Gruppentheorie

FSU Jena - SS 2009

Übungsserie 02 - Lösungen

Stilianos Louca

May 8, 2009

Aufgabe 05

(i) Ein Automorphismus $A \in \mathrm{Aut}(\mathrm{Sym}(n))$ ist eindeutig bestimmt durch die Bilder von $q := \big(1\ 2\ ..\ n\big)$ und $p := \big(1\ 2\big)$, da diese Erzeuger von $\mathrm{Sym}(n)$ sind. Dabei kann (für $n \geq 3$) q nicht auf eine Transposition τ abgebildet werden, da sonst

$$A(\underbrace{q^2}_{\neq 1}) = \tau^2 = 1$$

wäre. Offensichtlich ist auch $A(q) = 1$ unmöglich. Ähnlich, kann p nur auf Produkte disjunkter 2-Zyklen $z_1, .., z_k$ abgebildet werden, denn

$$p^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (A(p))^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (\underbrace{z_1 \cdot .. \cdot z_k}_{\substack{\text{o.B.d.A} \\ \text{Zerlegung in} \\ \text{disjunkte Zyklen}}})^2 = (z_1 z_1) \cdot .. \cdot (z_k z_k) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad z_i^2 = 1 \quad \forall\ i = 1, .., k$$

Speziell für $n = 3$ kann also $(1\ 2)$ nur auf $(1\ 2)$, $(2\ 3)$ und $(3\ 1)$ abgebildet, $(1\ 2\ 3)$ nur auf $(1\ 2\ 3)$ und $(3\ 2\ 1)$ abgebildet werden (d.h. $|\mathrm{Aut}(\mathrm{Sym}(3))| \leq 2 \times 3 = 6$.

Aufgrund von Symmetriegründen, reicht es nun die Bijektivität bzw. Homomorphie von A für den Fall $A(1\ 2) = (1\ 2)$ und $A(1\ 2\ 3) = (1\ 2\ 3)$ zu prüfen. Doch dies entspricht genau der Identitätsabbildung, die bekanntlich homomorph und bijektiv ist. Somit besitzt $\mathrm{Sym}(3)$ genau $3 \times 2 = 6$ Automorphismen.

Alternativ, gilt

$$6 = |\mathrm{Sym}(3)| \overset{(ii)}{=} |\mathrm{Sym}(3)/Z(\mathrm{Sym}(3))| = |\mathrm{Inn}(\mathrm{Sym}(3))| \leq |\mathrm{Aut}(\mathrm{Sym}(3))|$$

(ii)
- Sei $c \in Z(\mathrm{Sym}(n))$, o.B.d.A Zerlegt in disjunkte Zyklen $c = c_1..c_m$. Dann gilt für alle Zyklen $|c_i| \leq 2$, denn, wäre $c_i = (n_1\ n_2\ ..\ n_k)$, $k > 2$ für irgendein i, so müsse:

  $$c_1 \circ .. \circ (n_1\ n_2) \circ c_i \circ ..\ \circ c_m = (n_1\ n_2) \circ c \overset{c \in Z(\mathrm{Sym}(n))}{=} c \circ (n_1\ n_2) = c_1 \circ .. \circ c_i \circ (n_1\ n_2) \circ c_{i+1} \circ .. \circ c_m$$

  sein, das heißt

  $$(n_2\ n_3\ ..\ n_k) = (n_1\ n_2) \circ c_i = c_i \circ (n_1\ n_2) = (n_1\ n_3\ n_4\ ..\ n_k)$$

  ein Widerspruch!

  Es seien also alle $|c_i| = 2$. Dann muss $m \leq 1$ sein, denn wäre $c_i = (n_1\ n_2)$, $c_j = (n_3\ n_4)$ (alle n_i paarweise verschieden, o.B.d.A $i = 1, j = 2$), so müsse

  $$(n_1\, n_3) \circ (n_1\, n_2)(n_3\, n_4) \circ c_3 \circ .. \circ c_m = (n_1\, n_3) \circ c \overset{c \in Z(\mathrm{Sym}(n))}{=} c \circ (n_1\, n_3) = (n_1\, n_2)(n_3\, n_4) \circ (n_1\, n_3) \circ c_3 \circ .. \circ c_m$$

  sein, das heißt

  $$(n_1\ n_2\ n_3\ n_4) = (n_1\ n_3)(n_1\ n_2)(n_3\ n_4) = (n_1\ n_2)(n_3\ n_4)(n_1\ n_3) = (n_1\ n_4\ n_3\ n_2)$$

  ein Widerspruch!

