Gruppentheorie

FSU Jena - SS 2009

Übungsserie 09 - Lösungen

Stilianos Louca

July 9, 2009

Aufgabe 34

(i) Für $x \neq y$ sind auch $\alpha(x)x^{-1} \neq \alpha(y)y^{-1}$, denn

$$\alpha(x)x^{-1} = \alpha(y)y^{-1} \;\Rightarrow\; \underbrace{\alpha(y)^{-1}\alpha(x)}_{\alpha(y^{-1}x)} = y^{-1}x \;\Rightarrow\; y^{-1}x = 1 \;\Rightarrow\; y = x$$

Somit enthält $\{a(x)x^{-1} : x \in G\}$ genau $|G|$ Elemente.

(ii) Je zwei Paare $\{x, a(x)\}$, $\{y, a(y)\}$ $(x, y \in G)$ sind entweder disjunkt oder gleich, denn aus $x = y$ folgt $a(x) = a(y)$ und aus $x = a(y)$ folgt $a(x) = y$. Sie bestehen nach Aufgabenvoraussetzung alle aus 2 Elementen, außer im Fall $\{1, a(1)\}$. Demnach besteht G aus der disjunkten Vereinigung solcher Paare und $\{1\}$, hat also ungerade Ordnung.

Ferner ist für beliebiges $g \in G$ (o.B.d.A dargestellt durch $g = a(x)x^{-1}$):

$$a(g) = \underbrace{a(a(x))}_{x}\, a(x^{-1}) = x(a(x))^{-1} = \left[a(x)x^{-1}\right]^{-1} = g^{-1}$$

Insbesondere ist $g \overset{a}{\mapsto} g^{-1}$ ein Automorphismus, also nach Übungsaufgabe 24 G abelsch.

□

Aufgabe 35

Vorbetrachtung

Durch die Bedingung

$$C \cdot A = A \cdot C \quad \forall \;\; A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{K})$$

für $C \in Z(\mathrm{GL}(2, \mathbb{K}))$ erhält man durch die Ansätze

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

das Zentrum

$$Z(\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \right\} \overset{|\mathbb{K}|=3}{=} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Beweis der Aussage

Sei M die Menge aller 1-dimensionalen Untervektorräume von $\mathbb{K}^2$:

$$M = \{\mathbb{K}(1,0),\ \mathbb{K}(0,1),\ \mathbb{K}(1,1),\ \mathbb{K}(1,-1)\}$$

Dann ist $|M| = 4$ und $\mathrm{GL}(2,\mathbb{K})$ operiert auf M durch

$$^{A}V := \{Av : v \in V\} \in M \quad , \quad A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{K}),\ V \in M$$

Dies liefert auf natürlicher Weise einen Homomorphismus $\Phi : \mathrm{GL}(2,\mathbb{K}) \to \mathrm{Sym}(M) \cong \mathrm{Sym}(4)$.
Behauptung: $\ker(\Phi) = Z(\mathrm{GL}(2,\mathbb{K}))$.
Beweis: Sei $A \in \ker(\Phi)$, dann muss insbesondere

$$^{A}\left(\mathbb{K}(1,0)\right) = \mathbb{K}(1,0) \quad \wedge \quad ^{A}\left(\mathbb{K}(0,1)\right) = \mathbb{K}(0,1)$$

das heißt A hat bzgl. der Standardbasis die Form

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

Im Fall $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ oder $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ wäre

$$^{A}\left(\mathbb{K}(1,1)\right) \neq \mathbb{K}(1,1)$$

das heißt $A \in Z(\mathrm{GL}(2,\mathbb{K}))$. Anderseits kann man leicht nachprüfen dass $Z(\mathrm{GL}(2,\mathbb{K})) \subset \ker(\Phi)$ ist, also

$$Z(\mathrm{GL}(2,\mathbb{K})) = \ker(\Phi) \ \Rightarrow\ \underbrace{\mathrm{GL}(2,\mathbb{K})/Z(\mathrm{GL}(2,\mathbb{K}))}_{\text{Ordnung } 24} \overset{\substack{\text{Homomorphie-}\\\text{satz}}}{\cong} \underbrace{\Phi(\mathrm{GL}(2,\mathbb{K}))}_{\leq \mathrm{Sym}(4)} \overset{|\mathrm{Sym}(4)|=24}{\cong} \mathrm{Sym}(4)$$

□

Aufgabe 36

Sei $G/Z(G) = \langle gZ(G) \rangle$ zyklisch, dann kann jede Restklasse $aZ(G),\ a \in G$ dargestellt werden als

$$g^n Z(G)$$

für irgendein $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere können alle $a, b \in G$ dargestellt werden als $a = g^n z,\ b = g^k w$ für irgendwelche $z, w \in Z(G)$ und $n, k \in \mathbb{N}_0$. Demnach

$$ab = g^n z g^k w \overset{z \in Z(G)}{=} g^n g^k w z = g^k g^n z w \overset{w \in Z(G)}{=} g^k w g^n z = ba$$

das heißt G ist abelsch.
□

Bemerkung: Die Aufgabe zeigt, dass für jede Gruppe $G/Z(G)$ nicht zyklisch mit Ordnung ≥ 2 sein kann.

Aufgabe 37

Sei $H \leq G$ mit $|G : H| = n$. Die Gruppe G operiert auf die Linksnebenklassen nach H durch die Linksmultiplikation

$$^{g}\left(xH\right) := gxH$$

Dies liefert einen Homomorphismus $\Phi : G \to \mathrm{Sym}(G/H) \cong \mathrm{Sym}(n)$, wobei o.B.d.A. $1 \in \{1, .., n\}$ der Nebenklasse H entspräche. Wegen

$$H = \{g \in G : gH = H\} = \{g \in G : (\Phi(g))\,(1) = 1\}$$

ist H durch den induzierten Homomorphismus Φ eindeutig bestimmt. Es gibt daher höchstens so viele Untergruppen in G vom Index n, wie es Homomorphismen $G \to \mathrm{Sym}(n)$ gibt. Da G endlich erzeugt ist, existieren $x_1, .., x_m$ mit $G = \langle x_1, .., x_m \rangle$. Da jeder Homomorphismus $G \to \mathrm{Sym}(n)$ eindeutig durch die Bilder der x_i festgelegt ist, gibt es höchstens $(n!)^m < \infty$ Homomorphismen $G \to \mathrm{Sym}(n)$.
□

Aufgabe 38

Sei $p := |G : H|$ kleinster Primfaktor von $|G|$. Suchen Homomorphismus Φ auf G mit $H = \ker(\Phi)$, dann folgt $H \trianglelefteq G$.

Wir betrachten dazu wieder die Operation von G auf G/H durch Linksmultiplikation. Diese liefert einen Homomorphismus $\Phi : G \to \mathrm{Sym}(p)$, wobei wegen $gH \neq H$ für $g \notin H$ gilt

$$\ker(\Phi) \subseteq H$$

Wegen $G/\ker(\Phi) \cong \Phi(G) \leq \mathrm{Sym}(p)$ (Homomorphiesatz) ist $|G/\ker(\Phi)| \;\big|\; |\mathrm{Sym}(p)| = p!$ und offensichtlich ist $|G/\ker\Phi| \;\big|\; |G|$. Deshalb ist sogar

$$|G/\ker\Phi| \,\Big|\, \underbrace{\mathrm{ggT}(p!, |G|)}_{p \in \mathbb{P}} \quad \Rightarrow \quad |G : \ker\Phi| = p$$

das heißt $|\ker\Phi| = |H|$, sprich $H = \ker(\Phi)$.
□