B. Külshammer
B. Sambale

Ausgabe: 28.04.09
Abgabe: 05.05.09

Gruppentheorie

Übungsblatt 3

Aufgabe 10

Seien K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$.

(i) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \mathrm{Sym}(n) \to \mathrm{GL}(n, K), \sigma \mapsto (\delta_{i\sigma(j)})_{i,j=1}^n$, ein Monomorphismus ist. (Die Elemente in $S := \mathrm{Bld}(f)$ heißen **Permutationsmatrizen**.)

(ii) Zeigen Sie, dass die regulären oberen Dreiecksmatrizen eine Untergruppe B von $\mathrm{GL}(n, K)$ bilden.

(iii) Bestimmen Sie $|B|$ im Fall $q := |K| < \infty$.

(iv) Zeigen Sie: $\mathrm{GL}(n, K) = \langle B, S \rangle$.

Aufgabe 11

Beweisen Sie, dass jede endlich erzeugte Untergruppe von $(\mathbb{Q}, +)$ zyklisch ist.

Aufgabe 12

Beweisen Sie, dass $G \neq \bigcup_{g \in G} gHg^{-1}$ für jede echte Untergruppe H einer endlichen Gruppe G gilt.

Aufgabe 13

(i) Geben Sie einen Homomorphismus von Gruppen $f : G \to H$ und einen Normalteiler $M \trianglelefteq G$ mit $f(M) \ntrianglelefteq H$ an.

(ii) Zeigen Sie, dass in $\mathrm{Sym}(4)$ die Normalteiler-Relation nicht transitiv ist.

(iii) Finden Sie eine Gruppe, in der das Zentrum nicht vollinvariant ist.

(iv) Zeigen Sie, dass $G := \mathrm{Sym}(6)$ von zwei Elementen erzeugt wird, aber eine Untergruppe H hat, die sich nicht durch zwei Elemente erzeugen lässt.

Bei dieser Aufgabe können Sie wieder GAP verwenden.