Gruppentheorie

FSU Jena - SS 2009

Übungsserie 11 - Lösungen

Stilianos Louca

July 5, 2009

Aufgabe 43

G operiert durch Linksmultiplikation auf sich selbst. Sei $\tau : G \to \mathrm{Sym}(|G|)$ der entsprechende Monomorphismus (Satz von Caley). Sei $x \in G$ ein Element der Ordnung 2 (Sylow). Dann ist $\tau(x)$ ein Produkt von disjunkten Transpositionen. Wegen $xg \neq g \;\; \forall\, g \in G$ hat $\tau(x)$ keine Fixpunkte, ist also ein Produkt von $\frac{|G|}{2} = n$ disjunkten Transpositionen.
Insbesondere $\tau(x) \notin \mathrm{Alt}(|G|)$. Also ist

$$\tau(G) \cap \mathrm{Alt}(|G|) \trianglelefteq \tau(G)$$

und

$$|\tau(G) : \tau(G) \cap \mathrm{Alt}(|G|)| = |\tau(G)\,\mathrm{Alt}(|G|) : \mathrm{Alt}(|G|)| = |\mathrm{Sym}(|G|) : \mathrm{Alt}(|G|)| = 2$$

Also erfüllt

$$H := \tau^{-1}\left(\tau(G) \cap \mathrm{Alt}(|G|)\right)$$

die Behauptung.
□

Aufgabe 44

Sei $\mathfrak{B} := \mathfrak{B}(n, \mathbb{K})$ die Gruppe aller oberen-Dreiecksmatrizen aus $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ und $\mathfrak{D} := \mathfrak{D}(n, \mathbb{K})$ die Gruppe aller Matrizen aus $\mathfrak{B}$ mit 1-Diagonale. Dabei besteht für $A, B \in \mathfrak{B}$ die Diagonale von AB stets aus den Einträgen $(A_{11}B_{11}, ..., A_{nn}B_{nn})$.

Behauptung: $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{N}_G(\mathfrak{D})$.
Beweis: Für $A \in \mathfrak{B}$ und $M \in \mathfrak{D}$ gilt

$$AMA^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}M_{11}A_{11}^{-1} & \dots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & A_{nn}M_{nn}A_{nn}^{-1} \end{pmatrix} \overset{M_{ii}=1}{\in} \mathfrak{D}$$

Behauptung: $\mathcal{N}_G(\mathfrak{D}) \subseteq \mathfrak{B}$.
Beweis: Betrachten die Familie von Matrizen $H^{(ij)} \in \mathfrak{D},\ 1 \leq i < j \leq n$ definiert durch

$$H^{(ij)} := 1 + \left(\delta_{ki}\delta_{lj}\right)_{k,l=1}^{n} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccc} & & & & & j & & \\ & & & & & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \rightarrow \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Dann muss für $A \in \mathcal{N}_G(\mathfrak{D})$ gelten:

$$\cancel{A} + \underbrace{\begin{array}{c}\scriptstyle j\\ \scriptstyle\downarrow\\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & A_{1i} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & A_{ni} & \dots & 0 \end{pmatrix}\end{array}}_{A(H^{(ij)}-1)} = AH^{(ij)} \overset{!}{=} MA = A + \begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & 0 \end{pmatrix} A = \cancel{A} + \begin{pmatrix} * & \dots & * \\ \vdots & & \vdots \\ * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

für irgendein $M \in \mathfrak{D}$, für alle $i < j$, das heißt A hat die Form

$$A = \begin{pmatrix} * & \dots & * & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & \dots & * & * \\ 0 & \dots & 0 & * \end{pmatrix}$$

