Gruppentheorie

FSU Jena - SS 2009

Übungsserie 10 - Lösungen

Stilianos Louca

27. Juni 2009

Aufgabe 39

Schreibweise: $k + n\mathbb{Z} =: [k]_n$.

Seien zunächst $n, N \in \mathbb{N}$ (n *Perlen* und N *Farben*). Betrachten die Menge

$$\Omega := \{\underbrace{(p_{[0]_n}, .., p_{[n-1]_n})}_{=:p} : p_{[i]_n} \in \{1, .., N\}\}$$

und die Diedergruppe

$$G := D_{20} := C_n \rtimes_\vartheta C_2 := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes_\vartheta \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad , \quad \vartheta([1]_2) : g \mapsto g^{-1}$$

Dann operiert G auf Ω durch die Operation

$$^{([m]_n,[0]_2)}p := \left(p_{[0]_n+[m]_n}, .., p_{[n-1]_n+[m]_n}\right) \quad , \quad ^{([m]_n,[1]_2)}p := {}^{([m]_n,[0]_2)}(p_{[n-1]_n}, .., p_{[0]_n})$$

sprich, $([m]_n, [1]_2)$ bewirkt eine Umkehrung und m *Rechtsverschiebungen* der Perlen. Die gesuchten *Ketten* sind nun die Äquivalenzklassen in Ω bzgl. G, sprich die Bahnen. Nach Burnside:

$$\#\{\text{Ketten}\} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}_\Omega(g)|$$

- **Fall** $g = ([m]_n, 1)$, o.B.d.A. $m \in \{0, .., n-1\}$. Dann ist

$$p \in \text{Fix}_\Omega(g) \;\Leftrightarrow\; \underbrace{p_{[n-1]_n-[k]_n+[m]_n}}_{p_{[m-k-1]_n}} = p_{[k]_n} \quad , \quad k = 0, .., n-1$$

Die *Paare* $\{[m-k-1]_n, [k]_n\}$, $k = 0, .., n-1$ sind entweder gleich oder disjunkt. Sie bestehen in der Regel aus 2 Elementen, außer für die k für die $[m-k-1]_n = [k]_n$, das heißt

$$[2k+1]_n = [m]_n \tag{1}$$

Dies gilt (bei festem m) für 2 $[k]_n$'s falls n gerade und m ungerade, für nur 1 $[k]_n$ falls n ungerade ist, und ansonsten gar nicht. Die Anzahl

$$P_m := \begin{cases} \frac{n}{2} - 1 & : n \text{ gerade, } m \text{ ungerade} \\ \frac{n-1}{2} & : n \text{ ungerade} \\ \frac{n}{2} & : n \text{ gerade, } m \text{ gerade} \end{cases}$$

der *echten* 2-er Paare $\{\underbrace{[m-k-1]_n, [k]_n}_{\neq}\}$ bestimmt die Anzahl der möglichen p 's auf

$$\text{Fix}_\Omega(([m]_n, 1)) = N^{P_m} \cdot N^{n-2P_m}$$

- **Fall** $g = ([m]_n, [0]_2)$. Dann gilt

$$p \in \mathrm{Fix}_\Omega(g) \;\Leftrightarrow\; p_{[k+m]_n} = p_{[k]_n} \quad , \quad k = 0,..,n-1$$

$$\Leftrightarrow\; p_{[k]_n} = p_{[k+m]_n} = p_{[k+2m]_n} = \dots \quad , \quad k = 0,..,n-1$$

$$\Leftrightarrow\; \forall\, K \in C_n / \langle [m]_n \rangle \quad : \quad p_{[i]_n} = p_{[j]_n} \;\forall\, [i]_n, [j]_n \in K$$

das heißt $|C_n : \langle [m]_m \rangle|$ setzt die Zahl der möglichen p 's auf

$$|\mathrm{Fix}_\Omega(([m]_n, [0]_n))| = N^{|C_n : \langle [m]_n \rangle|} = N^{\frac{n}{|\langle [m]_n \rangle|}} \overset{\text{ÜA 18}}{=} N^{\mathrm{ggT}(m,n)}$$

Spezialfall: Ist nun $n = 10$ so gibt es genau 5 gerade und 5 ungerade $m \in \{0,..,n-1\}$. Ferner gibt es genau 1 m mit $\mathrm{ggT}(m,10) = 10$, genau 4 m's mit $\mathrm{ggT}(m,10) = 1$, genau 4 m's mit $\mathrm{ggT}(m,10) = 2$ und genau 1 m mit $\mathrm{ggT}(m,10) = 5$. Somit ist

$$\#\{\text{Ketten}\} = \frac{1}{20} \cdot \left[5 \cdot (N^4 \cdot N^2) + 5 \cdot (N^5 \cdot N^0) + 1 \cdot N^{10} + 5 \cdot N^1 + 4 \cdot N^2 + 1 \cdot N^5\right] \overset{N=3}{=} 3210$$

