N}(A)$, wobei $^\perp$ das Orthogonalkomplement in $\mathcal{H}_2$ sei.

4.2.8 Definition: Normal auflösbarer Operator

Seien $(X, X^\dagger, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ und $(Y, Y^\dagger, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Dualsysteme und $A : X \to Y$ linear mit konjugiertem $A^\dagger : Y^\dagger \to X^\dagger$. Dann heißt A **$Y^\dagger$-normal auflösbar** falls $\mathcal{R}(A) = \mathcal{N}(A^\dagger)_\perp$ gilt.

Bemerkungen:

(i) Nach Satz 4.2.7(2) ist A genau dann $Y^\dagger$-normal auflösbar wenn das Bild $\mathcal{R}(A) \subseteq Y$ orthogonalabgeschlossen ist.

(ii) Seien X, Y normierte Räume und $X^\dagger := X'$, $Y^\dagger := Y'$ wie in Beispiel 4.2.2(i). Dann ist $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ nach Bemerkung (i) und Beispiel 4.2.5(ii) genau dann Y'-normal auflösbar wenn $\mathcal{R}(A)$ in Y topologisch abgeschlossen ist.

(iii) Ist nun speziell X normiert, $K \in \mathcal{K}(X)$ kompakt und $T \in \mathcal{L}(X)$ mit $T^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, so ist nach Satz 4.1.1 das Bild $\mathcal{R}(T - K)$ abgeschlossen. Der Operator $(T - K) : X \to X$ ist daher X'-normal auflösbar.

4.2.9 Satz: Charakterisierung der normalen Auflösbarkeit

Seien $(X, X^\dagger, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ und $(Y, Y^\dagger, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Dualsysteme und $A : X \to Y$ linear mit konjugiertem $A^\dagger : Y^\dagger \to X^\dagger$. Dann ist A normal auflösbar genau dann wenn für jedes $y \notin \mathcal{R}(A)$ ein $\psi \in \mathcal{R}(A)^\perp \subseteq Y^\dagger$ mit $\langle y, \psi\rangle \neq 0$ existiert.

Erläuterung: Lediglich eine Anwendung von Satz 4.2.6 und Bemerkung 4.2.8(i).

4.2.10 Satz über Kerne konjugierter, kompakter Operatoren

Seien $X, X^\dagger$ normierte Räume und $(X, X^\dagger, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Dualsystem. Sei $K \in \mathcal{K}(X)$ mit konjugiertem $K^\dagger \in \mathcal{K}(X^\dagger)$. Dann gilt:

$$\dim \mathcal{N}(\mathrm{Id} - K) = \dim \mathcal{N}(\mathrm{Id} - K^\dagger) < \infty. \tag{4.5}$$

4.2.11 Theorem: Die Fredholmsche Alternative

Seien $X, X^\dagger$ normierte Räume, $(X, X^\dagger, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Dualsystem und $K \in \mathcal{K}(X)$ mit konjugiertem $K^\dagger \in \mathcal{K}(X^\dagger)$. Dann gilt:

1. $(\mathrm{Id} - K)$ ist genau dann injektiv wenn er surjektiv ist, dies genau dann wenn $(\mathrm{Id} - K^\dagger)$ injektiv ist und dies genau dann wenn $(\mathrm{Id} - K^\dagger)$ surjektiv ist. In dem Falle gilt $(\mathrm{Id} - K)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ und $(\mathrm{Id} - K^\dagger)^{-1} \in \mathcal{L}(X^\dagger)$.
2. $(\mathrm{Id} - K)$ ist $X^\dagger$-normal auflösbar und $(\mathrm{Id} - K^\dagger)$ X-normal auflösbar, das heißt $\mathcal{R}(\mathrm{Id} - K) = \mathcal{N}(\mathrm{Id} - K^\dagger)_\perp$ und $\mathcal{R}(\mathrm{Id} - K^\dagger) = \mathcal{N}(\mathrm{Id} - K)^\perp$.

Beweis:

1. Die Äquivalenz der Injektivität von $(\mathrm{Id} - K)$ und $(\mathrm{Id} - K^\dagger)$ folgt aus Satz 4.2.10. Die Äquivalenz deren Injektivität mit deren Surjektivität sowie die Stetigkeit deren Inversen ist nichts anderes als Satz 4.1.7 über kompakte Störungen.
2. Der Fall $\dim \mathcal{N}(\mathrm{Id} - K) = 0$ bzw. $\dim \mathcal{N}(\mathrm{Id} - K^\dagger) = 0$ ist nach Aussage (1) trivial, so dass wir annehmen $\dim \mathcal{N}(\mathrm{Id} - K) = \dim \mathcal{N}(\mathrm{Id} - K^\dagger) = n \in \mathbb{N}$ (vgl. Satz 4.2.10). Es genügt zu zeigen dass $\mathrm{Id} - K$ normal auflösbar ist, die normale Auflösbarkeit von $\mathrm{Id} - K^\dagger$ erfolgt analog. Nach Satz 4.2.7(1) genügt es zu zeigen dass $\mathcal{N}(\mathrm{Id} - K^\dagger)_\perp \subseteq \mathcal{R}(\mathrm{Id} - K)$.

   Wir wählen eine Basis $\{x_1, .., x_n\}$ in $\mathcal{N}(\mathrm{Id} - K)$ und eine Basis $\{\psi_1, .., \psi_n\}$ in $\mathcal{N}(\mathrm{Id} - K^\dagger)$. Nach Satz 4.2.4 können wir dazu jeweils ein Biorthogonalsystem $\{\varphi_1, .., \varphi_n\} \subseteq X^\dagger$ und $\{y_1, .., y_n\} \subseteq X$ wählen, sprich so dass

$\langle x_i, \varphi_j \rangle = \delta_{ij}$ und $\langle y_i, \psi_j \rangle = \delta_{ij}$ für alle $i, j \in \{1, .., n\}$. Wir betrachten den linearen Operator $T : X \to X$ definiert durch

$$Tx := \sum_{i=1}^{n} \langle x, \varphi_i \rangle \cdot y_i. \tag{4.6}$$

Behauptung: $\mathrm{Id} - K + T$ ist injektiv.

Beweis: Nehme an dass $x \in \mathcal{N}(\mathrm{Id} - K + T)$, dann gilt

$$0 = \langle (\mathrm{Id} - K + T)x, \psi_j \rangle = \langle x, \underbrace{(\mathrm{Id} - K^\dagger)\psi_j}_{0} \rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle x, \varphi_i \rangle \cdot \underbrace{\langle y_i, \psi_j \rangle}_{\delta_{ij}} = \langle x, \varphi_j \rangle \tag{4.7}$$

für alle j, sprich $Tx = 0$. Demnach muss $x \in \mathcal{N}(\mathrm{Id} - K)$ sein, sprich $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ für irgendwelche $\alpha_i \in \mathbb{K}$. Zusammen mit (4.7) impliziert dies

$$0 = \langle x, \varphi_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underbrace{\langle x_i, \varphi_j \rangle}_{\delta_{ij}} = \alpha_j \tag{4.8}$$

für jedes j, das heißt $x = 0$.

Behauptung: $\mathrm{Id} - K + T$ ist surjektiv.

Beweis: Es sei $r \in \mathbb{N}_0$ die Riesz-Zahl von K und P die Projektion von X auf $\mathcal{N}((\mathrm{Id} - K)^r)$ entlang $\mathcal{R}((\mathrm{Id} - K)^r)$. Wir setzen $V := \mathcal{R}(T + P) \subseteq X$. Da sowohl $\dim \mathcal{R}(P) < \infty$ als auch $\dim \mathcal{R}(T) < \infty$ ist auch $\dim V < \infty$. Nach Satz 4.1.8(2) ist $\mathrm{Id} - (K + P)$ bijektiv. Wir setzen

$$S := \mathrm{Id} + (T + P)(\mathrm{Id} - (K + P))^{-1} \tag{4.9}$$

und zeigen dass $S : V \to V$ bijektiv ist. Wegen $\dim V < \infty$ genügt es zu zeigen dass S injektiv ist. Tatsächlich ist

$$S = (\mathrm{Id} - (K + P) + T + P)(\mathrm{Id} - (K + P))^{-1} = \underbrace{(\mathrm{Id} - K + T)}_{\text{injektiv}} \underbrace{(\mathrm{Id} - (K + P))^{-1}}_{\text{injektiv}} \tag{4.10}$$

als Verkettung zweier injektiver Operatoren selbst injektiv.
Es sei nun $y \in X$. Wir suchen ein $\xi \in X$ mit $(\mathrm{Id} - K + T)\xi = y$. Beachte dass $(T + P)(\mathrm{Id} - (K + P))^{-1} y \in V$, so dass es aufgrund der Bijektivität von S ein $x \in V$ gibt mit $Sx = (T + P)(\mathrm{Id} - (K + P))^{-1} y$. Wir setzen $\xi := (\mathrm{Id} - (K + P))^{-1}(y - x)$, dann gilt tatsächlich

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Id} - K + T)\xi &= (\mathrm{Id} - K + T)(\mathrm{Id} - (K + P))^{-1} y - \underbrace{(\mathrm{Id} - K + T)(\mathrm{Id} - (K + P))^{-1} x}_{\substack{Sx \\ \text{nach } (4.10)}} \\
&= (\mathrm{Id} - K + T - (T + P))(\mathrm{Id} - (K + P))^{-1} y \\
&= (\mathrm{Id} - (K + P))(\mathrm{Id} - (K + P))^{-1} y = y.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Sei nun $y \in \mathcal{N}(\mathrm{Id} - K^\dagger)_\perp$ beliebig. Dann existiert aufgrund der Surjektivität von $(\mathrm{Id} - K + T)$ ein $x \in X$ mit $y = (\mathrm{Id} - K + T)x$. Beachte dass nach Voraussetzung $\langle y, \psi_j \rangle = 0$ für alle j. Daher gilt

$$0 = \langle y, \psi_j \rangle = \langle (\mathrm{Id} - K + T)x, \psi_j \rangle = \langle x, \underbrace{(\mathrm{Id} - K^\dagger)\psi_j}_{0} \rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle x, \varphi_i \rangle \cdot \underbrace{\langle y_i, \psi_j \rangle}_{\delta_{ij}} = \langle x, \varphi_j \rangle \tag{4.12}$$

für jedes j und folglich

$$Tx = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\langle x, \varphi_i \rangle}_{0} = 0. \tag{4.13}$$

Daher $y = (\mathrm{Id} - K)x \in \mathcal{R}(\mathrm{Id} - K)$.

□

Beispiele:

(i) Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ mit adjungiertem Operator $K^\dagger \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Dann ist nach Beispiel 3.6.14(i) sogar $K^\dagger \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Nach Beispiel 4.2.2(iv) und 4.2.5(iii) lässt sich die Fredholmsche Alternative 4.2.11 auf $K^\dagger$ anwenden so dass $\mathcal{R}(\mathrm{Id} - K) = \mathcal{N}(\mathrm{Id} - K^\dagger)^\perp$, wobei $^\perp$ für das orthogonale Komplement in $\mathcal{H}$ steht. Der Operator $\mathrm{Id} - K$ ist genau dann bijektiv wenn $\mathrm{Id} - K^\dagger$ es ist.

4.2.12 Definition: Schwach-singulärer Integralkern

Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, dazu die *Diagonale* $\overline{\Omega}_\mathrm{d} := \left\{(x, x) : x \in \overline{\Omega}\right\}$ und $\overline{\Omega}_\mathrm{nd} := \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \setminus \overline{\Omega}_\mathrm{d}$. Eine komplexwertige Funktion $\varkappa \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}_\mathrm{nd})$ heißt **schwach singulärer Integralkern** falls es Konstanten $M \geq 0$ und $0 \leq \alpha < n$ gibt mit

$$|\varkappa(x, y)| \leq \frac{M}{\|x - y\|^\alpha} \quad \forall x \neq y \in \overline{\Omega}. \tag{4.14}$$

Erläuterungen:

(i) Für jede $\varkappa \in \mathcal{C}(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$ ist die Einschränkung $\varkappa\big|_{\overline{\Omega}_\mathrm{nd}}$ schwach singulär.

(ii) Ist $\alpha > 0$, so kann $\varkappa$ auf der Diagonalen $\overline{\Omega}_\mathrm{d}$ eine *Singularität* besitzen. Da $\alpha < n$ gilt jedoch stets

$$\sup_{x \in \overline{\Omega}} \int_\Omega |\varkappa(x, y)| \; dy < \infty, \tag{4.15}$$

was die Bezeichnung *schwach* singulär rechtfertigt.

4.2.13 Satz: Schwach singuläre Kerne als kompakte Operatoren

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $\varkappa$ ein schwach singulärer Integralkern auf $\overline{\Omega}$. Dann ist der Operator $K : (\mathcal{C}(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_\infty) \to (\mathcal{C}(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_\infty)$ definiert durch

$$(Kf)(x) := \int_\Omega \varkappa(x, y) f(y) \; dy \quad , \quad f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \tag{4.16}$$

ein kompakter, linearer Operator.

4.2.14 Folgerung: Die Fredholmsche Alternative für Integralgleichungen

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $\overline{\Omega}_\mathrm{nd} := \left\{(x, y) : x, y \in \overline{\Omega}, x \neq y\right\}$. Sei außerdem $\varkappa \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}_\mathrm{nd})$ schwach singulär bzw. $\varkappa \in L_2(\Omega \times \Omega)$. Dann gilt genau eine der beiden Aussagen:

1. Die homogenen Integralgleichungen

$$\begin{aligned} f(x) - \int_\Omega \varkappa(x, y) f(y) \; dy &= 0 \\ g(x) - \int_\Omega \varkappa(y, x) g(y) \; dy &= 0 \end{aligned} \tag{4.17}$$

haben nur die triviale Lösung $f \equiv g \equiv 0$ in $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ bzw. $L_2(\Omega)$. Die inhomogenen Integralgleichungen

$$\begin{aligned} f(x) - \int_\Omega \varkappa(x, y) f(y) \; dy &= \varphi(x) \\ g(x) - \int_\Omega \varkappa(y, x) g(y) \; dy &= \psi(x) \end{aligned} \tag{4.18}$$

besitzen für jedes $\varphi, \psi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ bzw. $\varphi, \psi \in L_2(\Omega)$ genau eine Lösung $f, g \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ bzw. $f, g \in L_2(\Omega)$. Diese Lösungen hängen stetig von den Inhomogenitäten φ, ψ ab.

2. Die homogenen Integralgleichungen (4.17) besitzen jeweils $m \in \mathbb{N}$ linear unabhängige Lösungen $\{f_1, .., f_m\}$, $\{g_1, .., g_m\}$ in $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ bzw. $L_2(\Omega)$. Die inhomogenen Gleichungen (4.18) sind genau für jene $\varphi, \psi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ bzw. $\varphi, \psi \in L_2(\Omega)$ lösbar, für die gilt

$$\begin{aligned} \int_\Omega g_i(y)\varphi(y)\ dy = 0 \quad \forall i \in \{1, .., n\} \\ \int_\Omega f_i(y)\psi(y)\ dy = 0 \quad \forall i \in \{1, .., n\}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Lösen f, g die inhomogenen Differentialgleichungen (4.18), so sind $f + \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{f_1, .., f_m\}$ und $g + \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{g_1, .., g_n\}$ deren allgemeine (affinen) Lösungsräume.

