Gruppentheorie

FSU Jena - SS 2009

Übungsserie 07 - Lösungen

Stilianos Louca

June 6, 2009

Vorbemerkung

Für endliche abelsche Gruppe A mit $\prod_{i=1}^{n} p_i^{k_i}$ die Primfaktorzerlegung von $|A|$, ist

$$A = \bigoplus_{i=1}^{r} A_i \ , \ A_i := A_{p_i^{k_i}} := \left\{ a \in A : p_i^{k_i} a = 0 \right\}$$

Wegen

$$A_i \cong (\mathbb{Z}/p_i^{l_{i,1}}) \times \cdots \times (\mathbb{Z}/p_i^{l_{i,m_i}})$$

für irgendwelche (bis auf Umordnung) eindeutigen $l_{i,j} \in \mathbb{N}_0$, ist $|A_i|$ eine Potenz von p_i, also nach Lagrange $|A| \leq p_i^{k_i}$ (da $|A_i| \bigm| |A|$). Wegen $|A| = \prod_{i=1}^{r} |A_i|$ folgt sogar $|A_i| = p_i^{k_i}$.

Aufgabe 26

(i) **Spezialfall der Vorbemerkung:** Da $A := \mathbb{Z}/120\mathbb{Z}$ endlich, abelsch ist, kann A zerlegt werden in

$$A = A_{2^3} \oplus A_3 \oplus A_5$$

wobei $|A_{2^3}| = 2^3, \ |A_3| = 3, \ |A_5| = 5$, demnach $A_3 \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \ A_5 \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ und

$$A_{2^3} \widetilde{\in} \{\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, \ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\}$$

Da $2a = 0$ für $a \in \mathbb{Z}/120\mathbb{Z}$ impliziert $a = 0$ oder $a = 60$ (d.h. $\exists$ nur zwei Elemente der Ordnung ≤ 2 in A), sind $A_{2^3} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ bzw. $A_{2^3} \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ ausgeschlossen, denn sonst wären $(0,0)^2 = (1,0)^2 = (0,2)^2 = 0$ bzw. $(0,0,0)^2 = (1,0,0)^2 = (0,1,0)^2 = (0,0,1)^2 = 0$, ein Widerspruch! Somit

$$\mathbb{Z}/120\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$$

Alternativ: Es genügt ein Element in $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ zu finden der Ordnung 120. Wählen dazu Elemente x, y, z mit jeweils Ordnung 8, 5 und 3 (dies ist offensichtlich immer möglich). Dann ist nach Aufgabe 18 (iii)

$$|\langle xyz \rangle| = 8 \cdot 5 \cdot 3 = 120$$

(ii) Sei A abelsch mit $|A| = 36 = 2^2 3^2$, dann

$$A = A_{2^2} \oplus A_{3^2}$$

wobei $|A_{2^2}| = 2^2, \ |A_{3^2}| = 3^2$. Demnach ist

$$A_{2^2} \widetilde{\in} \left\{ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2, \ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \right\}$$

und

$$A_{3^2} \widetilde{\in} \left\{ (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2, \ \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \right\}$$

Somit sind alle möglichen Isomorphieklassen für A:

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\ ,\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}\ ,\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$$

Beachte dass diese Gruppen tatsächlich verschieden sind (z.B. enthält $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ ein Element der Ordnung 9 und eines der Ordnung 4, alle anderen jedoch nicht, u.s.w.).

(iii) Wegen

$$\begin{aligned}(z, y+2\mathbb{Z}) \in \mathscr{T}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) &\Leftrightarrow\ \exists\, n \in \mathbb{N} : nz = 0\ \wedge\ ny \in 2\mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow\ \exists\, n \in \mathbb{N} : nz = 0\ \ \text{(o.B.d.A } n \text{ gerade)} \\ &\Leftrightarrow\ z = 0\end{aligned}$$

ist $\mathscr{T}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \{0\} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Setzen

$$F_1 := \mathbb{Z} \times \{0 + 2\mathbb{Z}\}\ \ ,\ \ F_2 := \underbrace{\{(z, 0+2\mathbb{Z}) : z \in \mathbb{Z} \text{ gerade}\} \cup \{(z, 1+2\mathbb{Z}) : z \in \mathbb{Z} \text{ ungerade}\}}_{\langle(1,1+2\mathbb{Z})\rangle}$$

