Versuch 317

Elektrischer Schwingkreis

1. Aufgaben

1.1 Nehmen Sie für erzwungene Schwingungen am Parallelschwingkreis den Amplituden- und Phasengang auf. Bestimmen Sie Resonanzfrequenz und Bandbreite, und berechnen Sie daraus die Güte des Schwingkreises sowie den Reihenverlustwiderstand.

1.2 Bestimmen Sie das logarithmische Dekrement für freie Schwingungen ohne bzw. mit zusätzlichem Dämpfungswiderstand. Vergleichen Sie den daraus berechneten Verlustwiderstand mit dem Wert aus Aufgabe 1 sowie mit dem ohmschen Widerstand der Spule. Skizzieren Sie für verschiedene Dämpfungen den zeitlichen Verlauf der Schwingungen.

1.3 Untersuchen Sie das Verhalten gekoppelter Schwingkreise bei freier und erzwungener Schwingung.

2. Grundlagen

Stichworte:
Schwingungsdifferentialgleichung, Thomson'sche Schwingungsformel, logarithmisches Dekrement, Amplituden- und Phasengang, Bandbreite, Güte, Scheinwiderstand, Schwingkreiskopplung, Resonanzfrequenzaufspaltung

2.1 Freie Schwingungen

Im Experiment wird ein Parallelschwingkreis nach Bild 1 verwendet, der einen Gesamtreihenverlustwiderstand R besitzt. Nach der 1. Kirchhoffschen Regel sind die Ströme durch alle 3 Bauelemente gleich :

$$I_L = I_R = I_C = I = \frac{dQ}{dt} \qquad \text{Q - elektrische Ladung} \qquad (1)$$

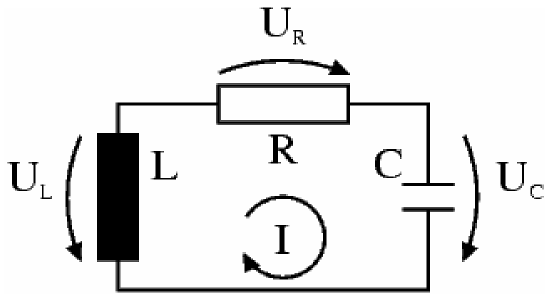


Bild 1: Parallelschwingkreis

Die zweite Kirchhoffsche Regel ergibt die Beziehung

$$U_L = U_R + U_C \tag{2}$$

An der Spule gilt :

$$U_L = -L \frac{dI}{dt} = -L \frac{d^2Q}{dt^2} \tag{3}$$

Entsprechend am Widerstand :

$$U_R = RI = R \frac{dQ}{dt} \tag{4}$$

und am Kondesator :

$$U_C = \frac{Q}{C} \tag{5}$$

Setzt man die Beziehung (3) bis (5) in Gl.(2) ein, so erhält man die Differentialgleichung

$$\frac{d^2U_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{LC} U_C = 0 \tag{6}$$

deren Lösung die Schwingungen im betrachteten Parallelschwingkreis beschreibt.
Leiten Sie diese Gleichung her!
Die allgemeine Lösung der Gl. (6) hat die Form

$$U_C = U_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot \cos(\omega t + \varphi) \tag{7}$$

mit der Dämpfungskonstanten

$$\delta = \frac{R}{2L} \tag{8}$$

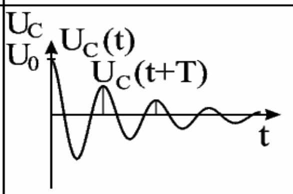
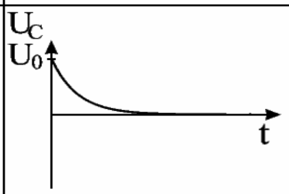
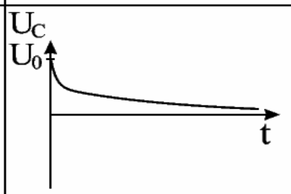
der Kreisfrequenz

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \tag{9}$$

und der Eigenfrequenz **(Thomson'sche Schwingungsformel):**

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \tag{10}$$

Die Schwingungsfrequenz f ist gegenüber der Eigenfrequenz des Kreises infolge der Dämpfung zu niedrigeren Frequenzen hin verschoben. Die Anfangsamplitude U_0 und der Nullphasenwinkel φ sind Integrationskonstanten und unabhängig von den Schwingkreisparametern. Es können folgende Fälle unterschieden werden:

