B. Külshammer
B. Sambale

Ausgabe: 12.05.09
Abgabe: 19.05.09

Gruppentheorie

Übungsblatt 5

Aufgabe 18

Seien g, h Elemente einer Gruppe G der endlichen Ordnungen m, n. Zeigen Sie:

(i) Ist $k \in \mathbb{Z}$ mit $g^k = 1$, so gilt: $m|k$.

(ii) Für $k \in \mathbb{Z}$ hat g^k die Ordnung $\frac{m}{\mathrm{ggT}(m,k)}$.

(iii) Gilt $gh = hg$ und $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$, so hat gh die Ordnung mn.

Aufgabe 19

Seien G eine Gruppe, $n \in \mathbb{N}$ und $H \leq \mathrm{Sym}(n)$. Zeigen Sie, dass

$$G \wr H := \{(g_1, \ldots, g_n; h) : g_1, \ldots, g_n \in G, h \in H\}$$

mit der folgenden Multiplikation zu einer Gruppe wird:

$$(g_1, \ldots, g_n; h)(g'_1, \ldots, g'_n; h') := (g_1 g'_{h^{-1}(1)}, \ldots, g_n g'_{h^{-1}(n)}; hh').$$

Man nennt $G \wr H$ das **Kranzprodukt** von G und H. Beweisen Sie, dass $G \wr H$ einen Normalteiler N mit $N \cong G \times \ldots \times G$ (n Faktoren) und eine Untergruppe U mit $U \cong H$, $G \wr H = NU$ und $N \cap U = 1$ hat.

Aufgabe 20

Zeigen Sie, dass für jede einfache nichtabelsche Gruppe G gilt:

(i) $\mathrm{Inn}(G)$ ist eine charakteristische Untergruppe von $\mathrm{Aut}(G)$.

(ii) $\mathrm{Aut}(\mathrm{Aut}(G)) = \mathrm{Inn}(\mathrm{Aut}(G))$.

Aufgabe 21

(i) Geben Sie eine Kompositionsreihe und eine Hauptreihe von $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ an.

(ii) Zeigen Sie, dass es bis auf Isomorphie genau zwei Gruppen der Ordnung 6 gibt.