Dann sind $F_1, F_2 \leq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und per Konstruktion $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cap F_{1/2} = (0, 0+2\mathbb{Z})$. Ferner ist

$$\mathscr{T}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus F_1 = \{(0+z, (y+2\mathbb{Z}) + (0+2\mathbb{Z})) : z \in \mathbb{Z},\ y \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

Analog, kann jedes $(z, y+2\mathbb{Z}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dargestellt werden als

$$(z, y+2\mathbb{Z}) = \left\{\begin{array}{ll} (0, y+2\mathbb{Z}) + (z, 0+2\mathbb{Z}) & : z \text{ gerade} \\ (0, (y+1)+2\mathbb{Z}) + (z, 1+2\mathbb{Z}) & : z \text{ ungerade} \end{array}\right\} \in \mathscr{T}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus F_2$$

das heißt

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathscr{T}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus F_{1,2}$$

Aufgabe 29

Behauptung: Jede Nebenklasse xN mit $x \in G$ besitzt genau ein Element $\widetilde{x} \in C_G(N_: = \{g \in G : gu = ug\ \forall\ u \in N\}$.
Beweis: Wegen

$$\mathrm{Inn}(N) \cong N/\underbrace{Z(N)}_{\substack{\{1\} \\ \text{nach } 5(\text{ii})}} \cong N\quad,\quad |\mathrm{Aut}(N)| \overset{5(\text{i})}{=} 6 = |N|$$

gilt $\mathrm{Aut}(N) = \mathrm{Inn}(N)$. Wegen $\mathrm{ad}_x\big|_N \in \mathrm{Aut}(N)$ (da N Normal) existiert dann ein $u \in N$ mit $xyx^{-1} = uyu^{-1}\quad \forall\ y \in N$, das heißt

$$\underbrace{u^{-1}x}_{\widetilde{x}}\, y = yu^{-1}x\ \forall\ y \in N \quad \Rightarrow\ \widetilde{x} \in C_G(N)$$

Wegen $xN = Nx$ ist auch $\widetilde{x} = \underbrace{u^{-1}x}_{\in Nx} \in xN$, sprich $\widetilde{x} \in C_G(N) \cap xN$. Dieses $\widetilde{x}$ ist auch das einzige mit dieser Eigenschaft, denn für jedes andere $z \in C_G(N) \cap xN$ würde gelten

$$\underbrace{\widetilde{x}^{-1}}_{\in C_G(N)}\ \underbrace{z}_{\in C_G(N)} \in N \cap C_G(N) = Z(N) \overset{5(ii)}{=} \{1\}$$

das heißt $z = \widetilde{x}$.

Behauptung: Die Abbildung

$$f : G/N \to G\ ,\ xN \mapsto \widetilde{x}$$

ist Monomorph.
Beweis: Für $x, y \in G$ ist $\widetilde{x}\widetilde{y} \in C_G(N) \cap xyN$ (denn $C_G(N)$ ist eine Gruppe und $(xN)(yN) = xyN$), also $\widetilde{x}\widetilde{y} = \widetilde{xy}$ bzw. f homomorph. Da die Nebenklassen paarweise disjunkt sind, ist f injektiv (denn $f(xN) \in xN$).

Behauptung: Es ist $G = N \oplus \underbrace{f(G/N)}_{\cong G/N}$ (also $G \cong \mathrm{Sym}(3) \otimes \mathrm{Sym}(3)$).
Beweis: Wegen $f(G/N) \leq C_G(N)$ gilt einerseits

$$N \cap f(G/N) = \underbrace{(N \cap C_G(N))}_{\{1\}} \cap f(G/N) = \{1\}$$

Anderseits ist

$$\underbrace{|N \cdot f(G/N)|}_{\leq |G| = 36} = \frac{\overbrace{|N|}^{6} \cdot \overbrace{|f(G/N)|^{6}}}{N \cap f(G/N)} = 36$$

das heißt $G = N \cdot f(G/N)$. Schließlich ist wegen $f(G/N) \leq C_G(N)$ auch $N \leq C_G(f(G/N)) \leq N_G(f(G/N))$ (N_G Normalisator), das heißt

$$\langle N, f(G/N) \rangle \leq N_G(f(G/N)) \quad \Rightarrow \quad f(G/N) \trianglelefteq \langle N, f(G/N) \rangle = G$$