Beweis: Anwendung der Fredholmschen Alternative 4.2.11 auf die Beispiele 4.2.2(ii) und 4.2.2(iii) bzw. Satz 4.2.13.

5 Operatoren im Hilbertraum

5.1 Unbeschränkte Operatoren

5.1.1 Definition: Von einem Operator induziertes Skalarprodukt

Seien $(\mathcal{H}_1, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, $(\mathcal{H}_2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilberträume, $D(A) \subseteq \mathcal{H}_1$ ein Teilraum und $A : D(A) \to \mathcal{H}_2$ linear. Dann heißt das Skalarprodukt $[\cdot,\cdot]_A$ definiert auf $D(A)$ durch

$$[x, y]_A := \langle x, y\rangle + \langle Ax, Ay\rangle \quad , \quad x, y \in D(A) \tag{5.1}$$

von A induziertes Skalarprodukt. Die entsprechende Norm $\|\cdot\|_A : x \mapsto \|x\| := \sqrt{[x, x]_A}$ ist die bereits in 3.4.3 eingeführte **von A induzierte Norm**.

5.1.2 Satz: Charakterisierung der Abgeschlossenheit eines Operators

Seien $(\mathcal{H}_1, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, $(\mathcal{H}_2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilberträume, $D(A) \subseteq \mathcal{H}_1$ ein Teilraum und $A : D(A) \to \mathcal{H}_2$ linear, dazu das induzierte Skalarprodukt $[\cdot,\cdot]_A$ auf $D(A)$. Dann ist A genau dann abgeschlossen wenn $(D(A), [\cdot,\cdot]_A)$ ein Hilbertraum ist.

Erläuterung: Die Aussage ist lediglich ein Spezialfall von Satz 3.4.4 über die Charakterisierung abgeschlossener Operatoren auf Banachräumen.

5.1.3 Definition: Adjungierter Operator

Seien $(\mathcal{H}_1, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, $(\mathcal{H}_2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilberträume, $D(A) \subseteq \mathcal{H}_1$ ein dichter Teilraum und $A : D(A) \to \mathcal{H}_2$ linear. Dann existiert zu jedem $y \in \mathcal{H}_2$ höchstens ein $y^\dagger \in \mathcal{H}_1$ so dass gilt $\langle Ax, y\rangle = \langle x, y^\dagger\rangle\ \forall x \in D(A)$. Man setzt

$$D(A^\dagger) := \left\{y \in \mathcal{H}_2 : \exists y^\dagger \in \mathcal{H}_1 : \forall x \in D(A) : \langle y, Ax\rangle = \langle y^\dagger, x\rangle\right\} \subseteq \mathcal{H}_2 \tag{5.2}$$

und nennt den Operator $A^\dagger : D(A^\dagger) \to \mathcal{H}$, $A^\dagger y := y^\dagger$ **zu A adjungierten Operator**.

Bemerkungen:

(i) Nach dem Rieszschen Darstellungssatz ist $y \in \mathcal{H}_2$ genau dann in $D(A^\dagger)$ wenn das lineare Funktional $x \mapsto \langle y, Ax\rangle$ auf $D(A)$ stetig ist.

(ii) Insbesondere ist $D(A^\dagger) = \mathcal{H}_2$ insofern $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$.

5.1.4 Satz: Grundeigenschaften des adjungierten Operators

Seien $(\mathcal{H}_1, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, $(\mathcal{H}_2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilberträume, $D(A) \subseteq \mathcal{H}_1$ ein dichter Teilraum und $A : D(A) \to \mathcal{H}_2$ linear mit adjungiertem Operator $A^\dagger : D(A^\dagger) \subseteq \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$. Dann gelten:

1. $D(A^\dagger)$ ist ein linearer Teilraum und $A^\dagger$ ein linearer, abgeschlossener Operator.
2. Für alle Erweiterungen $B \supseteq A$ von A gilt $B^\dagger \subseteq A^\dagger$.
3. Falls A abschließbar ist mit Abschluss $\overline{A}$, so gilt $A^\dagger = \overline{A}^\dagger$.
4. Falls $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ und $\lambda \in \mathbb{C}$, dazu $D(\lambda - A) := D(A)$, so gilt
$$(\lambda - A)^\dagger = \lambda^* - A^\dagger \quad , \quad D((\lambda - A)^\dagger) = D(A^\dagger). \tag{5.3}$$
5. Es ist $\mathcal{R}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^\dagger)$ und $\mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{R}(A^\dagger)^\perp$. Insbesondere gilt die Zerlegung
$$\mathcal{H}_2 = \overline{\mathcal{R}(A)} \oplus \mathcal{N}(A^\dagger). \tag{5.4}$$
6. Ist $D(A) = \mathcal{H}_1$ und $D(A^\dagger)$ dicht in $\mathcal{H}_2$, so gilt sogar $\mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(A^\dagger)^\perp$.
7. Nehme an dass $D(A^\dagger)$ dicht in $\mathcal{H}_2$ ist. Dann ist $(A^\dagger)^\dagger$ eine Erweiterung von A.

5.1.5 Satz: Permanenzeigenschaften des adjungieren Operators

Seien $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3$ Hilberträume, $D(A), D(B) \subseteq \mathcal{H}_1$, $D(C) \subseteq \mathcal{H}_2$ dichte Teilräume und $A : D(A) \to \mathcal{H}_2, B : D(B) \to \mathcal{H}_2$, $C : D(C) \to \mathcal{H}_3$ lineare Operatoren. Dann gilt:

1. Falls $D(A + B) := D(A) \cap D(B)$ dicht in $\mathcal{H}$ liegt, so gilt $(A^\dagger + B^\dagger) \subseteq (A + B)^\dagger$, wobei $D(A^\dagger + B^\dagger) := D(A^\dagger) \cap D(B^\dagger)$.
2. Falls $D(A) = D(B)$ und $D((A + B)^\dagger) \subseteq D(A^\dagger)$, so gilt auch die Umkehrung, das heißt $A^\dagger + B^\dagger = (A + B)^\dagger$.
3. Es sei $\mathcal{R}(A)$ dicht in $\mathcal{H}_2$ und $A : D(A) \to \mathcal{R}(A)$ bijektiv. Dann ist auch $A^\dagger : D(A^\dagger) \to \mathcal{R}(A^\dagger)$ bijektiv und es gilt $(A^\dagger)^{-1} = (A^{-1})^\dagger$.
4. Falls $D(CA) := A^{-1}(D(C))$ dicht in $\mathcal{H}_1$ ist, so gilt $A^\dagger C^\dagger \subseteq (CA)^\dagger$.
5. Ist $C \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$, so gilt $A^\dagger C^\dagger = (CA)^\dagger$.

5.1.6 Satz: Adjungierung abgeschlossener Operatoren

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $D(A) \subseteq \mathcal{H}$ ein dichter Teilraum und $A : D(A) \to \mathcal{H}$ ein abgeschlossener, linearer Operator. Dann ist auch $D(A^\dagger)$ dicht in $\mathcal{H}$ und es gilt $(A^\dagger)^\dagger = A$.

5.1.7 Definition: Normaler Operator

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $D(A) \subseteq \mathcal{H}$ ein dichter Teilraum und $A : D(A) \to \mathcal{H}$ ein abgeschlossener, linearer Operator. Dann heißt A **normal** falls $AA^\dagger = A^\dagger A$.

Beachte: Die Gleichheit $AA^\dagger = A^\dagger A$ impliziert insbesondere die Gleichheit der Definitionsgebiete $D(AA^\dagger)$ und $D(A^\dagger A)$, was im Allgemeinen nicht der Fall sein muss.

5.1.8 Satz: Charakterisierung normaler Operatoren

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Dann sind äquivalent:

1. A ist normal.
2. $A^\dagger$ ist normal.
3. $\|Ax\| = \|A^\dagger x\|$ für alle $x \in \mathcal{H}$.

5.1.9 Satz: Eigenschaften normaler Operatoren

Sei $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein normaler Operator auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dann gilt:

1. $\|Ax\|^2 \leq \left\|A^2 x\right\| \cdot \|x\|$ für alle $x \in \mathcal{H}$. Insbesondere ist $\|A^2\| = \|A\|^2$.
2. Ist $r(A)$ der Spektralradius von A, so gilt $\|A\| = r(A)$.

5.1.10 Definition: Symmetrischer und selbstadjungierter Operator

Sei $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum, $D(A) \subseteq \mathcal{H}$ ein dichter Teilraum und $A : D(A) \to \mathcal{H}$ linear. Dann heißt A **symmetrisch** falls gilt $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ für alle $x, y \in D(A)$. Er heißt **selbstadjungiert** falls $A = A^\dagger$. Ist A beschränkt und symmetrisch, so heißt A **hermitisch**.

Bemerkungen:

(i) Jeder selbstadjungierte Operator ist symmetrisch. Die Umkehrung ist im allgemeinen falsch.

(ii) Jeder selbstadjungierte Operator ist normal. Die Umkehrung ist im allgemeinen falsch.

5.1.11 Satz über symmetrische Operatoren [Hellinger-Toeplitz]

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein symmetrischer, linearer Operator. Dann gilt $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und $A = A^\dagger$.

5.1.12 Satz über symmetrische und selbstadjungierte Operatoren

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $D(A) \subseteq \mathcal{H}$ ein dichter Teilraum und $A : D(A) \to \mathcal{H}$ linear. Dann gilt:

1. Ist A symmetrisch, so gilt $A \subseteq A^\dagger$. Außerdem ist A abschließbar mit $\overline{A}$ symmetrisch.
2. Ist A symmetrisch und $B \supseteq A$ eine symmetrische Erweiterung, so gilt $A \subseteq B \subseteq B^\dagger \subseteq A^\dagger$.
3. Ist $A = A^\dagger$ selbstadjungiert, so ist A abgeschlossen. Es gibt keine nicht-trivialen symmetrischen Erweiterungen von A, das heißt für jede symmetrische Erweiterung $B \supseteq A$ gilt $B = A$.
4. Ist $\mathcal{H}$ ein komplexer Hilbertraum, so ist A symmetrisch genau dann wenn $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$ für alle $x \in D(A)$.
5. Ist A symmetrisch, so gilt $\sigma_p(A) \subseteq \mathbb{R}$.

5.1.13 Satz: Resolventenabbildungen symmetrischer Operatoren

Sei $\mathcal{H}$ ein komplexer Hilbertraum, $D(A) \subseteq \mathcal{H}$ ein dichter Teilraum und $A : D(A) \to \mathcal{H}$ ein symmetrischer, linearer Operator.

1. Für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ ist
$$\mathcal{H} = \overline{\mathcal{R}(\lambda - A)} \oplus \mathcal{N}(\lambda^* - A^\dagger). \tag{5.5}$$
2. Für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ und $x \in D(A)$ gilt
$$\|(\lambda - A)x\| \geq |\Im(\lambda)| \cdot \|x\|\,. \tag{5.6}$$
Insbesondere ist $(\lambda - A)$ für $\Im(\lambda) \neq 0$ injektiv mit beschränktem Inversen $(\lambda - A)^{-1} : \mathcal{R}(\lambda - A) \to \mathcal{H}$, $\left\|(\lambda - A)^{-1}\right\| \leq |\Im(\lambda)|^{-1}$.
3. Ist A zusätzlich abgeschlossen und $\lambda \in \mathbb{C}$ so dass $\Re(\lambda) = 0,\ \Im(\lambda) \neq 0$, so ist $\mathcal{R}(\lambda - A)$ abgeschlossen in $\mathcal{H}$.

5.1.14 Satz: Charakterisierung selbstadjungierter Operatoren

Sei $\mathcal{H}$ ein komplexer Hilbertraum, $D(A) \subseteq \mathcal{H}$ ein dichter Teilraum und $A : D(A) \to \mathcal{H}$ ein symmetrischer, linearer Operator. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. A ist selbstadjungiert.
2. Für irgendein $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt $\mathcal{R}(\lambda - A) = \mathcal{R}(\lambda^* - A) = \mathcal{H}$.
3. Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\Im(\lambda) \neq 0$ gilt $\mathcal{R}(\lambda - A) = \mathcal{H}$.
4. Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\Im(\lambda) \neq 0$ ist $(\lambda - A) : D(A) \to \mathcal{H}$ bijektiv und $\left\|(\lambda - A)^{-1}\right\| \leq |\Im(\lambda)|^{-1}$.
5. A ist abgeschlossen und für irgendein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\Re(\lambda) = 0$ und $\Im(\lambda) \neq 0$ gilt $\mathcal{N}(\lambda - A^\dagger) = \mathcal{N}(\lambda^* - A^\dagger) = \{0\}$.
6. A ist abgeschlossen und für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\Im(\lambda) \neq 0$ gilt $\mathcal{N}(\lambda - A^\dagger) = \{0\}$.
7. A ist abgeschlossen und $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.

5.1.15 Satz: Symmetrische Störungen selbstadjungierter Operatoren [Kato-Rellich]

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $D(A) \subseteq D(B) \subseteq X$ dichte Teilräume, $A : D(A) \to \mathcal{H}$ ein selbstadjungierter und $B : D(B) \to \mathcal{H}$ ein symmetrischer, linearer Operator. Es mögen $0 \leq \delta < 1$ und $C \geq 0$ existieren, so dass

$$\|Bx\| \leq \delta \cdot \|Ax\| + C \cdot \|x\| \tag{5.7}$$

für alle $x \in D(A)$. Dann ist $A + B$ mit $D(A + B) = D(A)$ selbstadjungiert.

5.1.16 Satz: Charakterisierung des Spektrums selbstadjungierter Operatoren

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $D(A) \subseteq \mathcal{H}$ ein dichter Teilraum und $A : D(A) \to \mathcal{H}$ ein linearer, selbstadjungierter Operator. Dann gilt:

1. Es ist $\lambda \in \rho(A)$ genau dann wenn $\mathcal{R}(\lambda - A) = \mathcal{H}$.
2. $\sigma(A) = \sigma_{p,o}(A) \cup \sigma_e(A)$.
3. $\sigma_r(A) \subseteq \sigma_e(A)$.
4. Es ist $\lambda \in \sigma_p(A)$ genau dann wenn $\overline{\mathcal{R}(\lambda - A)} \subsetneq \mathcal{H}$.
5. Es ist $\lambda \in \sigma_r(A)$ genau dann wenn $\mathcal{R}(\lambda - A) \subsetneq \overline{\mathcal{R}(\lambda - A)} = \mathcal{H}$.
6. Sei $\dim \mathcal{H} = \infty$ und $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Dann ist $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ genau dann wenn $\sigma_e(A) = \{0\}$.