	Schwingfall	aperiodischer Grenzfall	Kriechfall
Dämpfung	$\delta < \omega_0$	$\delta = \omega_0;\ \omega = 0$	$\delta > \omega_0$
Zeit-verlauf			

Im Falle einer gedämpften Schwingung kann man aus dem Verhältnis zweier, nach der Periode T aufeinander folgender Amplituden das **logarithmische Dekrement D** mit der Beziehung

$$D = \delta T = \ln\left(\frac{U_C\,(t)}{U_C\,(t+T)}\right) \tag{11}$$

berechnen. D ist ein Maß für die Dämpfung des Kreises.

Der *Reihenverlustwiderstand R_V* des Parallelschwingkreises setzt sich aus dem ohmschen Widerstand der Spule R_S, den dielektrischen Verlusten des Kondensators und den Streuverlusten des Kreises zusammen. Der Schwingkreis kann zusätzlich durch einen ohmschen Widerstand R_D gedämpft werden. Nach Gleichung (8) ergibt sich

$$\delta = \frac{R}{2L} = \frac{R_V + R_D}{2L} \tag{12}$$

2.2 Erzeugung freier Schwingungen

Um in einem Schwingkreis freie Schwingungen anzuregen, muß ihm von außen einmalig Energie durch einen kurzzeitigen Spannungsimpuls (z.B. Rechtecksignal mit nachgeschaltetem Kondensator) über einen hochohmigen Koppelwiderstand R_K zugeführt werden (vgl. Bild 2 - Eingang B). Dadurch wird der Kondensator C aufgeladen, und es kommt in der Folge zu einer periodischen Umwandlung von elektrischer Feldenergie in magnetische Feldenergie und umgekehrt. Dieser Vorgang erfolgt solange, bis die Energie infolge der Wirkwiderstände in Wärmeenergie umgewandelt oder durch andere Energieumwandlungsprozesse (Abstrahlung, dielektrische Verluste) wesentlich vermindert ist (gedämpfte Schwingung).

2.3 Erzeugung erzwungener Schwingungen

Einem Schwingkreis können durch periodische Energiezufuhr auch Schwingungen aufgezwungen werden, deren Frequenz nicht mit der Eigenfrequenz des Kreises übereinstimmt. Das tritt ein, wenn z.B. nach Bild 2 - Eingang A der Parallelschwingkreis über einen Koppelwiderstand R_K mit einer Sinusspannung $U_\sim$ vorgegebener Frequenz f erregt wird. Im eingeschwungenen Zustand entsteht dann im Schwingkreis eine Wechselspannung, deren Amplitude und Phasendifferenz gegenüber der Generatorspannung $U_\sim$ durch die Parameter des Schwingkreises und die Kenngrößen der Generatorspannung festgelegt werden.

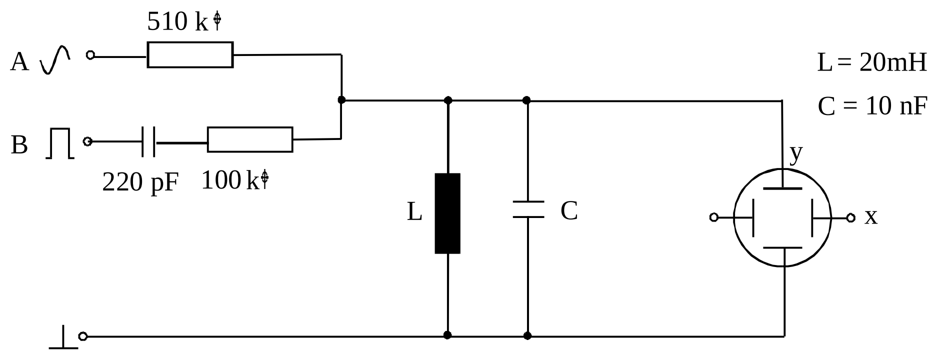


Bild 2: Schaltung zur Messung freier und erzwungener Schwingungen

2.4 Erzwungene Schwingungen

Nach Bild 2 liegt an den Y-Platten (Eingang 1, CH I) des Oszilloskops die Kondensatorspannung U_C (Schwingkreisspannung) an. An den zweiten Eingang (CH II) kann die Generatorspannung $U_\sim$ angelegt werden. Für das Spannungsverhältnis U_C / $U_\sim$ gilt nach der Spannungsteilerregel:

$$\frac{U_C}{U_\sim} = \frac{Z}{Z + R_K} \qquad \text{Z - Scheinwiderstand des Kreises} \qquad (13)$$

