Gruppentheorie

FSU Jena - SS 2009

Übungsserie 04 - Lösungen

Stilianos Louca

July 9, 2009

Aufgabe 14

Zeigen: G ist eine Gruppe

Zu $(k_i, h_i) \in K \times H,\ i = 1, 2, 3$ gilt

$$[(k_1, h_1)(k_2, h_2)]\,(k_3, h_3) = (k_1\varphi_{h_1}(k_2), h_1h_2)\,(k_3, h_3) = (k_1\varphi_{h_1}(k_2)\ \underbrace{\varphi_{h_1h_2}(k_3)}_{\varphi_{h_1}(\varphi_{h_2}(k_3))}, h_1h_2h_3)$$

$$= (k_1\ \overbrace{\varphi_{h_1}(k_2\varphi_{h_2}(k_3))}^{\varphi_{h_1}(k_2)\varphi_{h_1}(\varphi_{h_2}(k_3))}\ ,\ h_1h_2h_3) = (k_1, h_1)\,(k_2\varphi_{h_2}(k_3), h_2h_3)$$

$$= (k_1, h_1)\,[(k_2, h_2)(k_3, h_3)]$$

das heißt Assoziativität ist erfüllt. Dabei ist

$$(1_K, 1_H)$$

offensichtlich links- bzw. rechtsneutral, da $\varphi_{1_H} = \mathrm{Id}_K$ bzw. $\varphi_h(1_K) = 1_K$. Als inverses zu $(k, h) \in K \times H$ erweist sich

$$\left(\varphi_{h^{-1}}(k^{-1}),\ h^{-1}\right)$$

Konstruktion von $\tilde{H}$ und $\tilde{K}$

Betrachten die Abbildungen

$$\Phi : H \to G\ ,\ \Phi(h) = (1, h)$$

und

$$\Psi : K \to G\ ,\ \Psi(k) = (k, 1)$$

Dann sind beide Homomorph, denn

$$\Phi(h_1, h_2) = (1, h_1h_2) = (1\varphi_{h_1}(1), h_1h_2) = (1, h_1)(1, h_2)$$

$$\Psi(k_1k_2) = (k_1k_2, 1) = (k_1\ \underbrace{\varphi_1}_{\mathrm{Id}_K}(k_2), 1) = (k_1, 1)(k_2, 1)$$

Offensichtlich sind Φ und Ψ injektiv, so dass

$$\Phi : H \to \Phi(H) = \{1\} \times H =: \tilde{H}\quad ,\quad \Psi : K \to \Psi(K) = K \times \{1\} =: \tilde{K}$$

Isomorphismen sind. Anderseits ist $\tilde{K} \trianglelefteq G$ denn

$$(k_0,h_0)\tilde{K} = \{(k_0,h_0)(k,1) : k \in K\} = \{(k_0\varphi_{h_0}(k),h_0) : k \in K\} \overset{\substack{\varphi_{h_0} \\ \text{bijektiv}}}{=} \{(k_0k,h_0) : k \in K\}$$

$$\overset{k_0K=Kk_0}{=} \{(kk_0,h_0) : k \in K\} = \{(k\varphi_1(k_0),h_0) : k \in K\} = \{(k,1)(k_0,h_0) : k \in K\}$$

$$= \tilde{K}(k_0,h_0) \ \ \forall \ (k_0,h_0) \in G$$

Nachweis des semidirekten Produktes

Es ist klar dass $\tilde{K} \cap \tilde{H} = (1,1) = 1_G$ ist. Anderseits ist

$$\tilde{K}\tilde{H} = \{(k,1)(1,h) : k \in K,\ h \in H\} = \{(k\varphi_1(1),1h) : k \in K,\ h \in H\}$$

$$= \{(k,h) : K \in K,\ h \in H\} = K \times H$$

□

Aufgabe 15

(i) • Es sei S eine Gruppe der Ordnung 4. Dann hat S entweder die Form

$$S = \left\{1,q,q^2,q^3\right\} \quad , \tag{1}$$

oder

$$S = \{1,q,p,pq\} \quad \text{mit} \quad q = q^{-1},\ p = p^{-1},\ pq = qp \quad . \tag{2}$$

Beweis: Es sei $S = \{1,q,p,r\}$ für irgendwelche paarweise verschiedenen q,p,r. Ist $p = q^{-1}$ (*) dann $rq \neq 1$ (sonst $r = p$), $rq \neq q$ (sonst $r = 1$) und $rq \neq r$ (sonst $q = 1$), somit $rq = q^{-1}$, also $r = q^{-2}$:

$$S = \left\{1,q,q^{-1},q^{-2}\right\} \overset{q^2S=S}{\Longrightarrow} S = \left\{1,q,q^2,q^3\right\}$$

Alternativ zu (*), wäre $q = q^{-1}, p = p^{-1}, r = r^{-1}$. Somit $pq \neq e$ (sonst $p = q^{-1} = q$), $pq \neq p$ (sonst $q = 1$) und $pq \neq q$ (sonst $p = 1$), also $pq = r$. Per Symmetrie analog $qp = r$.