Beweis:

1. Da A abgeschlossen ist, gilt nach Bemerkung 2.3.4(iv) $\rho(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{K} : \exists (\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})\right\}$, so dass aus $\lambda \in \rho(A)$ auf jeden Fall $\mathcal{R}(\lambda - A) = \mathcal{H}$ folgt. Sei umgekehrt $\mathcal{R}(\lambda - A) = \mathcal{H}$. Nach Satz 5.1.14(7) genügt es den Fall $\lambda \in \mathbb{R}$ zu betrachten. Nach Satz 5.1.4(5) ist $\mathcal{H} = \mathcal{N}(\lambda - A) \oplus \mathcal{R}(\lambda - A)$, so dass der Inverse $(\lambda - A)^{-1} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tatsächlich existiert. Da $(\lambda - A)$ selbstadjungiert und daher abgeschlossen ist, ist auch $(\lambda - A)^{-1} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ abgeschlossen. Nach 3.4.6 ist $(\lambda - A)^{-1}$ sogar beschränkt, sprich $\lambda \in \rho(A)$.
2. Nach Bemerkungen 2.3.4(ii) und 2.3.4(iii) gilt $\sigma_{p,0}(A) \cup \sigma_e(A) \subseteq \sigma(A)$. Sei nun umgekehrt $\lambda \in \sigma(A) \setminus \sigma_{p,0}(A)$. Nach Satz 5.1.14(7) muss $\lambda \in \mathbb{R}$ sein.
   - Fall $\ker(\lambda - A) = \{0\}$. Nach Satz 5.1.4(5) muss dann $\overline{\mathcal{R}(\lambda - A)} = \mathcal{H}$, das heißt $(\lambda - A)^{-1}$ ist nicht beschränkt. Da A abgeschlossen ist, muss nach Lemma 2.3.3(2) $\lambda \in \sigma_e(A)$ sein.
   - Fall $\dim \ker(\lambda - A) = \infty$. Dann ist bekanntlich die Einheitskugel in $\ker(\lambda - A)$ nicht total beschränkt, das heißt es existiert eine beschränkte, nicht-total beschränkte Folge $(x_n)_n \subseteq \ker(\lambda - A)$, folglich $\lambda \in \sigma_e(A)$.
3. Es sei $\lambda \in \sigma_r(A)$. Da $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\ker(\lambda - A) = \{0\}$, folgt wegen der Zerlegung $\mathcal{H} = \mathcal{N}(\lambda - A) \oplus \overline{\mathcal{R}(\lambda - A)}$ dass $\overline{\mathcal{R}(\lambda - A)} = \mathcal{H}$. Nach Definition von $\sigma_r(A)$ muss dann $(\lambda - A)^{-1}$ unbeschränkt sein. Da A abgeschlossen ist, folgt nach Lemma 2.3.3(2) dass $\lambda \in \sigma_e(A)$.
4. Im Fall $\lambda \in \mathbb{R}$ folgt dies aus der Zerlegung $\mathcal{H} = \mathcal{N}(\lambda - A) \oplus \overline{\mathcal{R}(\lambda - A)}$, gegeben durch Satz 5.1.4(5). Im Fall $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ sind nach Satz 5.1.14(3) und 5.1.14(7) sowieso beide Seiten der Äquivalenz unmöglich.
5. Nach Punkt (1) und der Tatsache $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$ genügt es den Fall $\lambda \in \mathbb{R}$ zu betrachten. Ist $\lambda \in \sigma_r(A)$, so gilt $\ker(\lambda - A) = \{0\}$ und daher $\overline{\mathcal{R}(\lambda - A)} = \mathcal{H}$. Da $\lambda \notin \rho(A)$ folgt nach Punkt (1) auch $\mathcal{R}(\lambda - A) \subsetneq \mathcal{H}$.

   Ist umgekehrt $\mathcal{R}(\lambda - A) \subsetneq \overline{\mathcal{R}(\lambda - A)} = \mathcal{H}$, so muss wegen der Zerlegung $\mathcal{H} = \mathcal{N}(\lambda - A) \oplus \overline{\mathcal{R}(\lambda - A)}$ gelten $\ker(\lambda - A) = \{0\}$. Ferner muss $(\lambda - A)^{-1}$ unbeschränkt sein, da sonst nach Abgeschlossenheit von A und Satz 2.3.4(iv) $\mathcal{R}(\lambda - A)$ abgeschlossen wäre. Folglich $\lambda \in \sigma_r(A)$.
6. Ohne Beweis.

□

5.1.17 Satz: Klassifizierung des Spektrums selbstadjungierter Operatoren

Sei $\mathcal{H}$ ein $\mathbb{K}$-Hilbertraum, $D(A) \subseteq \mathcal{H}$ ein dichter Teilraum und $A : D(A) \to \mathcal{H}$ ein linearer, selbstadjungierter Operator. Dann gilt für $\lambda \in \mathbb{K}$ genau eine der folgenden Aussagen:

1. $\mathcal{R}(\lambda - A) = \mathcal{H}$, woraus folgt $\lambda \in \rho(A)$.
2. $\mathcal{R}(\lambda - A) \subsetneq \overline{\mathcal{R}(\lambda - A)} = \mathcal{H}$, woraus folgt $\lambda \in \sigma_e(A) \setminus \sigma_{p,0}(A)$.
3. $\mathcal{R}(\lambda - A) = \overline{\mathcal{R}(\lambda - A)} \subsetneq \mathcal{H}$, $\dim(\mathcal{H} \ominus \overline{\mathcal{R}(\lambda - A)}) < \infty$, woraus folgt $\lambda \in \sigma_{p,0}(A) \setminus \sigma_e(A)$.
4. $\mathcal{R}(\lambda - A) \subsetneq \overline{\mathcal{R}(\lambda - A)} \subsetneq \mathcal{H}$, $\dim(\mathcal{H} \ominus \overline{\mathcal{R}(\lambda - A)}) < \infty$, woraus folgt $\lambda \in \sigma_{p,0}(A) \cap \sigma_e(A)$.
5. $\dim(\mathcal{H} \ominus \overline{\mathcal{R}(\lambda - A)}) = \infty$, woraus folgt $\lambda \in \sigma_e(A) \setminus \sigma_{p,0}(A)$.

5.1.18 Satz: Kommutierung mit selbstadjungierten Operatoren

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $D(T) \subseteq \mathcal{H}$ ein dichter Teilraum und $T : D(T) \to \mathcal{H}$ ein linearer, selbstadjungierter Operator. Sei $\Pi : \mathcal{H} \to \mathcal{N}(T)$ die Orthogonalprojektion auf $\mathcal{N}(T)$. Dann gilt für jedes $C \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $TC = CT$, auch $\Pi C = C\Pi$.

Beweis: Wir erinnern daran dass $\mathcal{N}(T)^\perp = \overline{\mathcal{R}(T)}$ und $\mathcal{H} = \mathcal{N}(T) \oplus \mathcal{N}(T)^\perp$.

- Wir zeigen $C\Pi = \Pi C$ auf $\mathcal{N}(T)^\perp = \overline{\mathcal{R}(T)}$. Sei $x \in \mathcal{N}(T)^\perp$, dann gilt $\Pi x = 0$ und daher $C\Pi x = 0$. Zu zeigen wäre nun dass auch $\Pi C x = 0$, das heißt $Cx \in \mathcal{N}(T)^\perp$ bzw. $C(\overline{\mathcal{R}(T)}) \subseteq \overline{\mathcal{R}(T)}$. Da C, T kommutieren gilt $C(\mathcal{R}(T)) \subseteq \mathcal{R}(T)$. Da C stetig ist, gilt sogar $C(\overline{\mathcal{R}(T)}) \subseteq \overline{\mathcal{R}(T)}$ wie gewünscht.
- Wir zeigen $C\Pi = \Pi C$ auf $\mathcal{N}(T)$. Sei $x \in \mathcal{N}(T)$, dann gilt $\Pi x = x$ und $C\Pi x = Cx$. Zu zeigen wäre nun $\Pi C x = Cx$, sprich $Cx \in \mathcal{N}(T)$. Tatsächlich gilt $TCx = CTx = 0$, wie gewünscht.

□

5.2 Nicht-negativ definite Operatoren

5.2.1 Definition: Nicht-negativ definiter Operator

Sei $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum, $D(A) \subseteq \mathcal{H}$ ein dichter Teilraum und $A : D(A) \to \mathcal{H}$ linear und symmetrisch. Dann heißt A **positiv definit** falls $\langle Ax, x \rangle > 0$ für jedes $x \in D(A) \setminus \{0\}$. Er heißt **nicht-negativ definit** wenn $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ für jedes $x \in D(A)$. Er heißt **negativ definit** falls $\langle Ax, x \rangle < 0$ für jedes $x \in D(A)$. Er heißt **stark positiv definit** falls eine Konstante $C > 0$ existiert mit $\langle Ax, x \rangle \geq C \cdot \|x\|^2$ für alle $x \in D(A)$. Für zwei lineare Operatoren A, B schreibt man $A \geq B$ (bzw. $A > B$) falls $(A - B)$ ein symmetrischer, nicht-negativ definiter (bzw. positiv definiter) Operator ist.

Bemerkungen:

(i) Ist A positiv (bzw. negativ) definit, so gilt $\lambda > 0$ (bzw. $\lambda < 0$) für jeden Eigenwert λ von A.

(ii) Ist $\mathcal{H}$ endlich-dimensional und $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, so ist A positiv (bzw. negativ) definit genau dann wenn $\lambda > 0$ (bzw. $\lambda < 0$) für jeden Eigenwert λ von A.

(iii) Ist A nicht-negativ definit, so gilt $\lambda \geq 0$ für jeden Eigenwert λ von A.

5.2.2 Lemma: Inverse stark positiver Operatoren

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $D(A) \subseteq \mathcal{H}$ ein dichter Teilraum und $A : D(A) \to \mathcal{H}$ ein linearer, symmetrischer, stark positiv definiter Operator. Dann existiert $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{R}(A), D(A))$.

Beweis: Aufgrund der strikten Positivität ist A injektiv, das heißt $A^{-1} : \mathcal{R}(A) \to D(A)$ existiert. Ferner gilt nach Cauchy-Schwarz für $x \in \mathcal{H}$ mit $\|x\| = 1$ stets $\|Ax\| \geq |\langle Ax, x \rangle| \geq C \cdot \|x\|^2 = C$, wobei $C > 0$ eine geeignete, von x unabhängige Konstante ist. Nach Satz 2.2.17 folgt daraus $\left\|A^{-1}\right\| \leq C^{-1}$.

□

5.2.3 Korollar: Spektrum nach unten halbbeschränkter Operatoren

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $D(A) \subseteq \mathcal{H}$ ein dichter Teilraum, $A : D(A) \to \mathcal{H}$ ein linearer, symmetrischer Operator und $C \in \mathbb{R}$ so dass $A \geq C$. Dann gelten:

1. $\sigma_p(A) \subseteq [C, \infty)$.
2. Ist A selbstadjungiert, so ist sogar $\sigma(A) \subseteq [C, \infty)$.

Beweis:

1. Klar.
2. Nach Satz 5.1.14(7) ist $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$. Nun sei $\lambda = C - \varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$. Dann ist $A - \lambda \geq \varepsilon$ und daher $\mathcal{N}(A - \lambda) = \{0\}$. Nach der Zerlegung $\mathcal{H} = \overline{\mathcal{R}(A - \lambda)} \oplus \mathcal{N}(A - \lambda)$ folgt dass $\mathcal{R}(A - \lambda)$ dicht in $\mathcal{H}$ liegt. Da $(A - \lambda)$ stark positiv definit ist, ist nach Lemma 5.2.2 der Inverse $(A - \lambda)^{-1}$ beschränkt und daher $\lambda \in \rho(A)$.

□

5.2.4 Satz: Verknüpfung nicht-negativer Operatoren

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ selbstadjungierte, nicht-negativ definite Operatoren mit $AB = BA$. Dann gilt auch $AB \geq 0$.

5.2.5 Korollar: Quadrat nicht-negativ definiter Operatoren

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ selbstadjungiert mit $0 \leq A$ und $\|A\| \leq 1$. Dann gilt $A^2 \leq A$.

Beweis: Es gilt $A \geq 0$ und $(1 - A) \geq 0$, daher nach Satz 5.2.4 auch $A(1 - A) \geq 0$.

□

5.2.6 Satz: Grenzwert wachsender Operatorfolgen

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $A_n,\ B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $n \in \mathbb{N}$ selbstadjungiert mit $A_n B = B A_n$ sowie

$$\langle A_n x, x \rangle \leq \langle A_m x, x \rangle \leq \langle Bx, x \rangle \quad \forall x \in \mathcal{H},\ \forall n \leq m \in \mathbb{N}. \tag{5.8}$$

Dann existiert für jedes $x \in \mathcal{H}$ der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} A_n x =: Ax$. Der so definierte Operator $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ist beschränkt, selbstadjungiert und es gilt $\langle Ax, x \rangle \leq \langle Bx, x \rangle$ für jedes $x \in \mathcal{H}$.

5.2.7 Satz: Wurzeln nicht-negativ definiter Operatoren

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $A = A^\dagger$ und $A \geq 0$.

1. Es existiert genau ein Operator $\sqrt{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $\sqrt{A} = (\sqrt{A})^\dagger$, $\sqrt{A} \geq 0$ und $\sqrt{A}\sqrt{A} = A$.
2. Für jeden weiteren Operator $C \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $CA = AC$ gilt auch $C\sqrt{A} = \sqrt{A}C$.
3. A ist kompakt genau dann wenn $\sqrt{A}$ kompakt ist.
4. Es ist $Ax = 0$ genau dann wenn $\sqrt{A}x = 0$ und dies genau dann wenn $\langle Ax, x \rangle = 0$.
5. A ist genau dann positiv definit wenn $\sqrt{A}$ positiv definit ist.
6. Es gilt $\|\sqrt{A}\| = \sqrt{\|A\|}$.

Man nennt $\sqrt{A}$ die **positive, symmetrische Wurzel** von A.

Erläuterung: Die Wurzel $\sqrt{A}$ besitzt die Darstellung $\sqrt{A}x = \lim_{n\to\infty} B_n x$, wobei $B_0 := 0$ und die wachsende Operatorfolge

$$B_{n+1} := B_n + \frac{1}{2M}\left[A - B_n^2\right] \tag{5.9}$$

rekursiv definiert ist. Dabei kann die Konstante $M \geq \|A\|$ beliebig gewählt werden.

5.2.8 Satz über Produkte von Wurzeln

Seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ selbstadjungiert, nicht-negativ definit und kommutierend. Dann kommutieren auch deren positiven, symmetrischen Wurzeln $\sqrt{A}, \sqrt{B} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und es gilt $\sqrt{A}\sqrt{B} = \sqrt{AB}$.

Beweis: Nach 5.2.7(2) kommutiert A mit $\sqrt{B}$, daher auch $\sqrt{A}$ mit $\sqrt{B}$. Nach Satz 5.2.4 folgt $\sqrt{A}\sqrt{B} \geq 0$. Nach Satz 5.1.5(5) gilt

$$(\sqrt{A}\sqrt{B})^\dagger = (\sqrt{B})^\dagger(\sqrt{A})^\dagger = \sqrt{B}\sqrt{A} = \sqrt{A}\sqrt{B}, \tag{5.10}$$

das heißt $\sqrt{A}\sqrt{B}$ ist selbstadjungiert. Er erfüllt

$$(\sqrt{A}\sqrt{B})^2 = (\sqrt{A})^2(\sqrt{B})^2 = AB, \tag{5.11}$$

so dass nach der Eindeutigkeit positiver, symmetrischer Wurzeln gilt $\sqrt{A}\sqrt{B} = \sqrt{AB}$.

