B. Külshammer
B. Sambale

Ausgabe: 19.05.09
Abgabe: 26.05.09

Gruppentheorie

Übungsblatt 6

Aufgabe 22

Zeigen Sie, dass jede endliche Gruppe G, die eine einfache $\mathrm{End}(G)$-Gruppe ist, charakteristisch einfach ist. (Hinweis: Zeigen Sie, dass für jeden echten Normalteiler N in G möglichst großer Ordnung der Durchschnitt aller Normalteiler M von G mit $G/M \cong G/N$ eine vollinvariante Untergruppe von G ist.)

Aufgabe 23

Geben Sie Beispiele für Gruppen an, die die folgenden Bedingungen für Untergruppen erfüllen (bzw. nicht erfüllen):

(i) Die Minimal- und die Maximalbedingung.

(ii) Die Minimal-, aber nicht die Maximalbedingung.

(iii) Die Maximal-, aber nicht die Minimalbedingung.

(iv) Weder die Minimal- noch die Maximalbedingung.

Aufgabe 24

Zeigen Sie, dass für jede Gruppe G gilt:

(i) Die Abbildung $G \to G, x \mapsto x^{-1}$, ist genau dann ein Automorphismus, wenn G abelsch ist.

(ii) Die Abbildung $G \to G, x \mapsto x^2$, ist genau dann ein Endomorphismus, wenn G abelsch ist.

(iii) Im Fall $|G| < \infty$ ist die Abbildung $G \to G, x \mapsto x^2$, genau dann ein Automorphismus, wenn G abelsch von ungerader Ordnung ist.

Aufgabe 25

(i) Zeigen Sie, dass die komplexen Matrizen

$$a = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad , \qquad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

eine nichtabelsche Gruppe G der Ordnung 8 erzeugen.

(ii) Zeigen Sie, dass jede Untergruppe von G normal in G ist.

(iii) Ist G zu der Gruppe aus Aufgabe 9 isomorph?