Gruppentheorie

FSU Jena - SS 2009

Übungsserie 03 - Lösungen

Stilianos Louca

July 9, 2009

Aufgabe 10

(i) Per Konstruktion hat die j-te Spalte von $f(\sigma)$ die Form

$$(0 \dots 0 \underset{\sigma(j)}{\underset{\uparrow}{1}} 0 \dots 0)^T$$

Da alle $\sigma(j)$ verschieden sind, sind die Spalten linear unabhängig, das heißt tatsächlich $f(\sigma) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$. f ist Homomorph denn

$$(f(\sigma) \cdot f(\pi))^i_j = \sum_k f^i_k(\sigma) f^k_j(\pi) = \sum_k \delta^i_{\sigma(k)} \delta^k_{\pi(j)} = \delta^i_{\sigma(\pi(j))} = f^i_j(\sigma \circ \pi)$$

Offensichtlich ist f injektiv, da für zwei Permutationen $\sigma, \pi \in \mathrm{Sym}(n)$ mit $\sigma(k) \neq \pi(k)$ für irgendein k, $f(\sigma)$ und $f(\pi)$ sich in der k-ten Spalte unterscheiden würden.

(ii) Offensichtlich ist $1 \in B$, und für zwei obere-Dreiecksmatrizen M, N:

$$(MN)^i_j = \underbrace{\underbrace{M^i_k}_{\substack{0\\\text{für}\\k<i}} \underbrace{N^k_j}_{\substack{0\\\text{für}\\j<k}}}_{\substack{0\\\text{für}\\i>j}}$$

das heißt $MN \in B$. Der (i,j)-te Eintrag (Zeile i Spalte j) von A^{-1} setzt sich zusammen aus

$$(A^{-1})^i_j = \frac{1}{\det(A)} \cdot (-1)^{i+j} \cdot \tilde{M}^j_i$$

wobei $\det(\tilde{M}^j_i)$ die (j,i)-Minore von M sei, das heißt die Determinante der nach Streichen der j-ten Zeile und i-ten Spalte verbleibenden Matrix $\tilde{M}^j_i$. Da $\tilde{M}^j_i$ für $i > j$ in oberer-Dreiecksform bleibt, mit einem Eintrag 0 auf der Diagonalen (j-te Zeile), ergibt sich $\det(\tilde{M}^j_i) = 0$, das heißt M^{-1} ist ebenfalls in oberer-Dreiecksform: $M^{-1} \in B$.

(iii) Eine obere-Dreiecksmatrix M besitzt die Determinante

$$\det(M) = \prod_{i=1}^n M^i_i$$

und ist genau dann regulär wenn gilt $M^i_i \neq 0 \quad \forall\ i = 1, .., n$. Dies ergibt $(q-1)^n$ Möglichkeiten für die Form der Diagonalen. Abgesehen davon können alle anderen (oberen) Einträge (Anzahl $\frac{n(n-1)}{2}$) beliebig sein, das heißt

$$|B| = (q-1)^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

(iv) Betrachten die Matrix $T_{(ij)} \in S$ die (von links angewandt) bei einer Testmatrix die i-te mit der j-ten Zeile vertauscht:

$$T_{(ij)} = \left(\begin{array}{cccccccc} & & & & & \overset{i}{\downarrow} & & \\ & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & \vdots & \ddots & & & \vdots & & \vdots \\ j \rightarrow & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ & \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)$$

und die Matrix $A^{\lambda}_{(ij)}$ die (von links angewandt) einer Testmatrix die i-te Zeile auf die j-te Zeile, mit Skalar $\lambda \neq 0$ multipliziert, dazu-addiert:

$$A^{\lambda}_{(ij)} = 1 + \left(\begin{array}{cccccccc} & & & & & \overset{i}{\downarrow} & & \\ & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & \vdots & \ddots & & & & & \\ j \rightarrow & 0 & \dots & 1 & \dots & \lambda & \dots & 0 \\ & \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ & \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)$$

Ist $i \leq j$ so ist $A^{\lambda}_{(ij)} \in B$. Ist $i > j$, so kann $A^{\lambda}_{(ij)}$ durch eine ähnliche (z.B. $A^{\lambda}_{(1j)} \in B$) mit Hilfe einer Zeilenvertauschung erzeugt werden.

Bekanntlich ist nun jede Matrix durch Zeilenvertauschungen und Zeilenadditionen (unter Skalarmultiplikation) in obere Dreiecksform gebracht werden (bemerke dass das Ergebnis stets regulär ist), das heißt für irgendeine $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ existieren $M_1, .., M_k \in \langle B, S\rangle$ so dass $\underbrace{M_k M_{k-1} \dots M_1}_{:=M \in \langle B,S\rangle} \cdot A \in B$, also

$$A = \underbrace{M^{-1}}_{\in\langle B,S\rangle} \underbrace{MA}_{\in B} \in \langle B, S\rangle$$

Somit ist $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \subset \langle B, S\rangle$. Die andere Inklusion ist trivial.

