B. Külshammer
B. Sambale

Ausgabe: 21.04.09
Abgabe: 28.04.09

Gruppentheorie

Übungsblatt 2

Aufgabe 5

(i) Wie viele Automorphismen hat Sym(3)?

(ii) Bestimmen Sie $Z(\mathrm{Sym}\,(n))$ und $Z(\mathrm{GL}\,(n, K))$ für $n \in \mathbb{N}$ und jeden Körper K.

(iii) Zeigen Sie: $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_2) \cong \mathrm{Sym}(3)$.

Aufgabe 6

Für alle Elemente a in dem Monoid M sei $a^2 = 1$. Zeigen Sie, dass M eine abelsche Gruppe ist.

Aufgabe 7

Zeigen Sie, dass eine nichtleere endliche Teilmenge H einer Gruppe G genau dann eine Untergruppe von G ist, wenn $ab \in H$ für alle $a, b \in H$ gilt.

Aufgabe 8

Zeigen Sie, dass für Untergruppen H, K einer Gruppe G mit $G = HK$ gilt:

(i) Für $x, y \in G$ ist $G = (xHx^{-1})(yKy^{-1})$.

(ii) Sind H, K abelsch, so ist $Z(G) = (Z(G) \cap H)(Z(G) \cap K)$.

Aufgabe 9

Sei $G := \langle a, b \rangle$ mit $a := \left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right)$, $\quad b := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$.

(i) Zeigen Sie: $|G| = 8$ und $|Z(G)| = 2$.

(ii) Bestimmen Sie alle Elemente in G und deren Ordnungen.

(iii) Bestimmen Sie die Untergruppen und Normalteiler von G und deren Ordnungen.

(iv) Finden Sie Untergruppen A, B von G mit $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, aber $A \ntrianglelefteq G$.

Bei dieser Aufgabe können Sie GAP verwenden.