Somit kann c aus einem 2-Zyklus bestehen. Doch selbst eine einzelne Permutation $(n_1\ n_2)$ kann für $n \geq 3$ nicht im Zentrum liegen, denn für irgendein $n_3 \notin \{n_1, n_2\}$ wäre:

$$(n_1\ n_3\ n_2) = (n_2\ n_3) \circ (n_1\ n_2) \overset{c \in Z(\mathrm{Sym}(n))}{=} (n_1\ n_2) \circ (n_2\ n_3) = (n_1\ n_2\ n_3)$$

ein Widerspruch! Für $n = 2$ ist die Permutation $(1\ 2)$ jedoch tatsächlich im Zentrum. Somit:

$$Z(\mathrm{Sym}(n)) = \begin{cases} \{1\} & : n \neq 2 \\ \{1, (1\ 2)\} & : n = 2 \end{cases}$$

Alternativ: Sei o.B.d.A. $n \geq 3$, $1 \neq \sigma \in \mathrm{Sym}(n)$ und $k \neq \sigma(k) =: l$ mit $k, l \in \{1, .., n\}$. Für $m \in \{1, .., n\} \setminus \{k, l\}$ ist dann

$$((m, l) \circ \sigma)(k) = m \neq l = (\sigma \circ (m, l))(k)$$

also $\sigma \notin Z(\mathrm{Sym}(n))$. Demnach muss $Z(\mathrm{Sym}(n)) \overset{n \geq 3}{=} \{1\}$ sein.

- Es bezeichne $H_{ij} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$, $j \neq i$ die Matrix, die (von links angewandt) einer Testmatrix die i-te Zeile auf die j-te Zeile dazu-addiert, das heißt

$$H_{ij} = 1 + \begin{pmatrix} & & & & \overset{i}{\downarrow} & & \\ & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & \vdots & \ddots & & & & & \\ j \rightarrow & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ & \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ & 0 & \dots & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Bemerke: Von rechts angewandt, addiert H_{ij} die j-te Spalte auf die i-te Spalte.
Ist nun $A \in Z(\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$, so muss für $i \neq j$ insbesondere gelten

$$A^j_j = (AH_{ij})^j_j = (H_{ij}A)^j_j = A^j_j + A^i_j \quad \Rightarrow \quad A^i_j = 0$$

(A^i_j : Element von A in i-te Zeile und j-te Spalte). Somit muss $A = \mathrm{diag}(a_1, .., a_n)$ diagonal sein. Genauer gesagt, müssen sogar alle diagonal-Elemente a_i gleich sein, denn

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ 0 & a_2 & \dots & a_2 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

Anderseits, ist die Bedingung $A = \mathrm{diag}(a, ..., a)$, $a \neq 0$ hinreichend, das heißt

$$Z(\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})) = \{\mathrm{diag}(a, .., a) : a \neq 0\}$$

(iii) Es ist

$$\mathrm{Sym}(3) = \langle (1\ 2\ 3),\ (1\ 2) \rangle \quad , \quad \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Der Ansatz

$$(1\ 2) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad (1\ 2\ 3) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit entsprechender Fortsetzung:

$$(3\ 2\ 1) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \ , \ (2\ 3) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(1\ 3) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \ , \ () \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist genau ein Isomorphismus.

Alternativ: Jedes Element aus $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_2)$ permutiert die Elemente in $\mathbb{F}_2^2 \setminus \{0\}$ und $\left|\mathbb{F}_2^2 \setminus \{0\}\right| = 3$. Die Abbildung

$$f : \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_2) \to \mathrm{Sym}(\mathbb{F}_2^2 \setminus \{0\}) \cong \mathrm{Sym}(3)$$

definiert durch

$$f(A) = (v \mapsto Av)$$

ist ein Isomorphismus, also $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_2) \cong \mathrm{Sym}(3)$.

Aufgabe 06

Äquivalent zu $a^2 = 1 \ \ \forall\, a \in M$ ist $a = a^{-1} \ \ \forall\, a \in M$, das heißt M ist eine Gruppe. Wegen

$$\underbrace{(ab)(ba)}_{abba} = 1 = \underbrace{(ba)(ab)}_{baab}$$

ist $(ab) = (ba)^{-1}$. Wegen $(ba)^{-1} = (ba)$ folgt dass M abelsch ist.
$\square$

Aufgabe 07

Richtung "⇒"

Trivial.

Richtung "⇐"

Sei $H \neq \emptyset$ endlich und $ab \in H\ \forall\, a, b \in H$.
Da H nicht-leer ist, existiert ein $a \in H$ und somit $a^n \in H \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Doch da H endlich ist, existieren $n < m \in \mathbb{N}$ so dass $a^n = a^m$, also

$$a^{m-n}a^n = a^m = a^n \quad \Rightarrow \quad \underbrace{a^{m-n}}_{\in H} = 1$$

das heißt insbesondere $a^n \in H\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0$. Wegen $(m - n - 1) \geq 0$ folgt somit

$$a^{-1} = a^{m-n-1} \in H$$

(was natürlich für alle $a \in H$ gilt).
$\square$

Aufgabe 08

(i)
- Für beliebige $a, b \in G$ existieren $h \in H, k \in K$ mit $a = hbk$.
  Beweis: Seien $a = h_a k_a,\ \ b = h_b k_b$ für irgendwelche $h_a, h_b \in H,\ \ k_a, k_b \in K$. Dann

$$\underbrace{(h_a h_b^{-1})}_{\in H}\, b\, \underbrace{(k_b^{-1} k_a)}_{\in K} = a$$