Induktiv (über die untere Zeile nach oben) folgt aus

$$A = \begin{array}{r} \\ \\ \\ k \rightarrow \\ \\ \\ \\ \end{array}\!\begin{pmatrix} * & \dots & * & * & \dots & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ * & \dots & * & * & \dots & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & * & \dots & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & & 0 & * \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\underbrace{\begin{array}{c}\scriptstyle j\\ \scriptstyle\downarrow\\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & A_{1i} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & A_{ni} & \dots & 0 \end{pmatrix}\end{array}}_{A(H^{(ij)}-1)} \overset{!}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & 0 \end{pmatrix}}_{M-1} \cdot \underbrace{\begin{array}{r} \\ \\ \\ k \rightarrow \\ \\ \\ \\ \end{array}\!\begin{pmatrix} * & \dots & * & * & \dots & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ * & \dots & * & * & \dots & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & * & \dots & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & & 0 & * \end{pmatrix}}_{A}$$

$$= \begin{array}{r} \\ \\ \\ (k-1) \rightarrow \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\!\begin{pmatrix} * & \dots & * & * & * & \dots & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ * & \dots & * & * & * & \dots & \dots & * \\ 0 & & 0 & 0 & * & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 0 & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad i < j \leq n$$

die eingeschränktere Form

$$A = \begin{array}{r} \\ \\ \\ (k-1) \rightarrow \\ \\ \\ \\ \end{array}\!\begin{pmatrix} * & \dots & * & * & \dots & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ * & \dots & * & * & \dots & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & * & \dots & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & & 0 & * \end{pmatrix}$$

und schließlich $A \in \mathfrak{B}$.
$\square$

Aufgabe 45

Sei $g \in \mathrm{Alt}(n)$ mit Typ $(k_1, .., k_l)$, o.B.d.A. $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_l$.

Bemerkung 1: Ein Zyklus ist genau dann in $\mathrm{Alt}(n)$ wenn er ungerade Länge hat[1].
Bemerkung 2: Bekanntlich ist $C_{\mathrm{Sym}(n)}(g) \nsubseteq \mathrm{Alt}(n)$ genau dann wenn die Konjugationsklasse $\mathrm{Orb}_{\mathrm{Sym}(n)}(g)$ von g (sprich, alle Permutationen vom Typ $(k_1, .., k_l)$) auch eine einzige Konjugationsklasse $\mathrm{Orb}_{\mathrm{Alt}(n)}(g)$ in $\mathrm{Alt}(n)$ ist.

Behauptung: Ist irgendein k_i gerade, so ist $C_{\mathrm{Sym}(n)}(g) \nsubseteq \mathrm{Alt}(n)$.
Beweis:

g kommutiert mit seinem i-ten Zyklus, der jedoch nicht in $\mathrm{Alt}(n)$ liegt.

Behauptung: Sind irgendwelche $k_i = k_j,\ i \neq j$, so ist $C_{\mathrm{Sym}(n)}(g) \nsubseteq \mathrm{Alt}(n)$.
Beweis:

Seien $(n_1, .., n_k),\ (m_1, .., m_k)$ zwei gleich-lange (disjunkte) Zyklen von g, dann kommutiert g mit $\underbrace{(n_1, m_1, ..., n_k, m_k)}_{\notin \mathrm{Alt}(n)}$ denn

$$(n_1, .., n_k)(m_1, .., m_k)(n_1, m_1, .., n_k, m_k) = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & \dots & n_k & m_1 & m_2 & \dots & m_k \\ m_2 & m_3 & \dots & m_1 & n_3 & n_4 & \dots & n_2 \end{pmatrix}$$

$$= (n_1, m_1, .., n_k, m_k)(n_1, .., n_k)(m_1, .., m_k)$$

Behauptung: Jede Permutation $\sigma \in \mathrm{Sym}(m)$ die den Zyklus $(1, 2, .., m)$ durch Konjugation in sich selber überführt, hat Vorzeichen $+1$ falls m ungerade.
Beweis:

Es gilt

$$\sigma(1, .., m)\sigma^{-1} = (1, .., m) \ \Leftrightarrow\ (\sigma(1), .., \sigma(m)) \overset{\substack{\text{als}\\ \text{Zyklen}}}{=} (1, .., m)$$

$$\Leftrightarrow\ \sigma = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m-k-1 & m-k & m-k+1 & \dots & m \\ 1+k & 2+k & \dots & m-1 & m & 1 & \dots & k \end{pmatrix}}_{\text{Länge } (m-k)\cdot k} \quad \text{für ein} \quad k \in \{0, .., m-1\}$$

wobei für $k \in \{0, .., m\}$ der Ausdruck $(m-k) \cdot k$ stets gerade ist falls m ungerade.