Mit Hilfe der komplexen Wechselstromrechnung (Scheinwiderstand der Spule Z_L = $i\omega L$, Scheinwiderstand des Kondensators $Z_C = 1/(i\,\omega C)$ erhält man aus Gl. (13) nach entsprechenden Umformungen für das Amplitudenverhältnis von
Schwingkreis- und Generatorspannung (Bild 3a)

$$\left|\frac{U_C}{U_\sim}\right| = \sqrt{\frac{R^2 + (\omega L)^2}{\left[R + R_K\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)\right]^2 + \omega^2\left(L + C \cdot R \cdot R_K\right)^2}}$$

(14)

mit $\omega = 2\pi f$ und $R = R_D + R_V$. Für die Phasendifferenz $\Delta\varphi$ zwischen U_C und $U_\sim$ ergibt sich (Bild 3b)

$$\tan \Delta\varphi = \frac{\omega \cdot R_K \left(L - L\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - C \cdot R^2 \right)}{R^2 + R\,R_K + \omega^2 \cdot L^2} \tag{15}$$

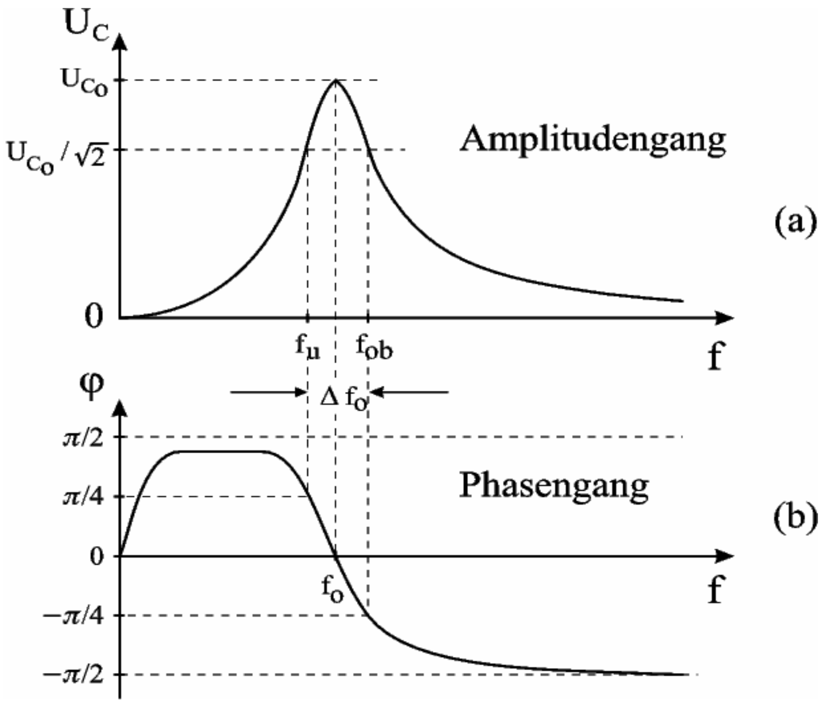


Bild 3: Amplituden- und Phasengang des Parallelschwingkreises

Die Frequenzen, bei denen die Schwingkreisspannung gegenüber dem Resonanzfall auf den $1/\sqrt{2}$-fachen Wert abgesunken ist, werden untere Grenzfrequenz f_{un} und obere Grenzfrequenz f_{ob} genannt. Bei diesen Frequenzen beträgt die Phasendifferenz $|\Delta\varphi| = 45\,°$. Als Bandbreite Δf_0 bezeichnet man die Differenz $\Delta f_0 = f_{ob} - f_{un}$.
Für die Güte Q des Schwingkreises gelten folgende Beziehungen:

$$Q = \frac{Z_0}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R} \approx \frac{f_0}{\Delta f_0} \quad \text{mit} \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \tag{16}$$