Somit $G = N \oplus f(G/N)$.
□

Aufgabe 28

Die Projektionen

$$\varepsilon_i : G_1 \times G_2 \to G_i \quad , \quad \varepsilon_i(\underbrace{g_1, g_2}_{\in G_1 \times G_2}) := g_i$$

sind bekanntlich homomorph und normal, im Sinne dass

$$\varepsilon_i\left[(h_1, h_2)(g_1, g_2)(h_1^{-1}, h_2^{-1})\right] = h_i \varepsilon_i(g_1, g_2) h_i^{-1}$$

Sei $U \leq G_1 \times G_2$. Betrachten ab nun die Einschränkungen von ε_i auf U.

Konstruktion der H_i, K_i

Setzen

$$H_i := \varepsilon_i(U)$$

Dann ist tatsächlich $H_i \leq G$. Für die Untergruppen

$$K_1 := \underbrace{\varepsilon_1(\underbrace{\ker(\varepsilon_2)}_{\trianglelefteq U})}_{\trianglelefteq \varepsilon_1(U)} \quad , \quad K_2 := \underbrace{\varepsilon_2(\underbrace{\ker(\varepsilon_1)}_{\trianglelefteq U})}_{\trianglelefteq \varepsilon_2(U)}$$

gilt dabei $K_i \trianglelefteq H_i$. Beachte:

$$h_1 \in K_1 \;\Leftrightarrow\; \exists\, h_2 \in G_2 : (h_1, h_2) \in \ker \varepsilon_2 \;\Leftrightarrow\; h_2 = 1 \;\Leftrightarrow\; (h_1, 1) \in U \tag{1}$$

(analog auch für K_2).

Konstruktion von φ

Definieren $\varphi : H_1/K_1 \to H_2/K_2$ gemäß
$$\varphi(h_1K_1) := h_2K_2$$
für $(h_1, h_2) \in U,\ h_i \in H_i$. Beachte dass per Konstruktion der H_i für jedes $h_1 \in H_1$ solch ein h_2 existiert, denn
$$h_1 \in H_1 \Leftrightarrow\ \exists\ h_2 \in G_2 : (h_1, h_2) \in U\ \ \Leftrightarrow\ \ h_2 \in H_2$$
Die Abbildung φ ist dabei wohldefiniert, denn für $(h_1, \widetilde{h}_2) \in U$ ist $(1, h_2^{-1}\widetilde{h}_2) \in U$ also $h_2^{-1}\widetilde{h}_2 \in \varepsilon_2(\ker \varepsilon_1) = K_2$ (vgl. Gl. 1) und somit $\widetilde{h}_2K_2 = h_2K_2$.

Auch ist φ homomorph, denn für $(h_1, h_2), (g_1, g_2) \in U$ ist auch $(h_1h_2, g_1g_2) \in U$, demnach
$$\varphi(h_1h_2K_1) = g_1g_2K_2 = (g_1K_2)(g_2K_2) = \varphi(h_1K_1)\varphi(h_2K_1)$$
Zusätzlich ist φ injektiv, denn aus $\varphi(h_1K_1) = K_2$ (wobei $(h_1, h_2) \in U$), das heißt $h_2 \in K_2$ bzw. $(1, h_2) \in U$, folgt $(h_1, 1) = (h_1, h_2h_2^{-1}) \in U$ und somit $h_1 \in K_1$.

Surjektivität ist klar, denn aus $h_2K_2 \in H_2K_2$ (d.h $h_2 \in H_2$) folgt (analog zu oben für h_1) dass $(h_1, h_2) \in U$ für irgendein $h_1 \in H_1$.

Somit ist φ ein Isomorphismus.