Behauptung: Jede Permutation $\sigma \in \mathrm{Sym}(m)$ die den Zyklus $(1, 2, .., m)$ durch Konjugation in den Zyklus $(2, 1, 3, 4, .., m)$ überführt, hat Vorzeichen -1 falls $m \geq 3$ ungerade.
Beweis:

Analog zu oben gilt

$$\sigma(1, .., m)\sigma^{-1} = (2, 1, 3, .., m) \ \Leftrightarrow\ (\sigma(1), .., \sigma(m)) \overset{\substack{\text{als}\\ \text{Zyklen}}}{=} (2, 1, 3, .., m)$$

$$\Leftrightarrow\ \sigma = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & m-k & m-k+1 & \dots & m \\ 2+k & 1+k & 3+k & \dots & m & 1 & \dots & m+k \end{pmatrix}}_{\text{Länge } (m-k)\cdot k+1} \quad \text{für ein} \quad k \in \{0, .., m-1\}$$

wobei für $k \in \{0, .., m-1\}$ der Ausdruck $(m-k) \cdot k + 1$ stets ungerade ist falls m ungerade.

[1] Da das Vorzeichen von Permutationen nur vom Typ abhängt, können wir o.B.d.A. Zyklen der Art $(1, .., k)$ betrachten.

Behauptung: Sind alle Zyklenlängen k_i ungerade und paarweise verschieden, so liegt $C_{\mathrm{Sym}(n)}(g) \subseteq \mathrm{Alt}(n)$.
Beweis:

Der Fall $n = 1$ ist klar, denn $\mathrm{Sym}(1) = \mathrm{Alt}(1)$. Der Fall $n = 2$ ist ebenso klar, da es keine Permutationen mit obigem Typ gibt. Sei also $n \geq 3$. Nach Voraussetzungen muss dann $k_1 \geq 3$ sein.

Nach Bemerkung (2) genügt es zu zeigen, dass unter obigen Voraussetzungen zwei Permutationen vom Typus $(k_1, .., k_l)$ existieren, die nicht in $\mathrm{Alt}(n)$ konjugiert sind. Sei

$$g = (1, 2, .., k_1)\underbrace{(k+1,\ .., k_1 + k_2)}_{c_2} \ldots \underbrace{(k_1 + .. + k_{l-1} + 1,\ .., k_1 + .. + k_l)}_{c_l}$$

die Zyklenzerlegung von g und

$$\widetilde{g} := (2, 1, 3, .., k_1) \cdot c_2 \ldots c_l$$

eine zu g konjugierte Permutation, dazu $h \in \mathrm{Sym}(n)$ mit $hgh^{-1} = \widetilde{g}$. Dann

$$hgh^{-1} = h(1, .., k_1)h^{-1} \cdot hc_2h^{-1} \cdot .. \cdot hc_lh^{-1} = (1, .., k_1) \cdot c_2 \cdot .. \cdot c_l$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{h(1, .., k_1)h^{-1}}_{(h(1),..,h(k_1))} = (2, 1, 3, .., k_1) \ \wedge \ hc_ih^{-1} = c_i \quad , \quad i \in \{2, .., l\}$$

$$\Leftrightarrow h = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & k_1 & k_1 + 1 & \ldots & k_1 + k_2 & \ldots & k_1 + .. + k_l \\ \sigma_1(1) & \ldots & \sigma_1(k_1) & \sigma_2(k_1 + 1) & \ldots & \sigma_2(k_1 + k_2) & \ldots & \sigma_l(k_1 + .. + k_l) \end{pmatrix}$$

für irgendwelche $\sigma_i \in \underbrace{\mathrm{Sym}(\{k_1 + .. + k_{i-1} + 1, .., k_1 + .. + k_i\})}_{\cong \mathrm{Sym}(k_i)}$, $i = 1, .., l$

mit $\sigma_1(1, .., k_1)\sigma_1^{-1} = (2, 1, 3, .., k_1) \ \wedge \ \sigma_i c_i \sigma_i^{-1} = c_i$, $i = 2, .., l$

$$\Rightarrow \ \mathrm{sgn}(h) = \prod_{i=1}^{l} \mathrm{sgn}(\sigma_i) = -1 \quad \Rightarrow \ h \notin \mathrm{Alt}(n)$$

