B. Külshammer
B. Sambale

Ausgabe: 02.06.09
Abgabe: 09.06.09

Gruppentheorie

Übungsblatt 8

Aufgabe 30

Zeigen Sie, dass für Elemente a, b einer Gruppe G stets gilt:

(i) Ist $[a, b]$ mit a vertauschbar, so ist $[a^n, b] = [a, b]^n$ für $n \in \mathbb{Z}$.

(ii) Ist $[a, b]$ mit a und b vertauschbar, so ist $(ab)^n = a^n b^n [b, a]^{\binom{n}{2}}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 31

Seien K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$.

(i) Zeigen Sie, dass die Untergruppe U von $\mathrm{GL}(n, K)$, die aus allen Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

besteht, nilpotent ist, und bestimmen Sie die Nilpotenzklasse von U.

(ii) Zeigen Sie, dass die Untergruppe B von $\mathrm{GL}(n, K)$, die aus allen Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}$$

besteht, auflösbar ist.

Aufgabe 32

(i) Zeigen Sie, dass es bis auf Isomorphie genau fünf Gruppen der Ordnung 8 gibt.

(ii) Zeigen Sie, dass es bis auf Isomorphie genau zwei Gruppen der Ordnung 10 gibt.

Aufgabe 33

Beweisen Sie, dass eine zyklische Gruppe der Ordnung $n < \infty$ zu jedem Teiler d von n genau eine Untergruppe der Ordnung d enthält.