Aufgabe 40

(i) Sei $|G| = 9 = 3^2$. Bekanntlich ist dann G abelsch, da $3 \in \mathbb{P}$. Doch für abelsche Gruppen der Ordnung 9 gibt es genau die zwei Möglichkeiten

$$G \mathrel{\tilde{\in}} \{\mathbb{Z}/9\mathbb{Z},\ \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\}$$

(ii) Ist $\mathscr{R} = \{x_1,..,x_4\}$ ein Repräsentantensystem für die Konjugationsklassen von G ($|\mathscr{R}| = 4$) folgt aus der Klassengleichung

$$|G| = \sum_{x_i \in \mathscr{R}} \frac{|G|}{|C_G(x_i)|}$$

die Bedingung

$$\sum_{i=1}^{4} \underbrace{\frac{1}{|C_G(x_i)|}}_{\frac{1}{n_i}} = 1$$

wobei o.B.d.A $n_1 \leq .. \leq n_4 = |G|$ (mit $x_4 = 1$). Die Gleichung

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = 1 \quad , \quad n_1 \leq .. \leq n_4 \in \mathbb{N}$$

besitzt genau die Lösungen

$$(n_1,..,n_4) \in \{(2,3,7,42),\ (2,3,8,24),\ (2,3,9,18),\ (2,3,10,15),\ (2,3,12,12)$$

$$(2,4,5,20),\ (2,4,6,12),\ (2,4,8,8),\ (2,5,5,10),\ (3,3,4,12)$$

$$(3,3,6,6),\ (3,4,4,6),\ (4,4,4,4)\}$$

- Der Fall $|G| = 6$ ist ausgeschlossen, denn $\mathrm{Sym}(3)$ und C_6 haben jeweils Klassenzahl 3 und 6 (vgl. Aufgabe 21 (ii)).
- Beide Gruppen der Ordnung 4 (C_4 und $C_2 \times C_2$) besitzen Klassenzahl 4 (vgl. Aufgabe 15 (i)).

- Betrachten den Fall $(3,3,4,12)$. Wegen $\underbrace{\langle x_1\rangle}_{\neq\{1\}} \leq \underbrace{C_G(x_1)}_{\text{Ordnung } 3}$ ist auch $\langle x_1\rangle$ von Ordnung 3, also eine 3-Sylowgruppe von G. Im Fall $\langle x_1\rangle \trianglelefteq G$ wäre $G/\langle x_1\rangle = \mathcal{N}_G(\langle x_1\rangle)/C_G(x_1)$ isomorph zu einer Untergruppe von $\mathrm{Aut}(\langle x_1\rangle) \cong C_2$, also $|\langle x_1\rangle| \geq 6$ (Widerspruch).
  Daher ist $\langle x_1\rangle \ntrianglelefteq G$ und G operiert auf $G/\langle x_1\rangle$ durch Linksmultiplikation. Dabei ist der induzierte Homomorphismus $\tau : G \to \mathrm{Sym}(G/\langle x_1\rangle)$ injektiv, denn: Zum einen ist

$$x \in \ker(\tau) \;\Leftrightarrow\; xg\langle x_1\rangle = g\langle x_1\rangle \;\;\forall\, g \in G \;\Leftrightarrow\; x \in g\langle x_1\rangle g^{-1} \;\;\forall\, g \in G$$

  Zum anderen existiert mindestens ein $g \in G$ mit $g\langle x_1\rangle g^{-1} \neq \langle x_1\rangle$, also $\underbrace{g\langle x_1\rangle g^{-1} \cap \langle x_1\rangle}_{\leq\langle x_1\rangle} = \{1\}$, das heißt $x = 1$.
  Es existiert also ein Monomorphismus $G \to \overbrace{\mathrm{Sym}(4)}^{\cong G/\langle x_1\rangle}$, sprich, $G \cong H \leq \mathrm{Sym}(4)$ für irgendein $|H| = 12$. Da $\mathrm{Alt}(4)$ die einzige Untergruppe der Ordnung 12 in $\mathrm{Sym}(4)$ ist, folgt $G \cong \mathrm{Alt}(4)$.
  In der Tat, hat $\mathrm{Alt}(4)$ Klassenzahl 4.
- Betrachten die Fälle mit $n_1 = 2$. Analog zu vorhin ist $\langle x_1\rangle = C_G(x_1)$ mit Ordnung 2.
  Behauptung: $|G|$ ist nicht durch 4 teilbar.
  Beweis:

  Nach Sylow, ist $\langle x_1\rangle$ in einer 2-Sylowgruppe $H \leq G$ enthalten. Wegen $Z(H) > \{1\}$ und $Z(H) \leq C_H(x_1) = \langle x_1\rangle$ muss $\langle x_1\rangle = Z(H)$ sein. Annahme: $|H| \geq 4$, dann existieren nach Sylow 2-Gruppen

$$H_1 \leq H_2 \leq \cdots \leq H \qquad \text{mit} \qquad |H_1| = 2,\ |H_2| = 2^2,\ \ldots$$

  Dabei kann nicht $\langle x_1\rangle = H_1$ sein, denn sonst wäre $H_2 \subseteq C_G(x_1)$ (da H_2 abelsch), ein Widerspruch. Somit ist $\underbrace{\langle x_1\rangle H_1}_{\substack{\leq G \text{ da} \\ \langle x_1\rangle < \langle x_1\rangle H_1 = H_1\langle x_1\rangle}}$ mit $|\langle x_1\rangle H_1| = 4$. Doch auch $\langle x_1\rangle H_1$ wäre abelsch und somit in $C_G(x_1)$, auch ein Widerspruch!
  Demnach müssen die 2-Sylowgruppen von G Ordnung 2 haben, insbesondere ist G nicht durch 4 teilbar.

  Nach Aufgabe (43) existiert nun ein Normalteiler $N \trianglelefteq G$ mit $|G : N| = 2$. Jede Konjugationsklasse von G liegt dabei in N oder in $G \setminus N = x_1N$ (beachte dass wegen $2 \nmid |N|$ gilt $x_1 \notin N$). Wegen $|\mathrm{Orb}_G(x_1)| = |G : C_G(x_1)| = |x_1N|$ ist x_1N genau die Konjugationsklasse von x_1, insbesondere haben alle Elemente in x_1N die Ordnung 2. Für $g \in N$ gilt daher

$$1 = (x_1g)(x_1g) = x_1gx_1^{-1}g \;\Rightarrow\; x_1gx_1^{-1} = g^{-1}$$

  sprich, die Zuordnung $g \mapsto g^{-1}$ ist ein Automorphismus in N. Nach Aufgabe 24 (i) ist daher N abelsch. Insbesondere hat jede Konjugationsklasse $\mathrm{Orb}_G(g)$ von $g \in N$ höchstens Länge 2, nämlich $\mathrm{Orb}_G(g) = \{g, \mathrm{ad}_{x_1}(g)\}$, denn für $x_1h \in x_1N$ ist stets

$$(x_1h)g(x_1h)^{-1} = x_1\underbrace{hgh^{-1}}_{g}x_1^{-1} = \mathrm{ad}_{x_1}(g)$$

  und $\mathrm{ad}_h(g) = g$ ohnehin. Da $\mathrm{ad}_{x_1}(g) = g$ nur für $g \in C_G(x_1) = \langle x_1\rangle$ gilt, haben alle Elemente $g \in N \setminus \{1\}$ Konjugationsklassen genau der Länge 2.
  Anderseits sind in N genau 3 Konjugationsklassen enthalten, das heißt $|N| = 5$ und $|G| = 10$. Da C_10 Klassenzahl 10 hat, muss $G \cong D_{10}$ sein (vgl. Aufgabe 32 (ii)). Tatsächlich besitzt die Diedergruppe D_{10} Klassenzahl 4.

Zusammengefasst, sind

$$C_4,\ C_2 \times C_2,\ \mathrm{Alt}(4),\ D_{10}$$

die einzigen endlichen Gruppen mit Klassenzahl 4.

Aufgabe 41

(i) Wähle $p \in \mathbb{P}$ beliebig mit $p \mid |G|$, dann existiert nach Cauchy ein Element $x \in G$ der Ordnung p. Für jedes andere Element $1 \neq y = a(x)$, $a \in A$ (jedes $y \in G$ kann so dargestellt werden) ist dann $y^p = a(x^p) = a(1) = 1$. Nach Übungsaufgabe (18) hat jedes Element x sogar die Ordnung p, denn $|\langle x\rangle| \mid p$. Da $p \mid |G|$ beliebig gewählt wurde, doch die Ordnung eines Elementes eindeutig ist, darf $|G|$ nur aus Potenzen von dem selben p bestehen, das heißt G ist eine p-Gruppe.

Da G eine p-Gruppe ist, ist $Z(G) \neq \{1\}$ und somit sogar $Z(G) = G$, denn $\forall\ \alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ ist $\alpha(Z(G)) \subset Z(G)$, was mit der Transitivität von $\mathrm{Aut}(G)$ auf $G \setminus \{1\}$ nur im Fall $Z(G) = G$ verträglich ist.