□

5.2.9 Satz über Wurzeln inverser Operatoren

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $A \in \mathcal{L}(A)$ selbstadjungiert mit $A \geq 0$ und Inversen $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Dann gilt:

1. $A > 0$.
2. A^{-1} ist selbstadjungiert mit $A^{-1} > 0$.
3. Die positive, symmetrische Wurzel $\sqrt{A}$ ist invertierbar mit $(\sqrt{A})^{-1} = \sqrt{A^{-1}}$.

5.2.10 Satz: Positiver und negativer Anteil eines Operators

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ selbstadjungiert. Sei $|A| \in \mathcal{L}(A)$ die positive, symmetrische Wurzel von $A^2 = AA^\dagger$ und $\Pi : \mathcal{H} \to \mathcal{N}(|A| - A)$ der Orthogonalprojektor auf $\mathcal{H}_+ := \mathcal{N}(|A| - A)$. Dann heißt $|A|$ der **Betrag** von A. Die Operatoren $A_+ := A\Pi$ und $A_- := A(1 - \Pi)$ heißen jeweils **positiver** und **negativer Teil** von A. Sie erfüllen:

1. $A_+ \geq 0$ und $A_- \leq 0$.
2. $A = A_+ + A_-$ und $|A| = A_+ - A_-$.
3. Falls $A \geq 0$, so gilt $A_+ = A$ und $A_- = 0$.
4. $A_-\big|_{\mathcal{H}_+} = 0$ und $A_+\big|_{\mathcal{H}_-} = 0$, wobei $\mathcal{H}_- := (\mathcal{H}_+)^\perp$.
5. $\mathcal{R}(A_\pm) \subseteq \mathcal{H}_\pm$.
6. $|A| \geq A_+ \geq A \geq A_- \geq -|A|$.
7. $\||A|\| = \|A_+\| + \|A_-\| \geq \|A\|$.
8. Es ist $Ax = 0$ genau dann wenn $|A|\,x = 0$, und dies genau dann wenn $A_+x = 0 = A_-x$.
9. Für jeden Operator $C \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $CA = AC$ gilt auch $C\,|A| = |A|\,C$, $CA_\pm = A_\pm C$ und $C\Pi = \Pi C$.
10. Die Operatoren $A, A_+, A_-, |A|$ und Π sind selbstadjungiert und kommutieren paarweise.

5.3 Halbbeschränkte Operatoren

5.3.1 Definition: Halbbeschränkter Operator

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $D(A) \subseteq \mathcal{H}$ ein dichter Teilraum und $A : D(A) \to \mathcal{H}$ ein symmetrischer, linearer Operator. Dann heißt A **halbbeschränkt nach unten** falls ein $c \in \mathbb{R}$ existiert mit $\langle Ax, x\rangle \geq c \cdot \|x\|^2$ für alle $x \in D(A)$. Man nennt solch eine Konstante c eine **untere Schranke** für den Operator. A heißt **halbbeschränkt nach oben** falls $(-A)$ halbbeschränkt nach unten ist, das heißt $\langle Ax, x\rangle \leq c\cdot\|x\|^2 \ \forall x \in D(A)$ für eine **obere Schranke** $c \in \mathbb{R}$.

Bemerkungen:

(i) Falls A eine positive untere Schranke besitzt, so heißt A **stark positiv definit** (vgl. Def. 5.2.1).

(ii) Der symmetrische, lineare Operator $A : D(A) \to \mathcal{H}$ ist genau dann halbbeschränkt nach unten mit unterer Schranke $c \in \mathbb{R}$ wenn $A - c$ ein nicht-negativ definiter Operator ist.

(iii) Der symmetrische, lineare Operator $A : D(A) \to \mathcal{H}$ ist genau dann halbbeschränkt nach unten wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt so dass

$$\inf_{\substack{x \in D(A) \\ \|x\|=1}} \langle (A+\lambda)x, x \rangle > 0. \tag{5.12}$$

Diese λ sind genau diese die erfüllen $\lambda + c > 0$ für irgendeine untere Schranke c von A, und genau diese für die der Operator $(A + \lambda)$ stark positiv definit ist.

(iv) Ist $A : D(A) \to \mathcal{H}$ symmetrisch und halbbeschränkt nach unten, so ist es auch sein Abschluss $\overline{A}$. Die unteren Schranken von $\overline{A}$ sind genau die unteren Schranken von A. Dies folgt aus Satz 5.1.12(1) und der Tatsache dass $D(\overline{A}) = \overline{D(A)}^{\|\cdot\|_{\overline{A}}}$.

5.3.2 Satz: Halbbeschränktheit überall definierter Operatoren

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein symmetrischer, linearer Operator. Dann ist A beschränkt, selbstadjungiert, halbbeschränkt nach unten und nach oben mit unterer und oberer Schranke jeweils $-\|A\|$ und $\|A\|$. Ferner gilt

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x \rangle| \,. \tag{5.13}$$

5.3.3 Definition: Energetischer Raum

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $D(A) \subseteq \mathcal{H}$ ein dichter Teilraum, $A : D(A) \to \mathcal{H}$ ein linearer, symmetrischer, nach unten halbbeschränkter Operator. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ so dass

$$\inf_{\substack{x \in D(A) \\ \|x\|=1}} \langle (A+\lambda)x, x \rangle > 0, \tag{5.14}$$

das heißt $c + \lambda > 0$ für irgendeine untere Schranke c von A. Dann definiert man auf $D(A)$ das Skalarprodukt $[\cdot,\cdot]_{A,\lambda}$ durch

$$[x, y]_{A,\lambda} := \langle (A+\lambda)x, y \rangle \quad , \quad x, y \in D(A) \tag{5.15}$$

und die dadurch erzeugte Norm $\|\cdot\|_{A,\lambda}$. Man setzt ferner

$$\mathcal{H}_{A,\lambda} := \left\{ x \in \mathcal{H} : \exists (x_n)_n \subseteq D(A) : x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x,\ \|x_n - x_m\|_{A,\lambda} \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \right\}. \tag{5.16}$$

Es lässt sich zeigen dass für je zwei $x, y \in \mathcal{H}_{A,\lambda}$ mit approximierenden Folgen $(x_n)_n, (y_n)_n \subseteq D(A)$, das heißt $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x,\ y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$ und $(x_n)_n, (y_n)_n$ Cauchy in $(D(A), \|\cdot\|_{A,\lambda})$, der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} [x_n, y_n]_{A,\lambda} =: [x, y]_{A,\lambda} \tag{5.17}$$

existiert und unabhängig von der speziellen Wahl der $(x_n)_n, (y_n)_n$ ist. Die so auf $\mathcal{H}_{A,\lambda}$ erweiterte Bilinearform $[\cdot,\cdot]_{A,\lambda}$ macht aus dem linearen Raum $\mathcal{H}_{A,\lambda}$ einen Hilbertraum, in dem $D(A)$ bzgl. der sogenannten **energetischen Norm** $\|\cdot\|_{A,\lambda}$ dicht liegt. Dabei gilt $\|x\|_{A,\lambda} \geq \sqrt{c+\lambda} \cdot \|x\|$ für alle $x \in \mathcal{H}_{A,\lambda}$.

Schließlich stellt sich heraus dass $\mathcal{H}_{A,\lambda} = \mathcal{H}_{A,\widetilde{\lambda}}$ für alle die Bedingung (5.14) erfüllenden $\lambda, \widetilde{\lambda}$, wobei die entsprechenden Normen $\|\cdot\|_{A,\lambda}$ und $\|\cdot\|_{A,\widetilde{\lambda}}$ stets äquivalent sind. Der bis auf Normenäquivalenz durch A eindeutig definierte Hilbertraum $\mathcal{H}_{A,\lambda} =: \mathcal{H}_A$ heißt **energetischer Raum** von A.

5.3.4 Definition: Friedrichssche Erweiterung

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $D(A) \subseteq \mathcal{H}$ ein dichter Teilraum, $A : D(A) \to \mathcal{H}$ ein linearer, symmetrischer, nach unten halbbeschränkter Operator mit energetischen Raum $\mathcal{H}_A \subseteq \mathcal{H}$. Dann heißt die Einschränkung von $A^\dagger$ auf $D(A_F) := D(A^\dagger) \cap \mathcal{H}_A$ **Friedrichssche Erweiterung** von A.

5.3.5 Satz: Eigenschaften der Friedrichsschen Erweiterung

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $D(A) \subseteq \mathcal{H}$ ein dichter Teilraum, $A : D(A) \to \mathcal{H}$ ein linearer, symmetrischer, nach unten halbbeschränkter Operator mit Friedrichsschen Erweiterung A_F und Abschluss $\overline{A}$. Dann gilt:

1. A_F ist eine selbstadjungierte, nach unten halbbeschränkte Erweiterung von A.
2. Es gilt $A \subseteq \overline{A} \subseteq A_F \subseteq A^\dagger$.
3. Die unteren Schranken von A_F sind genau die unteren Schranken von A.
4. Die energetischen Räume $\mathcal{H}_A$, $\mathcal{H}_{\overline{A}}$ und $\mathcal{H}_{A_F}$ sind alle identisch mit äquivalenten Normen.
5. Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda + c > 0$ für irgendeine untere Schranke c von A, ist $\mathcal{R}(\overline{A} + \lambda)$ abgeschlossen in $\mathcal{H}$.
6. Ist $A = A^\dagger$, so gilt $A_F = A$.

5.4 Spektralscharen

5.4.1 Definition: Orthogonalprojektor

Ein linearer Operator $\Pi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ heißt **Orthogonalprojektion** falls $\Pi^2 = \Pi = \Pi^\dagger$.

5.4.2 Lemma: Charakterisierung von Orthogonalkomplementen

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $U, V \subseteq \mathcal{H}$ algebraisch komplementäre Teilräume mit U abgeschlossen und $U \perp V$. Dann ist $U = V^\perp$.

Beweis: Offensichtlich ist $U \subseteq V^\perp$. Zu zeigen bleibt also $V^\perp \subseteq U$. Dazu genügt es zu zeigen dass $U^\perp \subseteq V$, denn $U^{\perp\perp} = \overline{U} = U$ nach Voraussetzung. Sei also $y \perp U$ mit der Darstellung $y = u + v$ wobei $u \in U,\ v \in V$. Dann gilt $0 = \langle y, u\rangle = \langle u, u\rangle + \langle v, u\rangle = \|u\|^2$, das heißt $y = v \in V$.

□

5.4.3 Satz: Charakterisierung von Orthogonalprojektionen

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\Pi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein linearer Operator. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. Π ist eine Orthogonalprojektion.
2. Π ist eine Projektion ($\Pi^2 = \Pi$) und nicht-negativ definit.
3. Π ist eine stetige Projektion und es gilt $\mathcal{R}(\Pi) \perp \mathcal{N}(\Pi)$.
4. Π ist eine Projektion und es gilt sowohl $\mathcal{R}(\Pi) = \mathcal{N}(\Pi)^\perp$ als auch $\mathcal{R}(\Pi)^\perp = \mathcal{N}(\Pi)$.
5. Es existiert ein abgeschlossener Teilraum $U \subseteq \mathcal{H}$ mit $\Pi(\mathcal{H}) \subseteq U$ und $x - \Pi x \perp U$ für jedes $x \in \mathcal{H}$.

Gegebenfalls ist dann $\mathcal{R}(\Pi) = U$ und $\mathcal{N}(\Pi) = U^\perp$, das heißt Π ist genau die Projektion von $\mathcal{H}$ auf U entlang $U^\perp$. Dabei gilt

$$\|x - \Pi x\| = d(x, \mathcal{R}(\Pi)) \tag{5.18}$$

für jedes $x \in \mathcal{H}$.

5.4.4 Definition: Spektralschar

Eine Familie $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ von Orthogonalprojektoren E_λ auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ heißt **Spektralschar** falls gelten:

1. Für jedes $x \in \mathcal{H}$ gilt $E_\lambda x \overset{\lambda\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ und $E_\lambda x \overset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} x$.
2. Für jedes $\mu \in \mathbb{R}$ gilt $E_\lambda x \overset{\lambda\to\mu-0}{\longrightarrow} E_\mu x$.
3. Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt $E_\mu E_\lambda = E_\lambda E_\mu = E_{\min(\lambda,\mu)}$.

Man schreibt $\mathcal{H}^\lambda := E_\lambda(\mathcal{H})$ für den Projektionsraum von E_λ.

Beispiel: Seien $\lambda_1 < \lambda_2 < .. < \lambda \in \mathbb{R}_n$ beliebige reelle Zahlen und $\mathcal{H}_1, .., \mathcal{H}_n \subseteq \mathcal{H}$ paarweise orthogonale Teilräume, dazu deren Orthogonalprojektionen $\Pi_k : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_k$, $k = 1, .., n$. Es gelte ferner $\mathrm{Id}_\mathcal{H} = \sum_{k=1}^n \Pi_k$. Dann wird durch

$$E_\lambda := \sum_{k:\lambda_k<\lambda} \Pi_k \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R} \tag{5.19}$$

eine Spektralschar auf $\mathcal{H}$ definiert.

5.4.5 Satz: Grundeigenschaften von Spektralscharen

Sei $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ eine Spektralschar auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$, dazu die entsprechenden Projektionsräume $(\mathcal{H}^\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$. Dann gilt:

1. Für $\mu \le \lambda$ ist $\mathcal{H}^\mu \subseteq \mathcal{H}^\lambda$ und $E_\lambda - E_\mu$ ist die Orthogonalprojektion auf $\mathcal{H}^\lambda \ominus \mathcal{H}^\mu$.
2. Es gilt $\mathcal{H} = \overline{\bigcup_{\lambda\in\mathbb{R}} \mathcal{H}^\lambda}$ und $\mathcal{H}^\mu = \overline{\bigcup_{\lambda<\mu} \mathcal{H}^\lambda}$ für alle $\mu \in \mathbb{R}$.
3. Es gilt $\mathcal{H}^\mu \ominus \mathcal{H}^\varkappa = \overline{\bigcup_{\varkappa\le\lambda<\mu} \mathcal{H}^\lambda \ominus \mathcal{H}^\varkappa}$ für alle $\varkappa \le \mu \in \mathbb{R}$.
4. Für jedes $\mu \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathcal{H}$ und existiert der Grenzwert $\lim_{\lambda\to\mu+0} E_\lambda x =: E_{\mu+0}x$. Der so definierte lineare Operator $E_{\mu+0}$ ist der Orthogonalprojektor auf $\mathcal{R}(E_{\mu+0}) =: \mathcal{H}^{\mu+0}$.
5. Für $\lambda \le \mu$ gilt $\mathcal{H}^\lambda \subseteq \mathcal{H}^{\mu+0}$ und $E_\lambda E_{\mu+0} = E_{\mu+0}E_\lambda = E_\lambda$. Der Operator $E_{\mu+0} - E_\lambda$ ist die Orthogonalprojektion auf $\mathcal{H}^{\mu+0} \ominus \mathcal{H}^\lambda$.
6. Für $\lambda > \mu$ gilt $\mathcal{H}^\lambda \supseteq \mathcal{H}^{\mu+0}$ und $E_\lambda E_{\mu+0} = E_{\mu+0}E_\lambda = E_{\mu+0}$. Der Operator $E_\lambda - E_{\mu+0}$ ist die Orthogonalprojektion auf $\mathcal{H}^\lambda \ominus \mathcal{H}^{\mu+0}$.
7. Es gilt $\mathcal{H}^{\mu+0} = \bigcap_{\lambda>\mu} \mathcal{H}^\lambda$ und $\mathcal{H}^\varkappa \ominus \mathcal{H}^{\mu+0} = \overline{\bigcup_{\mu<\lambda\le\varkappa} \mathcal{H}^\varkappa \ominus \mathcal{H}^\lambda}$.