• Tatsächlich existieren solche Gruppen, z.B.

$$\langle(1\ 2\ 3\ 4)\rangle \leq \mathrm{Sym}(4) \quad , \quad \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$$

bzw.

$$\{1,\ (1\ 2),\ (3\ 4),\ (1\ 2)(3\ 4)\} \leq \mathrm{Sym}(4) \quad , \quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

• Natürlich sind Gruppen der obigen Formen isomorph, nämlich unter dem Isomorphismus

$$q \mapsto \tilde{q}$$

für Gruppen $\left\{1,q,q^2,q^3\right\}$, $\left\{1,\tilde{q},\tilde{q}^2,\tilde{q}^3\right\}$ der Form 1 bzw.

$$q \mapsto \ \tilde{q}\ ,\ p \mapsto \tilde{p}\ ,\ qp \mapsto \tilde{q}\tilde{p}$$

für Gruppen $\{1,q,p,qp\}$, $\{1,\tilde{q},\tilde{p},\tilde{q}\tilde{p}\}$ der Form 2.

(ii) Sei $Z(G) = \{1\}$ und $A \in Z(\mathrm{Aut}(G))$. Dann gilt insbesondere für $a \in G$:

$$A\,\mathrm{ad}_a = \mathrm{ad}_a\,A$$

also für $x \in G$:

$$A(a)xA(a)^{-1} = A(a)A(A^{-1}(x))A(a)^{-1} = A\left(aA^{-1}(x)a^{-1}\right) = aA(A^{-1}x)a^{-1} = axa^{-1}$$

$$\Rightarrow \; a^{-1}A(a)x = xa^{-1}A(a) \quad \forall\, x \in G$$

$$\Rightarrow \; a^{-1}A(a) \in Z(G) = \{1\}$$

und somit

$$A(a) = a \quad \forall\, a \in G$$

Bemerke: Eigentlich wurde hier sogar eine stärkere Aussage bewiesen: Der Zentralizator von $\mathrm{Inn}(G)$ ist trivial:

$$C_{\mathrm{Aut}(G)}(\mathrm{Inn}(G)) = \{1\}$$

Aufgabe 16

Es sei $H_{(i,j)}$ für $i < j \in \{1,..,n\}$ die Matrix gegeben durch

$$H_{(i,j)} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} & & & & & j & & \\ & & & & & \downarrow & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \\ \\ i \to \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Dann ist $\det(H_{(i,j)}) = 1$ also $H_{(i,j)} \in G$. Für Matrix $A \in G$ ist ferner

$$H_{(i,j)}A = A + \begin{array}{cc} & \begin{matrix} & & & & & j & \phantom{a_{j,j+1}} & & \phantom{a_{j,n}} \\ & & & & & \downarrow & & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \\ \\ i \to \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & a_{j,j+1} & \dots & a_{j,n} \\ \vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

und analog

$$AH_{(i,j)} = A + \begin{array}{cc} & \begin{matrix} & & & & j & & \\ & & & & \downarrow & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \\ \\ i \to \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & a_{1,i} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & a_{i-1,i} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ist nun $A \in Z(G)$ so muss insbesondere $AH_{(ij)} = H_{(ij)}A$ gelten, das heißt

$$a_{i,k} = 0 \;\; \forall\, 1 < i < k \;\; \wedge \;\; \forall\, i < k < n$$

also

$$Z(G) \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & a \\ & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{K} \right\} =: \mathscr{Z}$$

Tatsächlich vertauschen auch alle Matrizen in $\mathscr{Z}$ mit allen anderen in G, also $Z(G) = \mathscr{Z}$.

Aufgabe 17

Gegenbeispiel für Sym(4)**:** Setzen $\sigma := (1\ 2)(3\ 4)$ und nehmen an $\mathrm{Sym}(4) = \langle \sigma, \tau \rangle$ für irgendein $\tau \in \mathrm{Sym}(4)$. Dann ist

$$\overbrace{\underbrace{\mathrm{Sym}(4)}_{\text{Ordnung 24}} \Big/ \underbrace{\langle (1\ 2)(3\ 4),\ (1\ 3)(2\ 4) \rangle}_{\text{Ordnung 4}}}^{\substack{\text{Ordnung 6} \\ \text{nach Lagrange}}} = \underbrace{\langle \tau \rangle \cdot \underbrace{\langle \overbrace{(1\ 2)(3\ 4)}^{\sigma},\ (1\ 3)(2\ 4) \rangle}_{\trianglelefteq\, \mathrm{Sym}(4)}}_{\leq \mathrm{Sym}(4)} \Big/ \underbrace{\langle (1\ 2)(3\ 4),\ (1\ 3)(2\ 4) \rangle}_{\trianglelefteq\, \mathrm{Sym}(4)}$$

$$\stackrel{\text{1. Isomorphiesatz}}{=} \underbrace{\langle \tau \rangle \Big/ \overbrace{\langle \tau \rangle \cap \langle (1\ 2)(3\ 4),\ (1\ 3)(2\ 4) \rangle}^{=:U}}_{\substack{\text{zyklisch, da Faktorgruppe} \\ \text{einer zyklischen Gruppe}}}$$

das heißt es existiert ein $sU \in \langle \tau \rangle / U$ (für ein $s \in \langle \tau \rangle$) mit $|\langle sU \rangle| = 6$. Wegen $|\langle sU \rangle| \leq |\langle s \rangle|$ muss ein $s \in \mathrm{Sym}(4)$ existieren mit $|\langle s \rangle| \geq 6$, was nicht der Fall ist.