Alternativ: G ist charakteristisch einfach, denn für jede Untergruppe $U \leq G$ ist $\mathrm{Orb}_A(U) = G$. Insbesondere ist G Isomorph zu dem direkten Produkt endlich vieler isomorpher, einfacher Gruppen $G \cong K \times \cdots \times K$. Dabei muss nach Lagrange auch K eine p-Gruppe sein: $|K| = p^a$. Im Fall $a > 1$ existiert nach Sylow eine Untergruppe $H < K$ mit $|H| = p^{a-1}$, die nach Aufgabe (38) sogar ein Normalteiler wäre: $1 < H \lhd K$, ein Widerspruch zur Einfachheit von K. Demzufolge muss

$$G \cong C_p \times \cdots \times C_p$$

sein, also insbesondere abelsch.

(ii) Im Fall $p \neq 2$ ist $x \neq x^{-1}$ für irgendein Element $x \in G \setminus \{1\}$ (eigentlich für alle). Für jedes weitere Element $y \in G \setminus \{1, x\}$ existiert nun ein $\alpha \in A$ mit

$$\alpha(x) = x \ \wedge\ \alpha(x^{-1}) = y$$

also $y = \alpha(x^{-1}) = \alpha(x)^{-1} = x^{-1}$. Somit besteht G nur aus den Elementen $\{1, x, x^{-1}\}$.

(iii) Die Operation kann zunächst nur 3-transitiv sein, falls $|G| \geq 4$ und somit nach Teil (ii) $p = 2$. Wählen nun eine Untergruppe $H \leq G$ der Ordnung 4 (Sylow bzw. Darstellung aus Teil (i)) : $H = \{1, x_1, x_2, x_3\}$. Dazu sei $y \in G \setminus \{1, x_1, x_2\}$, dann existiert ein $\alpha \in A$ mit

$$(x_1, x_2, x_3) \overset{\alpha}{\mapsto} (x_1, x_2, y)$$

Wegen $\{1, x_1, x_2\} \in \underbrace{\alpha(H) \cap H}_{\leq H}$ muss $\alpha(H) \cap H = H$ bzw. $\alpha(H) = H$ sein, das heißt $y = x_3$. Somit besteht G nur aus den Elementen $\{1, x_1, x_2, x_3\}$.

(iv) Die Operation wäre insbesondere 3-transitiv, also $|G| = 4$. Anderseits könnte sie dann definitionsgemäß nicht 4-transitiv auf $G \setminus \{1\}$ sein.

Aufgabe 42[1]

Behauptung: Für weitere p-Sylowgruppe $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ gilt $\mathcal{N}_S(P) = S \cap P$.
Beweis:

Die Inklusion $S \cap P \subseteq \mathcal{N}_S(P)$ ist klar. Sei anderseits $s \in \mathcal{N}_S(P)$. Wegen $s \in S$ ist $\langle s\rangle$ eine p-Gruppe, wegen $\langle s\rangle \subseteq \mathcal{N}_G(P)$ nach Sylow in einer p-Sylowgruppe von $\mathcal{N}_G(P)$ enthalten. Wegen $P \trianglelefteq \mathcal{N}_G(P)$ ist P die einzige p-Sylowgruppe von $\mathcal{N}_G(P)$ (da alle p-Sylowgruppen von $\mathcal{N}_G(P)$ zueinander konjugiert sind), also $s \in P$. Somit gilt auch die Inklusion $\mathcal{N}_S(P) \subseteq S \cap P$.

S operiere nun durch Konjugation auf $\mathrm{Syl}_p(G)$, dann gilt

$$|\mathrm{Orb}_S(P)| = |S : \mathrm{St}_S(P)| = |S : \mathcal{N}_S(P)| = |S : S \cap P| \tag{2}$$

für jede $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Ist $\mathscr{R} = \{S =: P_1,\ .., P_n\}$ ein Repräsentantensystem der Konjugationsklassen in $\mathrm{Syl}_p(G)$, so ist Anzahl der p-Sylowgruppen gegeben durch die Bahnengleichung

$$\left|\mathrm{Syl}_p(G)\right| = \sum_{i=1}^{n} |\mathrm{Orb}_S(P_i)| \overset{\mathrm{Orb}_S(S)=\{S\}}{=} 1 + \sum_{i=2}^{n} |\mathrm{Orb}_S(P_i)| \overset{(2)}{=} 1 + \sum_{i=2}^{n} |S : S \cap P_i| \tag{3}$$

Wegen $\underbrace{|S : S \cap T|}_{p\text{-Potenz}} \mid \underbrace{|S : S \cap P_i|}_{p\text{-Potenz}}$ folgt aus (3):

$$\left|\mathrm{Syl}_p(G)\right| = 1 \pmod{|S : S \cap T|}$$

Literatur

[1] *Lösungsvorschlag zu Aufgabe 42*, B. Sambale
FSU Jena, 2009