

Gruppentheorie

Übungsblatt 10

Aufgabe 39

Wie viele verschiedene Armbänder aus insgesamt 10 Perlen lassen sich herstellen, wenn Perlen in den Farben rot, gelb und blau zur Verfügung stehen?

Aufgabe 40

- (i) Zeigen Sie, dass es bis auf Isomorphie genau zwei Gruppen der Ordnung 9 gibt.
- (ii) Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle endlichen Gruppen der Klassenzahl 4.

Aufgabe 41

Seien $G \neq 1$ eine endliche Gruppe und $A \leq \text{Aut}(G)$. Wir betrachten die natürliche Operation von A auf $G \setminus \{1\}$. Zeigen Sie:

- (i) Ist die Operation transitiv, so ist G abelsch, und es existiert ein $p \in \mathbb{P}$ mit $x^p = 1$ für alle $x \in G$.
- (ii) Ist sie 2-transitiv, so ist $p = 2$ oder $|G| = 3$.
- (iii) Ist sie 3-transitiv, so ist $|G| = 4$.
- (iv) Sie ist nie 4-transitiv.

Aufgabe 42

Seien G eine endliche Gruppe, $p \in \mathbb{P}$ und S, T verschiedene p -Sylowgruppen von G derart, dass $|S \cap T|$ möglichst groß ist. Zeigen Sie:

$$|\text{Syl}_p(G)| \equiv 1 \pmod{|S : S \cap T|}.$$