Fazit: Für $g \in \mathrm{Alt}(n)$ ist

$$\boxed{C_{\mathrm{Sym}(n)}(g) \subseteq \mathrm{Alt}(n) \quad \Leftrightarrow \quad k_1, .., k_l \text{ ungerade, paarweise verschieden}}$$

Alternative zu Richtung "$\Leftarrow$": Sei

$$g = \underbrace{(g_1^1, g_2^1, .., g_{k_1}^1)}_{c_1}\underbrace{(g_1^2, .., g_{k_2}^2)}_{c_2} \ldots \underbrace{(g_1^l, .., g_{k_l}^l)}_{c_l}$$

die Zyklenzerlegung von g. Offenbar ist dann

$$\underbrace{\langle c_1 \rangle \oplus .. \oplus \langle c_l \rangle}_{\text{Ordnung } k_1 \cdot \ldots \cdot k_l} \subseteq C_{\mathrm{Sym}(n)}(g)$$

Anderseits besitzt die Konjugationsklasse von g in $\mathrm{Sym}(n)$ genau

$$\frac{n!}{k_1 \cdot .. \cdot k_l} = \left|\mathrm{Sym}(n) : C_{\mathrm{Sym}(n)}(g)\right|$$

Elemente, das heißt

$$C_{\mathrm{Sym}(n)}(g) = \langle c_1 \rangle \oplus .. \oplus \langle c_l \rangle$$

Da alle k_i ungerade sind, also $c_i \in \mathrm{Alt}(n)$, folgt

$$C_{\mathrm{Sym}(n)}(g) \subseteq \mathrm{Alt}(n)$$

□

Aufgabe 46

(i) O.B.d.A. sei $p > 2$ und $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$.

a) Sei $|G| = 4p^n$. Nach Sylow ist $\underbrace{|G : \mathcal{N}_G(P)|}_{\big|\ |G|} = 1(\mathrm{mod}\ p)$, also

$$|G : \mathcal{N}_G(P)| \in \{1, 4\}$$

Im Fall $|G : \mathcal{N}_G(P)| = 1$ ist $P \trianglelefteq G$. Da dann P (als p-Gruppe) und G/P (als 2-Gruppe) auflösbar wären, wäre auch G auflösbar, und wir sind fertig.

Sei also $|G : \mathcal{N}_G(P)| = 4$. Die Operation von G auf $G/\mathcal{N}_G(P)$ liefert einen Homomorphismus $\tau : G \to \mathrm{Sym}(4)$ mit $\ker(\tau) \subseteq \mathcal{N}_G(P) = P$. Wegen

$$G/\ker(\tau) \cong \mathrm{image}(\tau) \leq \underbrace{\mathrm{Sym}(4)}_{\substack{\text{auflösbar}\\ \text{da Ordnung } 2^3 \cdot 3}}$$

sind $\underbrace{\ker(\tau)}_{p-\text{Gruppe}}$ und $G/\ker(\tau)$ auflösbar. Daher ist auch G auflösbar.

b) Sei $|G| = 8p^n$. Dann ist $\underbrace{|G : \mathcal{N}_G(P)|}_{1(\mathrm{mod}\ p)} \in \{1, 4, 8\}$. Im Fall $|G : \mathcal{N}_G(P)| = 1$ folgt die Behauptung wie im obigen Fall. Im Fall $|G : \mathcal{N}_G(P)| = 4$ ist $\mathcal{N}_G(P)$ wegen $|\mathcal{N}_G(P)| = 2p^n$ auflösbar. Also kann man auch hier wie in (a) argumentieren.