5.4.6 Lemma: Dimension von Projektionsräumen einer Spektralschar

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ eine Spektralschar auf $\mathcal{H}$ mit entsprechenden Projektionsräumen $(\mathcal{H}^\lambda)_\lambda$. Sei $\mu \in \mathbb{R}$.

1. Falls $\dim(\mathcal{H}^\mu \ominus \mathcal{H}^\varkappa) < \infty$ für irgendein $\varkappa < \mu$, so existiert ein $\lambda \in [\varkappa, \mu)$ so dass $\mathcal{H}^\lambda = \mathcal{H}^\mu$.
2. Falls $\dim(\mathcal{H}^\varkappa \ominus \mathcal{H}^{\mu+0}) < \infty$ für irgendein $\varkappa > \mu$, so existiert ein $\lambda \in (\mu, \varkappa]$ so dass $\mathcal{H}^\lambda = \mathcal{H}^{\mu+0}$.
3. Falls ein $\varkappa > 0$ existiert mit $0 < \dim(\mathcal{H}^{\mu+\varepsilon} \ominus \mathcal{H}^{\mu-\varepsilon}) < \infty$ für alle $0 < \varepsilon \le \varkappa$, so gilt $\dim(\mathcal{H}^{\mu+0} \ominus \mathcal{H}^\mu) > 0$.

Beweis:

1. Nach Satz 5.4.5(3) gilt $\mathcal{H}^\mu \ominus \mathcal{H}^\varkappa \supseteq \bigcup_{\varkappa\le\lambda<\mu} \mathcal{H}^\lambda \ominus \mathcal{H}^\varkappa$, wobei $(\mathcal{H}^\lambda \ominus \mathcal{H}^\varkappa)_\lambda$ eine mit $\lambda \uparrow \mu$ aufsteigende Familie von Vektorräumen ist. Da deren Vereinigung in einem Raum endlicher Dimension enthalten ist, ist diese Familie stationär, was zu zeigen war.
2. Nach Satz 5.4.5(7) gilt $\mathcal{H}^{\mu+0} = \bigcap_{\varkappa\ge\lambda>\mu} \mathcal{H}^\lambda$, wobei $(\mathcal{H}^\lambda)_\lambda$ eine mit $\lambda \downarrow \mu$ absteigende Folge von Vektorräumen ist. Da deren Schnitt $\mathcal{H}^{\mu+0}$ bzgl. dem ersten Glied $\mathcal{H}^\varkappa$ endliche kodimension hat, ist diese Familie stationär, was zu zeigen war.

3. Nehme an $\dim(\mathcal{H}^{\mu+0} \ominus \mathcal{H}^{\mu}) = 0$. Dann steht dies wegen
$$\dim(\mathcal{H}^{\mu+\varepsilon} \ominus \mathcal{H}^{\mu-\varepsilon}) = \dim(\mathcal{H}^{\mu+\varepsilon} \ominus \mathcal{H}^{\mu+0}) + \dim(\mathcal{H}^{\mu+0} \ominus \mathcal{H}^{\mu}) + \dim(\mathcal{H}^{\mu} \ominus \mathcal{H}^{\mu-\varepsilon}) \tag{5.20}$$
im Widerspruch zu Punkten (1) und (2), nach denen
$$\dim(\mathcal{H}^{\mu+\varepsilon} \ominus \mathcal{H}^{\mu+0}) = 0 = \dim(\mathcal{H}^{\mu} \ominus \mathcal{H}^{\mu-\varepsilon}) \tag{5.21}$$
für $\varepsilon > 0$ klein genug.

□

5.4.7 Definition: Unstetigkeit 1. und 2. Art

Sei $f : \mathbb{R} \to X$ eine Funktion in einen topologischen Raum X. Ein Unstetigkeitspunkt $t_0 \in \mathbb{R}$ von f heißt **1. Art** falls die einseitigen Grenzwerte $\lim_{t\to t_0-0} f(t) =: f(t-0)$ und $\lim_{t\to t_0+0} f(t) =: f(t+0)$ existieren. Andernfalls heißt t_0 **2. Art**.

5.4.8 Definition: Fast-stetige Funktion

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to X$ in einen topologischen Raum X heißt **fast-stetig** falls f stückweise stetig ist und nur Unstetigkeiten 1. Art besitzt die sich nicht im Endlichen häufen. Der Raum aller fast-stetigen Funktionen $\mathbb{R} \to X$ ist linear abgeschlossen.

Beispiele:

(i) Ist $A \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, so ist $1_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fast-stetig.

(ii) Die Funktion
$$f(t) := \begin{cases} 1 & : t \in \mathbb{Q} \\ 0 & : t \notin \mathbb{Q} \end{cases} \tag{5.22}$$
ist nicht fast-stetig.

5.4.9 Definition: Zerlegung eines Intervalls

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht-leeres, beschränktes Intervall mit $a := \inf I$ und $b := \sup I$. Eine Familie von Punkten $\mu := (\mu_k)_{k=0}^n \subseteq [a,b]$ heißt **Zerlegung** von I falls $a = \mu_0 \leq \mu_1 \leq .. \leq \mu_n = b$. Wir nennen $\operatorname{diam}(\mu) := \max_{0\leq k<n} |\mu_{k+1} - \mu_k|$ den **Durchmesser** der Zerlegung. Für eine Familie $\lambda := (\lambda_k)_{k=1}^n \subseteq \mathbb{R}$ die erfüllt $\mu_{k-1} \leq \lambda_k < \mu_k \; \forall k$ schreiben wir $\lambda \Subset \mu$.

5.4.10 Definition: Riemann-Stieltjes Summe

Seien $f, h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\mu = (\mu_k)_{k=0}^n$ eine Zerlegung des Intervalls $[a, b)$ und $\lambda = (\lambda_k)_{k=1}^n \Subset \mu$. Dann heißt
$$\sum f(\lambda)\, dh(\mu) := \sum_{k=1}^n f(\lambda_k) \cdot [h(\mu_k) - h(\mu_{k-1})] \tag{5.23}$$
Riemann-Stieltjes Summe von f bzgl. h.

5.4.11 Definition: Verallgemeinerter Grenzwert

Sei $\Omega \neq \emptyset$ eine beliebige Menge, X, Y topologische Räume und $\chi : \Omega \to X$, $f : \Omega \to Y$ beliebige Funktionen. Für $x \in X$ und $y \in Y$ schreibt man $y = \lim\limits_{\chi\to x} f$ oder $y = \lim\limits_{\chi(\omega)\to x} f(\omega)$ falls für beliebige Folge $(\omega_n)_n \subseteq \Omega$ mit $\chi(\omega_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ gilt $f(\omega_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$.

Bemerkungen:

(i) Nehme an dass für jede Umgebung V von y eine Umgebung U von x existiert, so dass $\chi(\omega) \in U$ impliziert $f(\omega) \in V$. Dann gilt $y = \lim_{\chi\to x} f$.

(ii) Besitzt $x \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis, so gilt auch die Umkehrung von Bemerkung (i).

5.4.12 Lemma: Existenz des Riemann-Stieltjes Integrales

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ fast-stetig, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und linksseitig stetig. Für ein Stetigkeitsintervall $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ von f und jedes $0 < \varepsilon < (b - a)$ existiert der verallgemeinerte Grenzwert

$$\lim_{\substack{\operatorname{diam}(\mu)\to 0\\ [a+\varepsilon,b)\supseteq\lambda\Subset\mu}} \sum f(\lambda)\; dh(\mu) =: \int\limits_{[a+\varepsilon,b)} f\; dh, \tag{5.24}$$

wobei der Grenzwert über Zerlegungen μ von $[a + \varepsilon, b)$ und $\lambda \Subset \mu$ genommen wird. Außerdem existiert der Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_{[a+\varepsilon,b)} f\; dh =: \int\limits_{(a,b)} f\; dh. \tag{5.25}$$

5.4.13 Definition: Riemann-Stieltjes Integral

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ fast-stetig, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und linksseitig stetig. Sei $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $a < \mu_1 < .. < \mu_n < b$ die Unstetigkeitspunkte von f in (a, b). Wir setzen $\mu_0 := a,\ \mu_{n+1} := b$ und nennen

$$\int\limits_{(a,b)} f\; dh := \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{(\mu_k,\mu_{k+1})} f\; dh + \sum_{k=1}^{n} f(\mu_k) \cdot [h(\mu_k + 0) - h(\mu_k)] \tag{5.26}$$

Riemann-Stieltjes Integral von f bzgl. h auf (a, b). Analog definiert man

$$\int\limits_{[a,b)} f\; dh := \int\limits_{(a,b)} f\; dh + f(a) \cdot [h(a + 0) - h(a)]\,, \tag{5.27}$$

$$\int\limits_{(a,b]} f\; dh := \int\limits_{(a,b)} f\; dh + f(b) \cdot [h(b + 0) - h(b)] \tag{5.28}$$

und

$$\int\limits_{[a,b]} f\; dh := \int\limits_{(a,b)} f\; dh + f(a) \cdot [h(a + 0) - h(a)] + f(b) \cdot [h(b + 0) - h(b)]\,. \tag{5.29}$$

Bemerkungen:

(i) Seien $a < b < c \in \mathbb{R}$ und $I(a, b) \in \{(a, b), [a, b), (a, b], [a, b]\}$, analog für $I(b, c)$. Nehme an dass $I(a, b) \cap I(b, c) = \emptyset$ und $b \in I(a, b) \cup I(b, c)$. Dann gilt

$$\int\limits_{I(a,c)} f\; dh = \int\limits_{I(a,b)} f\; dh + \int\limits_{I(b,c)} f\; dh. \tag{5.30}$$

(ii) Für jedes beschränkte, reelle Intervall $I(a, b) \in \{(a, b), [a, b), (a, b], [a, b]\}$ gilt die Abschätzung

$$\left| \int\limits_{I(a,b)} f\; dh \right| \le \int\limits_{I(a,b)} |f|\; dh \le \left\| f|_{\overline{I(a,b)}} \right\|_\infty \cdot [h(b + 0) - h(a)]\,. \tag{5.31}$$

(iii) Sind $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ fast-stetig und $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, so gilt

$$\int\limits_{I(a,c)} (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)\; dh = \alpha_1 \cdot \int\limits_{I(a,b)} f_1\; dh + \alpha_2 \cdot \int\limits_{I(a,b)} f_2\; dh \tag{5.32}$$

für jedes Intervall $I(a, b) \in \{(a, b), [a, b), (a, b], [a, b]\}$.

(iv) Für zwei beschränkte Intervalle $I \subseteq J \subseteq \mathbb{R}$ gilt stets

$$\int_I |f| \; dh \leq \int_J |f| \; dh, \tag{5.33}$$

so dass der Grenzwert

$$\lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \int_{(a,b)} |f| \; dh =: \int_{-\infty}^{\infty} |f| \; dh \tag{5.34}$$

stets in $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ existiert. Er lässt sich nach Gl. (5.31) abschätzen gemäß

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f| \; dh \leq \|f\|_\infty \cdot \left[\sup_b h(b) - \inf_a h(a)\right]. \tag{5.35}$$

Existiert der Grenzwert (5.34) in $\mathbb{R}$, so heißt f **Riemann-Stieltjes integrabel bzgl.** h.

(v) f ist genau dann Riemann-Stieltjes integrabel bzgl. h wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $R_\varepsilon > 0$ existiert so dass für alle $b > a \geq R_\varepsilon$ gilt

$$\int_{(-b,a]} |f| \; dh + \int_{[a,b)} |f| \; dh < \varepsilon. \tag{5.36}$$

Gegebenfalls existiert dann auch der Grenzwert

$$\lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \int_{(a,b)} f \; dh =: \int_{-\infty}^{\infty} f \; dh \tag{5.37}$$

und es gilt die Abschätzung

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f \; dh \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f| \; dh. \tag{5.38}$$

(vi) Sind $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ fast-stetig und Riemann-Stieltjes integrabel bzgl. h und $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, so ist auch $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ Riemann-Stieltjes integrabel bzgl. h und es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) \; dh = \alpha_1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f_1 \; dh + \alpha_2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f_2 \; dh. \tag{5.39}$$

(vii) Es ist eine Verallgemeinerung des Riemann-Stieltjes Integrals auf Funktionen der Form

$$h = h_1 - h_2 + ih_3 - ih_4, \tag{5.40}$$

mit $h_1, .., h_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ linksseitig stetig und monoton wachsend möglich. In dem Falle setzt man

$$\int f \; dh := \int f \; dh_1 - \int f \; dh_2 + i \int f \; dh_3 - i \int f \; dh_4 \tag{5.41}$$

insofern alle vier Integrale auf der rechten Seite in $\mathbb{R}$ existieren. Jedoch gelten dann die Aussagen in Bemerkungen (ii), (iv) und (v) nicht mehr in ihrer ursprünglichen Form.

5.4.14 Definition: Riemann-Stieltjes Summe für Spektralscharen

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ eine Spektralschar auf $\mathcal{H}$. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Funktion, $\mu = (\mu_k)_{k=0}^n$ eine Zerlegung des Intervalls $[a, b)$ und $\lambda = (\lambda_k)_{k=1}^n \Subset \mu$. Dann heißt für $x \in \mathcal{H}$

$$\sum f(\lambda) \; dE_\mu x := \sum_{k=1}^n f(\lambda_k) \cdot \left[E_{\mu_k} - E_{\mu_{k-1}}\right] x \tag{5.42}$$

Riemann-Stieltjes Summe von f bzgl. $(E_\lambda)_\lambda$ **evaluiert in** x.

5.4.15 Lemma: Existenz des Riemann-Stieltjes Integrales für Spektralscharen

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ eine Spektralschar auf $\mathcal{H}$ mit zugehörigen Projektionsräumen $(\mathcal{H}^\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$. Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ eine fast-stetige Funktion und $x\in\mathcal{H}$. Dann gilt:

1. Es existiert für jedes Stetigkeitsintervall $[a,b)$ von f der verallgemeinerte Grenzwert

$$\lim_{\substack{\operatorname{diam}(\mu)\to 0\\ [a,b)\supseteq\lambda\Subset\mu}} \sum f(\lambda)\ dE_\mu x =: \int\limits_{[a,b)} f\ dEx, \tag{5.43}$$

   wobei der Grenzwert über Zerlegungen μ von $[a,b)$ und $\lambda\Subset\mu$ genommen wird.