- Sei nun $c \in G$ beliebig. Setzen $a := x^{-1}cy$ und $b := x^{-1}y$, dann existieren $h \in H,\ \ k \in K$ mit $a = hbk$ und somit

$$c = xay^{-1} = x\, \overbrace{hx^{-1}yk}^{b}\, y^{-1}$$

Alternativ: Zu $x, y \in G$ sei $x^{-1}y = hk$ für geeignete $h \in H,\ \ k \in K$. Dann

$$(xHx^{-1})(yKy^{-1}) = xH\underbrace{(x^{-1}y)}_{hk}Ky^{-1} = x\underbrace{(Hh)}_{H}\underbrace{(kK)}_{K}y^{-1} = \underbrace{x\underbrace{Gy^{-1}}_{G}}_{G} = G$$

(ii) Zeigen beide Inklusionsrichtungen:

$$\underbrace{(H \cap Z(G))}_{\leq Z(G)} \cdot \underbrace{(K \cap Z(G))}_{\leq Z(G)} \subset Z(G)Z(G) \subset Z(G)$$

Sei anderseits $z \in Z(G)$, mit $z = h_z k_z,\ h_z \in H,\ k_z \in K$. Dann gilt:

$$\forall\ h \in H\ :\ h_z k_z h = zh \overset{z \in Z(G)}{=} hz = h h_z k_z \overset{\substack{H \\ \text{Abelsch}}}{=} h_z h k_z \quad \Rightarrow\ k_z h = h k_z$$

$$\text{Analog: } \forall\ k \in K\ :\ h_z k = k h_z$$

$$\Rightarrow\ h_z(hk) = h h_z k = (hk) h_z \quad \wedge \quad k_z(hk) = h k_z k = (hk) k_z \quad \Rightarrow \quad h_z, k_z \in Z(G)$$

also

$$Z(G) \subset (Z(G) \cap H) \cdot (Z(G) \cap K)$$

□

Aufgabe 09

(i) Der Code

```
i:=E(4);
a:=[[i, 0], [0, -i]];
b:=[[0, 1], [1, 0]];
G:=Group([a, b]);
Print("|G| = ", Size(G), ", |Z(G)| = ", Size(Centre(G)), "\n");
```

ergibt $|G| = 8$ und $|Z(G)| = 2$.

(ii) Der Code

```
for g in G do
  PrintArray(g, " : Order ", Order(g), "\n");
od;
```

ergibt:

$$\left|\left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle\right| = 2\ ,\ \left|\left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle\right| = 2$$

$$\left|\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle\right| = 2\ ,\ \left|\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle\right| = 1$$

$$\left|\left\langle \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right\rangle\right| = 2\ ,\ \left|\left\langle \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\rangle\right| = 2$$

$$\left|\left\langle \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \right\rangle\right| = 4\ ,\ \left|\left\langle \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \right\rangle\right| = 4$$

(iii) Der Code

```
C:=ConjugacyClassesSubgroups(G);
for gens in [1..Size(C)] do
  for g in C[gens] do
    Print(g, ", Order: ", Size(g), ", Normal: ", IsNormal(G,g), "\n");
  od;
od;
```

ergibt

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle : \text{Ordnung 1, Normalteiler}$$
$$\left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle : \text{Ordnung 2, Normalteiler}$$
$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle : \text{Ordnung 2}$$
$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle : \text{Ordnung 2}$$
$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\rangle : \text{Ordnung 2}$$
$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right\rangle : \text{Ordnung 2}$$
$$\left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle : \text{Ordnung 4, Normalteiler}$$
$$\left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\rangle : \text{Ordnung 4, Normalteiler}$$
$$\left\langle \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \right\rangle : \text{Ordnung 4, Normalteiler}$$
$$\left\langle \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle : \text{Ordnung 8, Normalteiler}$$

(iv) Der Code

```
C:=ConjugacyClassesSubgroups(G);
SG:=[];
for gens in [1..Size(C)] do
  for g in C[gens] do
    Add(SG,g);
  od;
od;

for b in SG do
  if IsNormal(G,b) then
    for a in SG do
      if IsNormal(b,a) and IsSubgroup(b,a) and (IsNormal(G,a)=false) then
        Print(a, " NormalSubgroupOf\n  ", b, "\n\n");
      fi;
    od;
  fi;
od;
```

ergibt 4 Beispiele:

$$A = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad B = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad B = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad B = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad B = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$