B. Külshammer
B. Sambale

Ausgabe: 05.05.09
Abgabe: 12.05.09

Gruppentheorie

Übungsblatt 4

Aufgabe 14

Gegeben seien Gruppen K, H und ein Homomorphismus $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(K), h \mapsto \varphi_h$. Auf $G := H \times K$ wird eine Multiplikation definiert durch $(k, h)(k', h') := (k\varphi_h(k'), hh')$ für $h, h' \in H$, $k, k' \in K$. Zeigen Sie, dass G eine Gruppe ist, die eine zu H isomorphe Untergruppe $\tilde{H}$ und einen zu K isomorphen Normalteiler $\tilde{K}$ mit $G = \tilde{K}\tilde{H}$ und $\tilde{K} \cap \tilde{H} = 1$ besitzt. (Man nennt G das **semidirekte Produkt** von K und H (bzgl. φ) und schreibt $G = K \rtimes H$ oder genauer $G = K \rtimes_\varphi H$.)

Aufgabe 15

(i) Zeigen Sie, dass es bis auf Isomorphie genau zwei Gruppen der Ordnung 4 gibt.

(ii) Beweisen Sie, dass für jede Gruppe G mit $Z(G) = 1$ gilt: $Z(\mathrm{Aut}(G)) = 1$.

Aufgabe 16

Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und G die Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, K)$, die aus allen Matrizen der folgenden Form besteht:

$$\begin{pmatrix} 1 & * & \dots & \dots & \dots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $Z(G)$.

Aufgabe 17

Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{4\}$. Zeigen Sie, dass zu jedem $\sigma \in \mathrm{Sym}(n) \setminus \{1\}$ ein $\tau \in \mathrm{Sym}(n)$ mit $\mathrm{Sym}(n) = \langle \sigma, \tau \rangle$ existiert. Zeigen Sie auch, dass diese Aussage für $n = 4$ falsch ist.