Sei also $|G : \mathcal{N}_G(P)| = 8$. Wegen $|G : \mathcal{N}_G(P)| = 1(\mathrm{mod}\ p)$ ist dann $p = 7$. Sei τ wie in (a). Dann

$$|G/\ker(\tau)| \ \Big|\ \mathrm{ggT}\left(|\mathrm{Sym}(8)|, |G|\right) = \mathrm{ggT}(8!, 8 \cdot 7^n) = 7 \cdot 2^3$$

Also ist $G/\ker(\tau)$ auflösbar. Wegen $\ker(\tau) \subseteq \mathcal{N}_G(P) = P$ ist auch $\ker(\tau)$ auflösbar (da p-Gruppe). Daher ist G auflösbar.

(ii) Sei $|G| \in \{61, ..., 119\}$. Existiert ein $\{1\} < N \lhd G$ so ist $|N|,\ |G/N| < 60$. Dann wären N und G/N auflösbar, somit auch G. Nehmen also o.B.d.A. an dass G einfach ist. Da Gruppen vom Ordnungstyp $p^a q,\ p^2 q^2,\ pqr,\ 4p^n,\ 8p^n\ (p, q, r \in \mathbb{P},\ a \in \mathbb{N}_0)$ stets auflösbar sind, sind nur noch folgende Fälle extra zu betrachten:

a) $|G| = 84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$. Man sieht leicht, dass G nur eine (und somit normale) 7-Sylowgruppe P hat. Wegen $|G : P| = 2^2 \cdot 3$ ist G/P auflösbar, daher auch G.

b) $|G| = 90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$. Nach Übungsaufgabe (43) besitzt G einen Normalteiler N mit Index 2, der wegen $|N| = 2 \cdot 3^2$ auflösbar ist. Daher ist auch G auflösbar.

c) $|G| = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ (und G einfach). Dann hat G genau 6 5-Sylowgruppen. Sei $P \in \mathrm{Syl}_5(G)$, dann liefert die Operation von G auf $G/\mathcal{N}_G(P)$ einen Homomorphismus $\tau : G \to \mathrm{Sym}(6)$. Wegen

$$\ker(\tau) \subseteq \mathcal{N}_G(P) \overset{\substack{G\\ \text{einfach}}}{<} G$$

ist $\ker(\tau) = \{1\}$ (da G als einfach). Also ist $G \cong \tau(G) \leq \mathrm{Sym}(6)$. Im Fall $\tau(G) \nsubseteq \mathrm{Alt}(6)$ wäre $1 \neq \tau(G) \cap \mathrm{Alt}(6) \lhd \tau(G)$, denn

$$720 = |\mathrm{Sym}(6)| = |\tau(G) \cdot \mathrm{Alt}(6)| = \frac{\overbrace{|\tau(G)|}^{120} \cdot \overbrace{|\mathrm{Alt}(6)|}^{360}}{|\tau(G) \cap \mathrm{Alt}(6)|}$$

Doch dies verträgt sich nicht mit der Einfachheit von $\tau(G)$, daher $\underbrace{\tau(G)}_{\substack{\text{Ordnung}\\ 120}} \subseteq \underbrace{\mathrm{Alt}(6)}_{\substack{\text{Ordnung}\\ 360}}$ und $|\mathrm{Alt}(6) : \tau(G)| = 3$.

Die Operation von $\mathrm{Alt}(6)$ auf $\mathrm{Alt}(6)/\tau(G)$ liefert einen Homomorphismus $\psi : \mathrm{Alt}(6) \to \mathrm{Sym}(3)$. Da $\mathrm{Alt}(6)$ einfach ist, ist $\ker\psi = \{1\}$ und $\mathrm{Alt}(6) \cong \psi(\mathrm{Alt}(6)) \leq \mathrm{Sym}(3)$, ein Widerspruch!

Daher ist G nicht einfach und schon in der Vorüberlegung behandelt worden.

(iii) Offenbar ist

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \in Z(\mathrm{SL}(2,5)) \neq \{1\}$$

Anderseits ist $Z(\mathrm{Sym}(5)) = \{1\}$ (Übungsaufgabe 05), daher $\mathrm{SL}(2,5)$ und $\mathrm{Sym}(5)$ <u>nicht</u> isomorph.