□

Aufgabe 11

Es sei $U = \langle q_1, .., q_r\rangle \leq (\mathbb{Q}, +)$ und o.B.d.A $q_i > 0$. Wählen irgendein $p \in \mathbb{Q}$ aus, so dass gilt $q_i = k_i \cdot p,\ i = 1, .., r$ für irgendwelche $k_i \in \mathbb{Z}$. Solch ein p existiert, z.B.

$$p := \frac{1}{\prod_{i=1}^{r} n_i} \quad \rightsquigarrow \quad k_i := \underbrace{\frac{\prod_{j=1}^{r} n_j}{n_i}}_{\in\mathbb{Z}} \cdot \underbrace{m_i}_{\in\mathbb{Z}}$$

wobei $q_i = \frac{m_i}{n_i},\ m_i, n_i \in \mathbb{Z}$. Dann ist offensichtlich

$$\{q_1, .., q_r\} \subset \langle p\rangle \leq \mathbb{Q} \quad \Rightarrow \quad \langle q_1, .., q_r\rangle \leq \underbrace{\langle p\rangle}_{\text{zyklisch}}$$

Als Untergruppe einer zyklischen Gruppe ist auch $\langle q_1, .., q_r\rangle$ zyklisch.
□

Aufgabe 12

O.B.d.A sei $H \ntrianglelefteq G$, ansonsten ist $gHg^{-1} = H \quad \forall\, g \in G$ was die Behauptung impliziert.
Für $x, y \in G$ mit $xH = yH$ gilt

$$xHx^{-1} = yHx^{-1} = y(xH)^{-1} = y(yH)^{-1} = yHy^{-1}$$

das heißt

$$\left|\left\{gHg^{-1} : g \in G\right\}\right| \le |\{gH : g \in G\}| = |G : H|$$

Wegen $gHg^{-1} = \mathrm{ad}_g(H) \cong H$ ist $\left|gHg^{-1}\right| = |H|$. Anderseits sind wegen $1 \in gHg^{-1}$ die gHg^{-1} nicht disjunkt.
Da mindestens zwei verschiedene gHg^{-1} existieren (da $H \ntrianglelefteq G$) ist

$$\bigcup_{g \in G} gHg^{-1} < |G : H| \cdot |H| \overset{\text{Lagrange}}{=} |G|$$

□

Aufgabe 13

(i) Betrachten den Gruppen-Homomorphismus (*inklusion*)

$$f : \mathrm{Sym}(2) \to \mathrm{Sym}(3)\ ,\ f((1\ 2)) := (1\ 2)\quad .$$

Dann ist zwar $\mathrm{Sym}(2) \trianglelefteq \mathrm{Sym}(2)$, aber

$$f(\mathrm{Sym}(2)) = \{1,\ (1\ 2)\} \ntrianglelefteq \mathrm{Sym}(3)$$

denn

$$(1\ 2\ 3)\,\{1,\ (1\ 2)\}\,(1\ 2\ 3)^{-1} = \{1,\ (1\ 2\ 3)(1\ 2)(3\ 2\ 1)\} = \{1,\ (3\ 2)\} \ne \{1,\ (1\ 2)\}$$

(ii) Die Untergruppen

$$K := \langle (1\ 2)(3\ 4)\rangle \quad , \quad H := \langle (1\ 4)(2\ 3),\ (1\ 3)(2\ 4)\rangle$$

erfüllen

$$K \trianglelefteq H \trianglelefteq \mathrm{Sym}(4)$$

und $K \ntrianglelefteq \mathrm{Sym}(4)$. Der GAP-Code

```
G:=SymmetricGroup(4);
H:=Group([(1,4)(2,3), (1,3)(2,4)]);
K:=Group([(1,2)(3,4)]);
 Print("K normal in H? ", IsNormal(H,K), "\nH normal in G? ", IsNormal(G,H),
     "\nK normal in G? ", IsNormal(G,K), "\n");
```

bestätigt das Ergebnis.

(iii) Betrachten die Gruppe

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R} \right\}$$

mit der gewöhnlichen Matrix-Multiplikation. G ist tatsächlich eine Gruppe, denn

$$\overbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}}^{\in G} \overbrace{\begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix}}^{\in G} = \begin{pmatrix} ad & ae + bf \\ 0 & cf \end{pmatrix} \in G \tag{1}$$

und

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & -b/ac \\ 0 & 1/c \end{pmatrix} \in G\ .$$

Aus

$$\begin{pmatrix} z_1 a & z_1 b + z_2 c \\ 0 & z_3 c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ 0 & z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ 0 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a z_1 & a z_2 + b z_3 \\ 0 & c z_3 \end{pmatrix}$$

folgt $z_2 = 0$ und $z_1 = z_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (setze $b = 0$ und $a = 2c$) als notwendige und hinreichende Bedingung, das heißt

$$Z(G) = \left\{ \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$$

Definieren den Endomorphismus

$$f : G \to G \quad , \quad f \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(aus Gl. 1 folgt das f tatsächlich homomorph ist). Insbesondere

$$f \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}^{\in Z(G)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin Z(G)$$

(iv) Es ist

$$\mathrm{Sym}(6) = \langle (1\ 2),\ (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6) \rangle$$

Der GAP-Code

```
Print("Is generator? ", Size(Group([(1,2),(1,2,3,4,5,6)]))=Factorial(6), "\n");
```

bestätigt das Ergebnis. Anderseits kann die Untergruppe

$$H := \langle (1\ 2),\ (3\ 4),\ (5\ 6) \rangle = \{1,\ (1\ 2),\ (3\ 4),\ (5\ 6),\ (1\ 2)(3\ 4),\ (1\ 2)(5\ 6),\ (3\ 4)(5\ 6),\ (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)\}$$

nicht durch 2 Elemente erzeugt werden, was durch den GAP-Code

```
H:=Group([(1,2), (3,4), (5,6)]);
GeneratedBy2 := false;
for q in H do
  for p in H do
    GeneratedBy2 := GeneratedBy2 or (Size(Group([q,p])) = Size(H));
  od;
od;
Print("H generated by two? ", GeneratedBy2, "\n");
```

bestätigt werden kann.