2. Ist (a,b) ein Stetigkeitsintervall von f, so existiert der Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_{[a+\varepsilon,b)} f\ dEx =: \int\limits_{(a,b)} f\ dEx. \tag{5.44}$$

5.4.16 Definition: Riemann-Stieltjes Integral für Spektralscharen

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ eine Spektralschar auf $\mathcal{H}$ mit zugehörigen Projektionsräumen $(\mathcal{H}^\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$. Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ eine fast-stetige Funktion. Sei $(a,b)\subseteq\mathbb{R}$ ein Intervall und $a<\mu_1<..<\mu_n<b$ die Unstetigkeitspunkte von f in (a,b). Wir setzen $\mu_0:=a$ und $\mu_{n+1}:=b$. Für jedes $x\in\mathcal{H}$ nennen wir

$$\int\limits_{(a,b)} f\ dEx := \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{(\mu_k,\mu_{k+1})} f\ dEx + \sum_{k=1}^{n} f(\mu_k)\cdot\left[E_{\mu_k+0}-E_{\mu_k}\right]x \tag{5.45}$$

Riemann-Stieltjes Integral von f bzgl. $(E_\lambda)_\lambda$ auf (a,b), **evaluiert in** x. Analog definiert man

$$\int\limits_{[a,b)} f\ dEx := \int\limits_{(a,b)} f\ dEx + f(a)\cdot\left[E_{a+0}-E_a\right], \tag{5.46}$$

$$\int\limits_{(a,b]} f\ dEx := \int\limits_{(a,b)} f\ dEx + f(b)\cdot\left[E_{b+0}-E_b\right] \tag{5.47}$$

und

$$\int\limits_{[a,b]} f\ dEx := \int\limits_{(a,b)} f\ dEx + f(a)\cdot\left[E_{a+0}-E_a\right] + f(b)\cdot\left[E_{b+0}-E_b\right]. \tag{5.48}$$

5.4.17 Lemma: Eigenschaften des Riemann-Stieltjes Integrales für Spektralscharen

Sei $\mathcal{H}$ ein $\mathbb{K}$-Hilbertraum und $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ eine Spektralschar auf $\mathcal{H}$ mit zugehörigen Projektionsräumen $(\mathcal{H}^\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$. Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ eine fast-stetige Funktion und $I\subseteq\mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall. Dann gilt:

1. Für jedes $x\in\mathcal{H}$ gilt der *Satz des Pythagoras*

$$\left\|\int\limits_I f\ dEx\right\|^2 = \int\limits_I |f|^2\ d\left\|Ex\right\|^2, \tag{5.49}$$

   wobei $\|Ex\|^2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definiert durch $\|Ex\|^2:\lambda\mapsto\|E_\lambda x\|^2$ nach den Axiomen der Spektralschar monoton wachsend und linksseitig stetig ist. Das rechte Integral in (5.49) ist daher als normales Riemann-Stieltjes Integral aufzufassen.

2. **Linearität:** Für $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{K}$ und $x_1,x_2\in\mathcal{H}$ gilt

$$\int\limits_I f\ dE(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2) = \alpha_1\int\limits_I f\ dEx_1 + \alpha_2\int\limits_I f\ dEx_2. \tag{5.50}$$

3. Für $a < b \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathcal{H}$ gilt

$$\int\limits_{(a,b)} f\ dEx \in \mathcal{R}(E_b - E_{a+0}) = \mathcal{H}^b \ominus \mathcal{H}^{a+0}, \tag{5.51}$$

$$\int\limits_{[a,b)} f\ dEx \in \mathcal{R}(E_b - E_a) = \mathcal{H}^b \ominus \mathcal{H}^a, \tag{5.52}$$

$$\int\limits_{(a,b]} f\ dEx \in \mathcal{R}(E_{b+0} - E_{a+0}) = \mathcal{H}^{b+0} \ominus \mathcal{H}^{a+0} \tag{5.53}$$

   und

$$\int\limits_{[a,b]} f\ dEx \in \mathcal{R}(E_{b+0} - E_a) = \mathcal{H}^{b+0} \ominus \mathcal{H}^a. \tag{5.54}$$

4. Isf konstant ($= f_0 \in \mathbb{C}$) auf dem Intervall (a,b) bzw. $[a,b]$, so gilt

$$\int\limits_{(a,b)} f\ dEx = f_0 \cdot (E_b - E_{a+0})x. \tag{5.55}$$

   bzw.

$$\int\limits_{[a,b]} f\ dEx = f_0 \cdot (E_{b+0} - E_a)x. \tag{5.56}$$

5. Ist $E_\lambda x$ konstant für $\lambda \in (a,b)$ bzw. $\lambda \in [a,b)$ so gilt

$$\int\limits_{(a,b)} f\ dEx = 0. \tag{5.57}$$

   bzw.

$$\int\limits_{[a,b)} f\ dEx = 0. \tag{5.58}$$

5.4.18 Definition: Integrable Funktionen bzgl. Spektralscharen

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ eine Spektralschar auf $\mathcal{H}$. Eine fast-stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt **Riemann-Stieltjes integrabel bzgl. $(E_\lambda)_\lambda$, evaluiert in** x, falls $|f|^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Riemann-Stieltjes integrabel ist bzgl. der Funktion $\lambda \mapsto \|E_\lambda x\|^2$, das heißt das Integral

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f|^2\ d\,\|Ex\|^2 \tag{5.59}$$

in $\mathbb{R}$ existiert. Wir schreiben $\mathcal{H}_{E,f}$ für die Menge aller Vektoren $x \in \mathcal{H}$ für die f Riemann-Stieltjes integrabel bzgl. $(E_\lambda)_\lambda$, evaluiert in x, ist.

5.4.19 Satz über bzgl. Spektralscharen integrierbare Funktionen

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ eine Spektralschar auf $\mathcal{H}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ fast-stetig, dazu die Menge $\mathcal{H}_{E,f}$ definiert wie in 5.4.18. Dann gilt:

1. Für $x \in \mathcal{H}$ existiert der Grenzwert

$$\lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \int_{(a,b)} f\ dEx =: \int_{-\infty}^{\infty} f\ dEx =: \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\ dE_\lambda x \tag{5.60}$$

   genau dann wenn $x \in \mathcal{H}_{E,f}$ ist. In dem Falle existieren auch die Grenzwerte

$$\begin{aligned} \lim_{b\to\infty} \int_{(a,b)} f\ dEx &= \lim_{b\to\infty} \int_{(a,b]} f\ dEx =: \int_{(a,\infty)} f\ dEx, \\ \lim_{a\to-\infty} \int_{(a,b)} f\ dEx &= \lim_{a\to-\infty} \int_{[a,b)} f\ dEx =: \int_{(-\infty,b)} f\ dEx, \\ \lim_{b\to\infty} \int_{[a,b)} f\ dEx &= \lim_{b\to\infty} \int_{[a,b]} f\ dEx =: \int_{[a,\infty)} f\ dEx, \\ \lim_{a\to-\infty} \int_{(a,b]} f\ dEx &= \lim_{a\to-\infty} \int_{[a,b]} f\ dEx =: \int_{(-\infty,b]} f\ dEx. \end{aligned} \tag{5.61}$$

2. $\mathcal{H}_{E,f}$ ist ein linearer, dichter Teilraum von $\mathcal{H}$.
3. Ist f beschränkt, so gilt sogar $\mathcal{H}_{E,f} = \mathcal{H}$.
4. Für alle $\lambda \leq \mu \in \mathbb{R}$ ist $\mathcal{R}(E_\mu - E_\lambda) \subseteq \mathcal{H}_{E,f}$. Für $x \in \mathcal{R}(E_\mu - E_\lambda)$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\ dEx = \int_{[\lambda,\mu)} f\ dEx. \tag{5.62}$$

5. Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $E_\lambda\left(\mathcal{H}_{E,f}\right) \subseteq \mathcal{H}_{E,f}$.
6. Für $x \in \mathcal{H}_{E,f}$ gilt der Satz des Pythagoras

$$\left\| \int_{-\infty}^{\infty} f\ dEx \right\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f|^2\ d\left\|Ex\right\|^2. \tag{5.63}$$

7. **Linearität:** Für $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ und $x_1, x_2 \in \mathcal{H}_{E,f}$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\ dE(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 \int_{-\infty}^{\infty} f\ dEx_1 + \alpha_2 \int_{-\infty}^{\infty} f\ dEx_2. \tag{5.64}$$

8. Für jedes $x \in \mathcal{H}$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} dEx = x. \tag{5.65}$$

9. Es gilt $\mathcal{H}_{E,f} \cap \mathcal{H}_{E,g} \subseteq \mathcal{H}_{E,f+g}$ für alle fast-stetigen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

5.4.20 Definition: Riemann-Stieltjes Integral bzgl. Skalarprodukten

Sei $\mathcal{H}$ ein $\mathbb{K}$-Hilbertraum, $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ eine Spektralschar auf $\mathcal{H}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ fast-stetig. Zu $x, y \in \mathcal{H}$ und Intervall $I \subseteq \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ definiert man

$$\int_I f\ d\langle Ex, y\rangle := \frac{1}{4} \int_I f\ d\left\|E(x+y)\right\|^2 - \frac{1}{4} \int_I f\ d\left\|E(x-y)\right\|^2 \tag{5.66}$$

im reellen Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw.

$$\int_I f \; d\langle Ex, y\rangle := \frac{1}{4}\int_I f \; d\|E(x+y)\|^2 - \frac{1}{4}\int_I f \; d\|E(x-y)\|^2 + \frac{i}{4}\int_I f \; d\|E(x+y)\|^2 - \frac{i}{4}\int_I \|E(x-iy)\|^2 \tag{5.67}$$

im komplexen Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, insofern die rechte Seite wohldefiniert ist.

5.4.21 Definition: Spektraloperator

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ eine Spektralschar auf $\mathcal{H}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ fast-stetig. Der durch

$$\Lambda_{E,f}x := \int_{-\infty}^{\infty} f \; dEx \quad , \quad D(\Lambda_{E,f}) := \mathcal{H}_{E,f} = \left\{ y \in \mathcal{H} : \int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 \; d\|Ey\|^2 < \infty \right\} \tag{5.68}$$

definierte lineare Operator heißt **Spektraloperator zu** $(E_\lambda)_\lambda$ **und** f. Für den Fall $f(\lambda) = \lambda$ nennen wir $\Lambda_E := \Lambda_{E,\mathrm{Id}}$ einfach **Spektraloperator zu** $(E_\lambda)_\lambda$.

5.4.22 Satz über Spektraloperatoren

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ eine Spektralschar auf $\mathcal{H}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ fast-stetig und $\Lambda_{E,f}$ der zugehörige Spektraloperator. Dann gilt:

1. $D(\Lambda_{E,f})$ ist dicht in $\mathcal{H}$ und $\Lambda_{E,f} : D(\Lambda_{E,f}) \to \mathcal{H}$ ein abgeschlossener, linearer Operator.
2. Ist f beschränkt, so ist $D(\Lambda_{E,f}) = \mathcal{H}$ und $\Lambda_{E,f} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ nach Satz 3.4.6 ein beschränkter, linearer Operator.
3. Nach Satz 5.4.19(8) ist $\Lambda_{E,1}$ die Identität auf $\mathcal{H}$.
4. Für $x \in D(\Lambda_{E,f})$ und $y \in \mathcal{H}$ gilt
$$\langle \Lambda_{E,f}x, y\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \; d\langle E_\lambda x, y\rangle \,. \tag{5.69}$$
5. Es gilt
$$D(\Lambda_{E,f}^\dagger) = D(\Lambda_{E,f^*}) = D(\Lambda_{E,f}) \tag{5.70}$$
und $\Lambda_{E,f}^\dagger = \Lambda_{E,f^*}$, das heißt
$$\Lambda_{E,f}^\dagger y = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\lambda) \; dE_\lambda y \tag{5.71}$$
für jedes $y \in D(\Lambda_{E,f}^\dagger)$.
6. Ist f reellwertig, so ist der Spektraloperator $\Lambda_{E,f}$ selbstadjungiert.
7. Die Menge $\mathcal{H}^E := \bigcup_{\lambda,\mu\in\mathbb{R}} \mathcal{R}(E_\lambda - E_\mu)$ liegt dicht in $D(\Lambda_{E,f})$ bzgl. der Norm $\|\cdot\|_{\Lambda_{E,f}}$. Sie ist invariant bzgl. $\Lambda_{E,f}$, das heißt
$$\Lambda_{E,f}(\mathcal{H}^E) \subseteq \mathcal{H}^E. \tag{5.72}$$
8. Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $E_\lambda\left(D(\Lambda_{E,f})\right) \subseteq D(\Lambda_{E,f})$ und $\Lambda_{E,f}E_\lambda = E_\lambda\Lambda_{E,f}$ auf $D(\Lambda_{E.f})$.

5.4.23 Satz: Verknüpfung von Spektraloperatoren

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ eine Spektralschar auf $\mathcal{H}$, $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ fast-stetige Funktionen und $\Lambda_{E,f}$, $\Lambda_{E,g}$ die zugehörigen Spektraloperatoren. Dann gilt:

1. $\Lambda_{E,fg}(x)=\Lambda_{E,f}\Lambda_{E,g}(x)=\Lambda_{E,g}\Lambda_{E,f}(x)$ für alle $x\in\mathcal{H}^E:=\bigcup_{\lambda,\mu\in\mathbb{R}}\mathcal{R}(E_\lambda-E_\mu)$.
2. $\overline{\Lambda_{E,f}\Lambda_{E,g}}=\overline{\Lambda_{E,g}\Lambda_{E,f}}=\Lambda_{E,fg}$.
3. Falls $c_1,c_2>0$ existieren mit

$$|f(\lambda)|\leq c_1\cdot|f(\lambda)|\cdot|g(\lambda)|+c_2\quad\forall\lambda\in\mathbb{R},\tag{5.73}$$

so gilt $\Lambda_{E,f}\Lambda_{E,g}=\Lambda_{E,g}\Lambda_{E,f}=\Lambda_{E,fg}$.

Bemerkungen:

(i) Die Gleichheit von $\Lambda_{E,fg}$ und $\Lambda_{E,f}\Lambda_{E,g}$ gilt im allgemeinen nicht, da oft schon $D(\Lambda_{E,fg})\neq D(\Lambda_{E,f}\Lambda_{E,g})$. Eine hinreichende Bedingung ist z.B. durch Aussage (3) gegeben.

(ii) Anwendung von Aussage (3) auf f und $g:=f^*$ impliziert[1]

$$\Lambda_{E,f}\Lambda_{E,f}^\dagger=\Lambda_{E,f}\Lambda_{E,f^*}=\Lambda_{E,|f|^2}=\Lambda_{E,f^*}\Lambda_{E,f}=\Lambda_{E,f}^\dagger\Lambda_{E,f}\tag{5.74}$$

für alle fast-stetigen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$. Insbesondere ist $\Lambda_{E,f}$ ein normaler Operator.

(iii) Anwendung von Aussage (3) auf $f(\lambda)=\lambda$ und $g(\lambda)=\lambda^{n-1}$ impliziert [2] $\Lambda_{E,\lambda}\Lambda_{E,\lambda^{n-1}}=\Lambda_{E,\lambda^n}$. Induktiv folgt $(\Lambda_{E,\lambda})^n=\Lambda_{E,\lambda^n}$, das heißt

$$\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^n\,dE_\lambda x=\left[\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\,dE_\lambda\right]^n x\tag{5.75}$$

für alle $x\in D(\Lambda_{E,\lambda^n})$.