Konstruktion der Bijektion

Zu Untergruppe $U \leq G_1 \times G_2$ setzten
$$\Phi(U) := (H_1^U, K_1^U, H_2^U, K_2^U, \varphi)$$
mit den $H_i^U := H_i, K_i^U := K_i, \varphi^U := \varphi$ wie oben eingeführt.

Injektivität: Sei $\Phi(U) = \Phi(V)$ für Untergruppen $U, V \leq G_1 \times G_2$. Es genügt zu zeigen $U \subset V$. Sei $(u_1, u_2) \in U$, dann sind $u_i \in H_i^U = H_i^V$, das heißt $(v_1, u_2) \in V,\ (u_1, v_2) \in V$ für irgendwelche $v_i \in G_i$. Wegen
$$u_2K_2^U = \varphi^U(u_1K_1^U) \overset{\substack{K_1^U = K_2^V \\ \varphi^U = \varphi^V}}{=} \varphi^V(u_1K_1^V) = v_2K_2^V \overset{K_2^U = K_2^V}{\Longrightarrow} u_2v_2^{-1} \in K_2^V$$
folgt $(1, u_2v_2^{-1}) \in V$. Somit
$$(u_1, u_2) = (1, u_2v_2^{-1})(u_1, v_2) \in V$$
Surjektivität: Seien H_i, K_i, φ vorgegeben. Machen den Ansatz
$$U = \big\{(h_1, h_2)\ \big|\ h_i \in H_i : \varphi(h_1K_1) = h_2K_2\big\}$$
Dann ist U tatsächlich eine Untergruppe von $G_1 \times G_2$, denn $U \neq \emptyset$, und:
$$\varphi(h_1K_1) = h_2K_2\ \Rightarrow\ \varphi(h_1^{-1}K_1) = h_2^{-1}K_2\ \Rightarrow\ (h_1, h_2)^{-1} \in U$$
$$\varphi(h_1K_1) = h_2K_2,\ \varphi(\widetilde{h}_1K_1) = \widetilde{h}_2K_2\ \Rightarrow\ \varphi((h_1\widetilde{h}_1)K_1) = (h_2\widetilde{h}_2)K_2\ \Rightarrow\ (h_1, h_2)(\widetilde{h}_1, \widetilde{h}_2) \in U$$
Per Konstruktion sind $K_i \subset K_i^U$ (denn $\varphi(k_1K_1) = 1K_2$ und $\varphi(1K_1) = k_2K_2$ für $k_i \in K_i$). Ist $\varphi(1K_1) = h_2K_2$ so muss $h_2 \in K_2$ sein, analog muss mit $\varphi(h_1K_1) = 1K_2$ entsprechend $h_1 \in K_1$ sein (da φ injektiv), also $K_i^U \subset K_i$ (vgl. Gl. (1)), bzw. $K_i = K_i^U$. Per Konstruktion von U ist $H_1 \subset H_1^U$, und da $\varphi : H_1/K_1 \to H_2/K_2$ surjektiv ist, auch $H_2 \subset H_2^U$. Per Konstruktion von U ist anderseits $H_i^U \subset H_i$, also $H_i = H_i^U$.

Per Konstruktion von U gilt in allen Fällen $\varphi = \varphi^U$, somit
$$\Phi(U) = (H_1, K_1, H_2, K_2, \varphi)$$

Aufgabe 29

Ist G abelsch, so ist $[G, G] = \{1\}$. Verwenden demnach die vorgespeicherte Sammlung *kleiner Gruppen* in GAP und überprüfen die Hypothese für alle nicht-abelschen Gruppen in ansteigender Ordnung. Der Code

```
comm:=function(x,y) return x*y*x^-1*y^-1; end;
for i in [1..100] do
  for G in AllSmallGroups(i,IsAbelian,false) do
    if DerivedSubgroup(G)<>SetX(G,G,comm) then
      Print(G,", Size ", Size(G), ", GAP ID ", IdGroup(G), "\n");
    fi;
  od;
od;
```

ergibt die beiden Gruppen der Ordnung 96:

```
Group( [ f1, f2, f3, f4, f5, f6 ] ), Size 96, GAP ID [ 96, 3 ]
Group( [ f1, f2, f3, f4, f5, f6 ] ), Size 96, GAP ID [ 96, 203 ]
```