B. Külshammer
B. Sambale

Ausgabe: 16.04.09
Abgabe: 21.04.09

Gruppentheorie

Übungsblatt 1

Aufgabe 1

(i) Sind $(\mathbb{N}, \mathrm{ggT})$ und $(\mathbb{N}, \mathrm{kgV})$ Halbgruppen (Monoide) ?

(ii) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f(n)$ die Anzahl der Primfaktoren von n. Ist $f : (\mathbb{N}, \mathrm{kgV}) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +)$ ein Homomorphismus?

Aufgabe 2

(i) Konstruieren Sie eine Halbgruppe mit unendlich vielen linksneutralen Elementen.
Hinweis: Versuchen Sie es mit einer geeigneten Menge von 2×2-Matrizen.

(ii) Geben Sie ein Monoid M und ein Element $a \in M$ an, das unendlich viele Linksinverse hat.

Aufgabe 3

(i) Zeigen Sie, dass für jede Menge X die Abbildung $f : (\mathcal{P}(X), \cup) \longrightarrow (\mathcal{P}(X), \cap), \quad A \longmapsto X \setminus A$, ein Isomorphismus ist.

(ii) Gegeben seien Mengen X, Y und eine Bijektion $f : X \longrightarrow Y$. Konstruieren Sie einen Isomorphismus $F : (\mathrm{Abb}(X), \circ) \longrightarrow (\mathrm{Abb}(Y), \circ)$.

Aufgabe 4

Beantworten Sie die folgenden Fragen mit GAP:

(i) Wie viele Untergruppen von $\mathrm{Sym}(9)$ haben die Ordnung 4 ?

(ii) Wie viele Untergruppen hat $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$?

(iii) Gegeben seien die folgenden Permutationen von $\Omega := \{0, 1, \ldots, 9, 10\} \cup \{\infty\}$:

$$\alpha : x \mapsto x + 1, \quad \beta : x \mapsto 2x, \quad \gamma : x \mapsto -x^{-1};$$

dabei rechnet man jeweils modulo 11, und das Rechnen mit ∞ wird geeignet definiert. Welche Ordnung hat die von α, β, γ erzeugte Untergruppe von $\mathrm{Sym}(\Omega)$?