5.4.24 Satz: Das Spektrum des Spektraloperators

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ eine Spektralschar auf $\mathcal{H}$ mit zugehörigen Projektionsräumen[3] $(\mathcal{H}^\mu)_{\mu\in\mathbb{R}}$ und

$$\Lambda_E(x):=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\,dE_\lambda x\quad,\quad x\in D(\Lambda_E)=\left\{y\in\mathcal{H}:\int_{-\infty}^{\infty}|\lambda|^2\quad d\left\|E_\lambda x\right\|^2<\infty\right\}\tag{5.76}$$

der dazugehörige Spektraloperator. Dann gilt:

1. Λ_E ist selbstadjungiert.
2. Für $\mu\in\mathbb{R}$ gilt $\ker(\mu-\Lambda_E)=\mathcal{H}^{\mu+0}\ominus\mathcal{H}^\mu$. Insbesondere ist $\mu\in\sigma_p(\Lambda_E)$ genau dann wenn $0<\dim(\mathcal{H}^{\mu+0}\ominus\mathcal{H}^\mu)$ und $\mu\in\sigma_{p,0}(\Lambda_E)$ genau dann wenn $0<\dim(\mathcal{H}^{\mu+0}\ominus\mathcal{H}^\mu)<\infty$.
3. Es ist $\mu\in\sigma_e(\Lambda_E)$ genau dann wenn für alle $\varepsilon>0$ gilt $\dim(\mathcal{H}^{\mu+\varepsilon}\ominus\mathcal{H}^{\mu-\varepsilon})=\infty$.

Folgerung: Nehme an dass $\dim(\mathcal{H}^{\mu+\varepsilon}\ominus\mathcal{H}^{\mu-\varepsilon})>0$ für alle $\varepsilon>0$. Dann gilt eine der folgenden beiden Aussagen:

- Es existiert ein $\varepsilon_0>0$ so dass $\dim(\mathcal{H}^{\mu+\varepsilon_0}\ominus\mathcal{H}^{\mu-\varepsilon_0})<\infty$. Nach Lemma 5.4.6(3) gilt dann $0<\dim(\mathcal{H}^{\mu+0}\ominus\mathcal{H}^\mu)<\infty$. Nach Satz 5.4.24(2) folgt daraus $\mu\in\sigma_{p,0}(\Lambda_E)$.
- Für alle $\varepsilon>0$ ist $\dim(\mathcal{H}^{\mu+\varepsilon}\ominus\mathcal{H}^{\mu-\varepsilon})=\infty$. Nach 5.4.24(3) ist in dem Fall $\mu\in\sigma_e(\Lambda_E)$.

[1] Beachte dass die Abschätzung $|f|\leq\frac{1}{2}|f|^2+\frac{1}{2}$ gilt.
[2] Beachte dass die Abschätzung $|\lambda|\leq|\lambda|^n+1$ gilt.
[3] Siehe Def. 5.4.4 und Satz 5.4.5.

Auf jeden Fall gilt $\mu \in \sigma(\Lambda_E)$. Sei nun umgekehrt $\mu \in \sigma(\Lambda_E)$, dann ist nach Satz 5.1.16(2) entweder $\mu \in \sigma_{p,0}(\Lambda_E)$ oder $\mu \in \sigma_e(\Lambda_E)$, was nach Satz 5.4.24 entsprechende Auswirkungen auf die Dimension der Projektionsräume hat. Wir fassen zusammen:

$$\mu \in \rho(\Lambda_E) \;\Leftrightarrow\; \exists\, \varepsilon > 0 : \dim(\mathcal{H}^{\mu+\varepsilon} \ominus \mathcal{H}^{\mu-\varepsilon}) = 0. \tag{5.77}$$

Die *Sprungstellen* der Spektralschar $(E_\lambda)_\lambda$ entsprechen also genau dem Spektrum des Spektraloperators Λ_E. Für $\lambda \leq \mu \in \mathbb{R}$ erhält man ferner leicht die Implikationskette

$$[\lambda, \mu] \subseteq \rho(\Lambda_E) \;\Rightarrow\; \dim(\mathcal{H}^\mu \ominus \mathcal{H}^\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; (\lambda, \mu) \subseteq \rho(\Lambda_E) \;\Rightarrow\; \dim(\mathcal{H}^\mu \ominus \mathcal{H}^{\lambda+0}) = 0 \tag{5.78}$$

5.4.25 Satz: Spektralzerlegung beschränkter, selbstadjungierter Operatoren

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein selbstadjungierter, beschränkter Operator. Dann existiert eine Spektralschar $(E_\lambda)_\lambda$ auf $\mathcal{H}$, so dass gilt

$$Ax = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \; dE_\lambda x = \int_{[-\|A\|, \|A\|]} \lambda \; dE_\lambda x. \tag{5.79}$$

Dabei gilt $E_\lambda = 0$ für alle $\lambda < -\|A\|$ und $E_\lambda = \mathrm{Id}_\mathcal{H}$ für alle $\lambda > \|A\|$.

Erläuterung: Zu $\mu \in \mathbb{R}$ ist der Operator $(\mu - A)$ selbstadjungiert und beschränkt. Sei $|\mu - A| \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ der Betrag von $(\mu - A)$, definiert in 5.2.10. Dann setzt man $E_\mu : \mathcal{H} \to \mathcal{N}(|\mu - A| - (\mu - A))$ als den Orthogonalprojektor auf $\mathcal{N}(|\mu - A| - (\mu - A))$. Beachte dass $(\mu - A)E_\mu$ bzw. $(\mu - A)(1 - E_\mu)$ genau dem positiven bzw. negativen Anteil von $(\mu - A)$ entspricht.

Die Idee dabei ist folgende: Nehme an $(E_\lambda)_\lambda$ ist eine die Gl. (5.79) erfüllende Spektralschar auf $\mathcal{H}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \langle(\mu - A)E_\mu x, x\rangle &= \mu \int_{-\infty}^{\infty} d\,\langle E_\lambda E_\mu x, x\rangle - \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \; d\,\langle E_\lambda E_\mu x, x\rangle \\ &= \int_{(-\infty,\mu)} \underbrace{(\mu - \lambda)}_{\geq 0} \; d\,\langle E_\lambda x, x\rangle \geq 0 \end{aligned} \tag{5.80}$$

und analog

$$\begin{aligned} \langle(\mu - A)(1 - E_\mu)x, x\rangle &= \mu \int_{-\infty}^{\infty} d\,\langle E_\lambda(1 - E_\mu)x, x\rangle - \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \; d\,\langle E_\lambda(1 - E_\mu)x, x\rangle \\ &= \int_{[\mu,\infty)} \underbrace{(\mu - \lambda)}_{\leq 0} \; d\,\langle E_\lambda(1 - E_\mu)x, x\rangle \leq 0. \end{aligned} \tag{5.81}$$

Folglich ist

$$(\mu - A) = \underbrace{(\mu - A)E_\mu}_{\geq 0} + \underbrace{(\mu - A)(1 - E_\mu)}_{\leq 0} \tag{5.82}$$

eine Zerlegung von $(\mu - A)$ in einen nicht-negativ definiten und nicht-positiv definiten Anteil mit Hilfe des Orthogonalprojektors E_λ, ähnlich wie in 5.2.10. Die Wahl von E_λ gemäß 5.2.10 ist daher ein naheliegender Ansatz.

5.4.26 Lemma: Orthogonale Zerlegung von Operatoren

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $\mathcal{H}_n \subseteq \mathcal{H}$ abgeschlossene, orthogonale Teilräume mit

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n := \{x_1 + .. + x_n : n \in \mathbb{N},\; x_i \in \mathcal{H}_i\}\,. \tag{5.83}$$

Dazu seien $A_n \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ selbstadjungierte, beschränkte, lineare Operatoren. Dann gibt es genau einen selbstadjungierten Operator $A : D(A) \to \mathcal{H}$ mit $A\big|_{\mathcal{H}_n} = A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für ihn gilt

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \Pi_n x \quad , \quad x \in D(A) = \left\{ x \in \mathcal{H} : \sum_{n=1}^{\infty} \|A_n \Pi_n x\|^2 < \infty \right\}, \tag{5.84}$$

wobei $\Pi_n : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_n$ jeweils die Orthogonalprojektion auf $\mathcal{H}_n$ sei.

5.4.27 Theorem: Spektralzerlegung selbstadjungierter Operatoren

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $D(A) \subseteq \mathcal{H}$ ein dichter Teilraum und $A : D(A) \to \mathcal{H}$ ein linearer, selbstadjungierter Operator. Dann existiert eine eindeutige Spektralschar $(E_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ auf $\mathcal{H}$ so dass gilt

$$Ax = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE_\lambda x \quad , \quad x \in D(A) = \left\{ y \in \mathcal{H} : \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \, d\|E_\lambda y\|^2 < \infty \right\}. \tag{5.85}$$

Man schreibt auch $A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE_\lambda$ und nennt diese Darstellung **Spektraldarstellung** von A.

5.4.28 Satz: Spektralschar halbbeschränkter Operatoren

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $D(A) \subseteq \mathcal{H}$ ein dichter Teilraum und $A : D(A) \to \mathcal{H}$ ein selbstadjungierter, nach unten halbbeschränkter Operator mit unterer Schranke $c \in \mathbb{R}$. Ist $(E_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ seine nach Theorem 5.4.27 eindeutig bestimmte Spektralschar, so erfüllt diese $E_\lambda = 0$ für alle $\lambda \leq c$, das heißt

$$Ax = \int_{[c,\infty)} \lambda \, dE_\lambda x \quad \forall x \in D(A). \tag{5.86}$$

Beweis: Nach Korollar 5.2.3(2) gilt $\sigma(A) \subseteq [c, \infty)$. Nach der Implikationskette (5.78) ist $E_\lambda = E_\mu$ für alle $\lambda \leq \mu < c$, woraus sogar $E_\lambda = 0 \ \forall \lambda \leq c$ folgt.

□

5.4.29 Satz: Wurzel nicht-negativ definiter Operatoren

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $D(A) \subseteq \mathcal{H}$ ein dichter Teilraum und $A : D(A) \to \mathcal{H}$ ein selbstadjungierter, nicht-negativ definiter Operator mit Spektraldarstellung

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE_\lambda = \int_{[0,\infty)} \lambda \, dE_\lambda. \tag{5.87}$$

Dann ist der Operator $B : D(B) \to \mathcal{H}$ definiert durch

$$Bx := \int_{[0,\infty)} \sqrt{\lambda} \, dE_\lambda x \quad , \quad x \in D(B) = \left\{ x \in \mathcal{H} : \int_{[0,\infty)} \lambda \, d\|E_\lambda x\|^2 < \infty \right\} \tag{5.88}$$

selbstadjungiert, nicht-negativ definit und erfüllt $B^2 = A$. Man nennt $\sqrt{A} := B$ die **positive, symmetrische Wurzel** von A.

Bemerkungen:

(i) Für $x \in D(A)$ gilt $Ax = 0$ genau dann wenn $\sqrt{A}x = 0$ und dies genau dann wenn $\langle Ax, x \rangle = 0$.

(ii) A ist genau dann positiv definit wenn $\sqrt{A}$ positiv definit ist.

(iii) Ist $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, so ist auch $\sqrt{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und entspricht genau der in 5.2.7 definierten positiven, symmetrischen Wurzel von A.

5.4.30 Satz: Wurzel Friedrichsscher Erweiterung

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $D(A) \subseteq \mathcal{H}$ ein dichter Teilraum, $A : D(A) \to \mathcal{H}$ ein linearer, symmetrischer, stark positiv definiter Operator. Sei $\mathcal{H}_A$ sein energetischer Raum und $A_F : D(A_F) = D(A^\dagger) \cap \mathcal{H}_A \to \mathcal{H}$ seine Friedrichssche Erweiterung[4]. Sei $\sqrt{A_F}$ die positive, symmetrische Wurzel von A_F definiert in 5.4.29. Dann gilt $D(\sqrt{A_F}) = \mathcal{H}_A$ und die Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_A} : \mathcal{H}_A \to [0, \infty)$ definiert durch

$$\|x\|_{\mathcal{H}_A} := \left\| \sqrt{A_F} x \right\| \quad , \quad x \in \mathcal{H}_A \tag{5.89}$$

ist äquivalent zu den auf $\mathcal{H}_A$ existierenden energetischen Normen.

Bemerkungen:

(i) Nach Satz 5.3.5 ist A_F tatsächlich ein positiv definiter, selbstadjungierter Operator, so dass die Wurzel $\sqrt{A_F}$ wohldefiniert ist. Nach Bemerkung 5.4.29(ii) ist $\sqrt{A_F}$ ebenfalls positiv definit und damit $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_A}$ tatsächlich eine Norm auf $\mathcal{H}_A$.

(ii) Ist $A = A^\dagger$, so gilt nach 5.3.5(6) $A_F = A$. In dem Fall ist $\mathcal{H}_A = D(\sqrt{A})$ und $\|x\|_{\mathcal{H}_A} = \|\sqrt{A}x\|_{\mathcal{H}}$ für jedes $x \in \mathcal{H}_A$ bzw.

$$\|x\|_{\mathcal{H}_A} = \sqrt{\langle Ax, x \rangle} = \|x\|_{A,0} \tag{5.90}$$

für jedes $x \in D(A)$. Da $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_A}$ und $\|\cdot\|_{A,0}$ auf $\mathcal{H}_A$ äquivalent sind, folgt sogar $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_A} = \|\cdot\|_{A,0}$.

5.5 Operatoren mit reinem Punktspektrum

5.5.1 Definition: Operator mit reinem Punktspektrum

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $D(A) \subseteq \mathcal{H}$ ein dichter Teilraum und $A : D(A) \to \mathcal{H}$ ein selbstadjungierter, linearer Operator. Dann heißt A mit **reinem Punktspektrum** falls $\sigma_e(A) = \emptyset$.

Bemerkungen:

(i) Nach Satz 5.1.16(2) hat A genau dann reines Punktspektrum wenn $\sigma(A) = \sigma_{p,0}(A)$.

(ii) Insbesondere ist nach Satz 5.1.16(1) $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{p,0}(A)$ genau dann wenn $(\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ existiert.

5.5.2 Satz über Operatoren mit reinem Punktspektrum

Sei $\mathcal{H}$ ein unendlich dimensionaler Hilbertraum, $D(A) \subseteq \mathcal{H}$ ein dichter Teilraum und $A : D(A) \to \mathcal{H}$ ein selbstadjungierter, linearer Operator mit reinem Punktspektrum. Dann gilt:

1. A ist nicht beschränkt.
2. $\sigma(A)$ besteht aus abzählbar unendlich vielen Eigenwerte $(\lambda_n)_n$, die sich nicht im endlichen Häufen und alle endliche Vielfachheit haben. Insbesondere können diese nach Größe und Vielfachheit gemäß $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq .. \to \infty$ geordnet werden.
3. Ist $(x_n)_n \subseteq \mathcal{H}$ ein entsprechendes Orthonormalsystem aus Eigenvektoren ($Ax_n = \lambda_n x_n$), so ist $(x_n)_n$ vollständig in $\mathcal{H}$ und es gilt

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x_n, x \rangle \cdot x_n \quad , \quad x \in D(A) = \left\{ y \in \mathcal{H} : \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \left| \langle x_n, y \rangle \right|^2 < \infty \right\}. \tag{5.91}$$

5.5.3 Satz: Invertierung von Operatoren mit reinem Punktspektrum

Sei $\mathcal{H}$ ein unendlich dimensionaler Hilbertraum, $D(A) \subseteq \mathcal{H}$ ein dichter Teilraum, $A : D(A) \to \mathcal{H}$ ein selbstadjungierter, stark positiv definiter, linearer Operator mit reinem Punktspektrum. Sei $\mathcal{H}_A$ der zugehörige energetische Raum ausgestattet mit der energetischen Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_A}$, definiert in 5.4.30. Seien $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq .. \to \infty$ die entsprechend ihrer Vielfachheit gezählten und nach Größe geordneten Eigenwerte von A (vgl. 5.5.2), dazu das Orthonormalsystem zugehöriger Eigenvektoren $(x_n)_n \subseteq \mathcal{H}$. Dann gilt:

[4] Siehe Definitionen 5.3.3 und 5.3.4.

1. $\mathcal{H}_A = D(\sqrt{A}) = \left\{x \in \mathcal{H} : \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left|\langle x_n, x\rangle\right|^2 < \infty\right\}$.

2. Das System $\left(\frac{x_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right)_n$ ist ein vollständiges Orthonormalsystem in $\mathcal{H}_A$ und $\sqrt{A} : (\mathcal{H}_A, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_A}) \to (\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ unitär.

3. Es gelten $A^{-1} \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, $(\sqrt{A})^{-1} \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ und $A^{-1} \in \mathcal{K}(\mathcal{H}, \mathcal{H}_A)$.

4. Es gilt $A^{-1}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \langle x_n, x\rangle \cdot x_n$ und $(\sqrt{A})^{-1}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \langle x_n, x\rangle \cdot x_n$ für jedes $x \in \mathcal{H}$.

5.5.4 Satz: Charakterisierung reiner Punktspektren [Rellich]

Sei $\mathcal{H}$ ein unendlich dimensionaler Hilbertraum, $D(A) \subseteq \mathcal{H}$ ein dichter Teilraum, $A : D(A) \to \mathcal{H}$ ein selbstadjungierter, stark positiv definiter, linearer Operator mit energetischem Raum $(\mathcal{H}_A, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_A})$. Dann ist A mit reinem Punktspektrum genau dann wenn $\mathrm{Id}_{\mathcal{H}_A \to \mathcal{H}} \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_A, \mathcal{H})$.

5.5.5 Anwendung: Elliptische Randwertprobleme

Betrachten $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit glattem Rand $\partial\Omega$. Wir betrachten auf $(L_2(\Omega), \langle\cdot,\cdot\rangle_{L_2(\Omega)})$ den *schwachen* Laplace-Operator $-\Delta := -\sum_{k=1}^{n} \partial_{x^j}^2$ und die Dirichlet- bzw Neumann-Randwertprobleme:

- **Dirichlet:** $-\Delta u \stackrel{!}{=} f$ für ein vorgegebenes $f \in L_2(\Omega)$, mit Randbedingung $u\big|_{\partial\Omega} = 0$.
- **Neumann:** $-\Delta u \stackrel{!}{=} f$ für ein vorgegebenes $f \in L_2(\Omega)$, mit Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\big|_{\partial\Omega} = 0$ und $\mathbf{n}$ als Normaleneinheitsvektor auf $\partial\Omega$.

Für jedes der beiden Randwertprobleme sucht man Lösungen in geeigneten Unterräumen, in $L_2(\Omega)$ dichten Definitionsgebieten von Δ:

$$\begin{aligned} D(-\Delta_{\mathrm{D}}) &:= \left\{u \in \mathcal{W}_2^2(\Omega) : u\big|_{\partial\Omega} = 0\right\}, \\ D(-\Delta_{\mathrm{N}}) &:= \left\{u \in \mathcal{W}_2^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0\right\}, \end{aligned} \tag{5.92}$$

mit $\mathcal{W}_p^k(\Omega)$ (**Sobolevraum**) als Raum der komplexwertigen Funktionen, deren gemischte partielle schwache Ableitungen bis zur Ordnung k im Lebesgue-Raum $L_p(\Omega)$ liegen. Es lässt sich zeigen dass sowohl $-\Delta_{\mathrm{D}}$ als auch $-\Delta_{\mathrm{N}}$ symmetrische, nicht-negativ definite Operatoren sind. Noch dazu ist $-\Delta_{\mathrm{D}} : D(-\Delta_{\mathrm{D}}) \to L_2(\Omega)$ selbstadjungiert, stark positiv definit mit reinem Punktspektrum. Nach Satz 5.5.3 ist damit das Dirichlet-RWP in $\mathcal{W}_2^2(\Omega)$ stets eindeutig lösbar und hängt stetig von f ab.

Seien $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq .. \to \infty$ die nach Größe und Vielfachheit geordneten Eigenwert von $-\Delta_{\mathrm{D}}$, dazu $(u_n)_n \in D(-\Delta_{\mathrm{D}})$ ein entsprechendes Orthonormalsystem aus Eigenvektoren. Dann gilt für $u \in D(-\Delta_{\mathrm{D}})$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ nach Satz 5.5.2(3)

$$(-\Delta_{\mathrm{D}} - \lambda)u = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \lambda) \cdot \langle u_n, u\rangle \cdot u_n. \tag{5.93}$$

Das RWP

$$(-\Delta_{\mathrm{D}} - \lambda)u \stackrel{!}{=} f \quad , \quad u \in D(-\Delta_{\mathrm{D}}) \tag{5.94}$$

ist daher äquivalent zu

$$(\lambda_n - \lambda) \cdot \langle u_n, u\rangle \stackrel{!}{=} \langle u_n, f\rangle \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{5.95}$$

Ist $\lambda \neq \lambda_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, so ist

$$u := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle u_n, f\rangle}{\lambda_n - \lambda} \cdot u_n \tag{5.96}$$

die eindeutige Lösung von (5.94). Im Fall $\lambda = \lambda_k = .. = \lambda_{k+l}$, ist (5.94) genau dann Lösbar, sprich $f \in \mathcal{R}(-\Delta_\mathrm{D} - \lambda)$, wenn[5] $f \perp \mathcal{N}(-\Delta_\mathrm{D} - \lambda)$ und dies genau dann wenn $f \perp u_k, .., u_{k+l}$. In dem Fall ist

$$u := \sum_{\substack{n \leq k-1 \\ n \geq k+l+1}} \frac{\langle u_n, f\rangle}{\lambda_n - \lambda} \cdot u_n + \sum_{n=k}^{k+l} \alpha_n \cdot u_n \tag{5.97}$$

die allgemeine Lösung von (5.94), mit $\alpha_k, .., \alpha_{k+l} \in \mathbb{C}$ als freien Lösungsparametern.

[5] Vgl. Satz 5.1.17 und Aufspaltung $\mathcal{H} = \mathcal{N}(-\Delta_\mathrm{D} - \lambda) \oplus \overline{\mathcal{R}(-\Delta_\mathrm{D} - \lambda)}$.

6 Symbol-Referenz

$\mathbb{K}$: Allgemeiner Körper. Hier: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

$\mathbb{K}^{n\times n}$: Der $\mathbb{K}$-Vektorraum aller $n \times n$ Matrizen über Körper $\mathbb{K}$.

$\mathscr{P}(M)$: Potenzmenge einer Menge M.

E': Topologischer Dualraum zum normierten Raum E.

E'': Topologischer Bidualraum zum normierten Raum E.

$\langle x, a\rangle$: Für Vektor $x \in E$ und Funktional $a \in E'$: $\langle x, a\rangle := a(x)$.

$\mathbf{e}_k$: Standard-Einheitsvektor in $\mathbb{K}^n$.

z^*: Komplex-Konjugierte zu $z \in \mathbb{C}$.

$\mathcal{C}(M)$: Raum aller stetigen Funktionen $M \to \mathbb{C}$.

$\mathcal{C}(M, N)$: Raum aller stetigen Funktionen $M \to N$.

$\mathcal{C}_b(M)$: Raum aller stetigen, beschränkten Funktionen $M \to \mathbb{C}$. Konventionell ausgestattet mit der Norm $\|f\|_\infty := \sup_{t\in M} |f(t)|$.

$\mathcal{C}_b(M, N)$: Raum aller stetigen, beschränkten Funktionen $M \to N$.

1_A: Indikatorfunktion für Menge A.

Id: Identitätsabbildung.

$\mathscr{B}(T)$: Borel-σ-Algebra von T.

$L_p(\mu)$: Funktionenraum der p-integrierbaren, komplexwertigen Funktionen auf dem Maßraum $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$.

$L_p(\mathbb{R}^n)$: Funktionenraum der p-integrierbaren, komplexwertigen Funktionen auf dem Maßraum $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n), \lambda^n)$, mit λ^n als n-dimensionalem Lebesgue-Maß.

$l_p(\mathbb{N})$: Raum aller $p \in [1, \infty)$-summierbaren, komplexwertigen Folgen.

$l_\infty(\mathbb{N})$: Raum aller beschränkten, komplexwertigen Folgen.

$c_0(\mathbb{N})$: Raum aller komplexwertigen, gegen 0 konvergierenden Folgen.

$c_{00}(\mathbb{N})$: Raum aller komplexwertigen Folgen mit nur endlich vielen nicht-trivialen Gliedern.

$\overline{U}$: Für Untermenge $U \subset X$ eines topologischen Raumes X: Abschluss $\mathrm{cl}(U) = \overline{U}$ von U. Siehe 3.1.2.

$U^\perp$: Orthogonales Komplement von U in einem Hilbertraum bzw. Annihilator von U im Dualraum. Siehe 3.6.1 und 4.2.5.

$V_\perp$: Annihilatorraum zu V. Siehe 3.6.1 und 4.2.5.

$\mathcal{H} \ominus U$: Orthogonales Komplement des abgeschlossenen Teilraumes U im Hilbertraum $\mathcal{H}$. Siehe 2.2.5.

$B_r(x)$: Abgeschlossene Kugel um x mit Radius r.

$B_r^o(x)$: Offene Kugel um x mit Radius r.

$\mathrm{supp}(f) := \mathrm{cl}\,\{x \in X : f(x) \neq 0\}$: Träger von $f : X \to \mathbb{C}$.

$T^\dagger$: Adjungierte Operator zu T. Für Matrix $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist $M^\dagger = (M^T)^*$.

T': Duale Operator zu T.

$D(A)$: Definitionsgebiet eines Operators A.

$\mathcal{J}_E$: Kanonische Einbettung $\mathcal{J}_E : E \to E''$ des Banachraumes E in sein Bidual E''.

$\mathscr{R}_{\mathcal{H}}$: Isometrischer Isomorphismus $\mathscr{R}_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ definiert durch $x \mapsto \langle x, \cdot \rangle$.

$\mathcal{N}(T)$: Nullraum (Kern) des Operators T: $\mathcal{N}(T) = \text{kernel}(T)$.

$\mathcal{R}(T)$: Bildraum des Operators T: $\mathcal{R}(T) := \text{image}(T)$.

$\text{rang}(T)$: Rank des Operators T: $\text{rang}(T) := \dim \text{image}(T)$.

$\|T\|$: Operatornorm des Operators T.

$\mathcal{L}(E, F)$: Raum aller linearer, beschränkten Operatoren zwischen den normierten Räumen E, F.

$\mathcal{L}(E)$ $:= \mathcal{L}(E, E)$.

$\mathcal{K}(E, F)$: Raum aller linearen, kompakten Operatoren zwischen den normierten Räumen E, F. Siehe 2.2.12.

$\mathcal{K}(X)$ $:= \mathcal{K}(X, X)$.

$a \otimes x$: Tensorprodukt zwischen $a \in E',\ x \in E$.

$\sigma(T)$: Spektrum des Operators T. Siehe 2.3.4.

$\rho(T)$: Resolventenmenge des Operators T. Siehe 2.3.4.

$\sigma_p(T)$: Punktspektrum (Eigenwerte) des Operators T. Siehe 2.3.4.

$\sigma_{p,0}(T)$: Eigenwerte des Operators T mit endlicher geometrischer Vielfachheit. Siehe 2.3.4.

$\sigma_e(T)$: Siehe 2.3.4.

$\text{Alg}_T(\lambda)$: Algebraische Vielfachheit von $\lambda \in \mathbb{C}$ bzgl. des Operators T.

$\text{Geom}_T(\lambda)$: Geometrische Vielfachheit von $\lambda \in \mathbb{C}$ bzgl. des Operators T.

$r(A)$: Spektralradius des linearen Operators A. Siehe 2.3.5.

$(X, X^\dagger, \langle \cdot, \cdot \rangle)$: Dualsystem mit Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Siehe 4.2.1.

$\mathcal{H}_A$: Energetischer Raum des linearen Operators $A : D(A) \subseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Siehe 5.3.3.

A_F: Friedrichssche Erweiterung des linearen Operators A. Siehe 5.3.4.

$\overline{A}$: Abschluss des linearen Operators A. Siehe 3.4.1.

G_T: Graph des linearen Operators T. Siehe 3.4.1.

$\|\cdot\|_T$: Vom Operator T auf $D(T)$ induzierte Norm. Siehe 3.4.3.

$\Lambda_{E,f}$: Spektraloperator zur Spektralschar $(E_\lambda)_\lambda$ und fast-stetiger $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Siehe 5.4.21.

$\mathcal{H}_{E,f}$: $= D(\Lambda_{E,f})$. Definitionsgebiet des Spektraloperators $\Lambda_{E,f}$. Siehe 5.4.18 und 5.4.21.

$\mathcal{H}^E$: $:= \bigcup_{\lambda,\mu \in \mathbb{R}} \mathcal{R}(E_\lambda - E_\mu)$, mit $(E_\lambda)_\lambda$ als Spektralschar. Siehe 5.4.22.

Λ_E: $= \Lambda_{E,\text{Id}}$. Siehe 5.4.21.

$\lambda \Subset \mu$: Siehe 5.4.9.

Literatur

[1] D. Werner, *Funktionalanalysis*
Springer, 2005

[2] H. Heuser, *Funktionalanalysis: Theorie und Anwendung. Lehrbuch. 4. Auflage*
Vieweg & Teubner, 2006

[3] Y. A. Abramovich, C. D. Aliprantis, *Problems in operator theory*
American Mathematical Soc., 2002

[4] H. Triebel, *Higher analysis*
Huthig Pub Ltd, 1997

[5] N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear Operators, Spectral Theory, Self Adjoint Operators in Hilbert Space*
John Wiley & Sons, 1988

[6] T. Eisner, *Stability of operators and operator semigroups*
Birkhäuser, 2010

[7] K.J. Engel, R. Nagel, *One-parameter semigroups for linear evolution equations*
Springer, 2000

[8] M. Zima, *Positive operators in Banach spaces and their applications*
Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego, 2005