2.5 Fourieranalyse einer gedämpften Schwingung

Zwischen der Zeitfunktion einer freien Schwingung Gl.(7) und der Resonanzkurve (Amplitudengang) bei der erzwungenen Schwingung besteht ein mathematischer Zusammenhang, welcher durch eine *Fouriertransformation* gegeben ist (Zeitbereich ↔ Frequenzbereich) .
Der reinen, ungedämpften Sinusschwingung entspricht im Frequenzraum eine einzelne Frequenz (f_0). Ist die Schwingung gedämpft, so ergibt sich nach der Fourieranalyse das sogenannte Fourierspektrum, das ein Maximum bei f_0 hat und nach hohen und tiefen Frequenzen hin abfällt (Bild 4). Es ist uns bereits aus dem

vorhergehenden Abschnitt als Resonanzkurve bekannt. Die Bandbreite Δf_0 wird in diesem Zusammenhang als spektrale Halbwertsbreite bezeichnet. Sie ist mit dem logarithmischen Dekrement über :

$$D = \frac{\pi \, \Delta f_0}{f_0} \tag{17}$$

verbunden. Aus Gl. 16 und Gl. 17 folgt: Q proportional 1 / D, d.h. je stärker die Dämpfung desto kleiner die Güte und desto breiter die Resonanzkurve. Die zeitliche Dämpfung einer Schwingung ist also gleichbedeutend mit einer spektralen Verbreiterung der Resonanz- oder Eigenfrequenz.

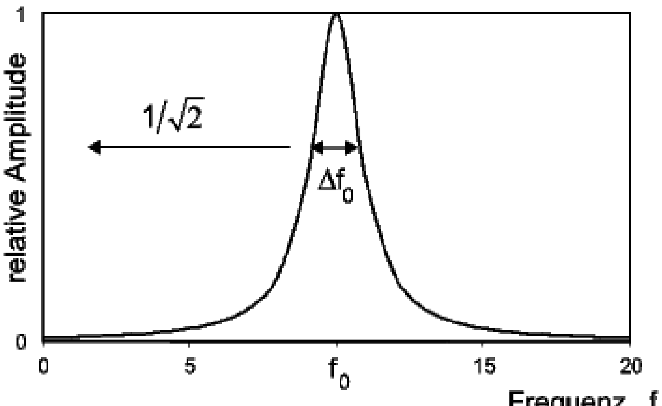


Bild 4: Fourierspektrum

2.6 Gekoppelte Schwingkreise

Dieser Teil des Experiments baut auf den physikalischen Grundlagen des Versuchs 120 (Gekoppelte Pendel) auf.

Verschiedene Schwingkreise können miteinander gekoppelt sein (galvanisch, induktiv, kapazitiv). Dabei beeinflussen sie sich gegenseitig in ihrem elektrischen Verhalten.

Im Versuch werden zwei (nahezu) identische Schwingkreise induktiv gekoppelt. Bei freier Schwingung beobachtet man eine Schwebung, welche der abklingenden Sinuskurve überlagert ist (Bild 5). Diese ist Ausdruck des wechselseitigen Energieaustausches zwischen beiden Kreisen.

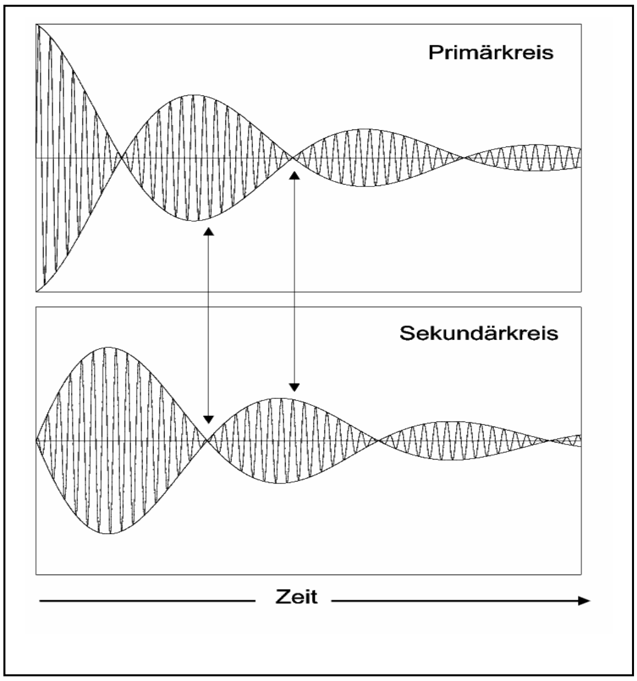


Bild 5: Freie Schwingungen gekoppelter Schwingkreise

Bei der Anregung erzwungener Schwingungen zeigen sich jetzt zwei Maxima der Amplitude und zwar bei je einer Frequenz unterhalb (f_1) sowie oberhalb (f_2) der ursprünglichen Resonanzfrequenz (Bild 6). Die Stärke dieser sogenannten Resonanzfrequenzaufspaltung Δf hängt vom Koppelgrad der beiden Spulen ab:

$$f_{1/2} = \frac{f_0}{\sqrt{1 \pm k}} \quad \text{und} \quad \Delta f = f_2 - f_1 \tag{18}$$

(k = M/L bei induktiver Kopplung, M ist die Gegeninduktivität der Spulenanordnung)

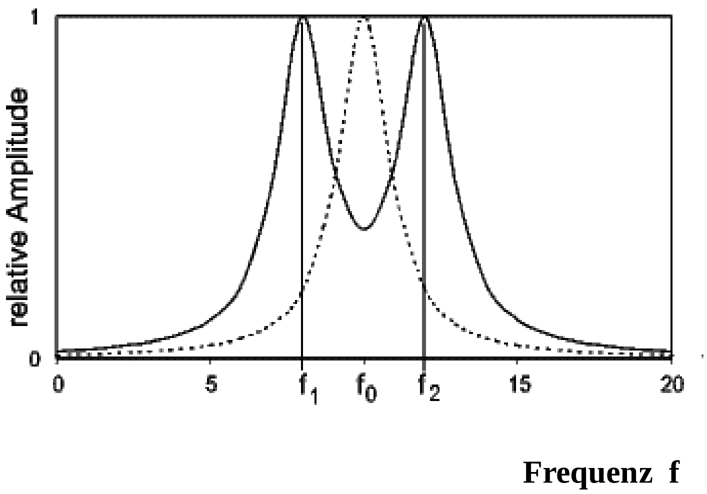


Bild 6: Resonanzfrequenzaufspaltung

Ist die Kopplung nur schwach, so gilt $\Delta f \approx k \cdot f_0$ und die Aufspaltung erfolgt symmetrisch zu f_0 . Mittels Fouriertransformation kann auch hier aus dem Zeitverlauf (Bild 5) das Fourierspektrum (Bild 6) berechnet werden. Umgekehrt läßt sich das Entstehen einer Schwebung aus der Überlagerung der beiden Schwingkreisfrequenzen (*Fundamentalschwingungen*) f_1 und f_2 des gekoppelten Systems erklären. Für die Schwebungsfrequenz f_S sowie die Grundschwingung unter der Einhüllenden f_G gilt:

$$f_S = \frac{(f_2 - f_1)}{2} \quad \text{und} \quad f_G = \frac{(f_1 + f_2)}{2} \tag{19}$$

Die Resonanzfrequenzaufspaltung gekoppelter gleichartiger Schwingungssysteme ist eine fundamentale physikalische Erscheinung, die auch für mechanische und optische Oszillatoren gilt. Sie führt u.a. dazu, daß bei dicht gepackten atomaren Bausteinen (Gitteratome im Festkörper) sich die scharfen Energieniveaus (Eigenfrequenz) durch Vielfachaufspaltung zu Energiebändern verbreitern.

3. Versuchsdurchführung

Bauen Sie die Schaltung nach Bild 2 auf !

3.1 Erzwungene Schwingungen

Schließen Sie einen Sinusgenerator an Eingang A an. Legen Sie Schwingkreis- und Generatorspannung an die beiden Y-Eingänge (CH I; CH II) des Zweistrahl-oszilloskops (DUAL–Betrieb). Verwenden Sie zum Triggern möglichst die amplituden-konstante Generatorspannung.
Nehmen Sie für 10 bis 15 Frequenzen die Amplitude der Schwingkreisspannung und die zugehörige Phasendifferenz zwischen U_C und $U_\sim$ auf. Achten Sie darauf, daß die Meßwerte im Bereich der Resonanz hinreichend dicht liegen. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit Bild 3.
Aufgrund der Darstellung mittels Zweistrahloszilloskop sind Amplitude und Phasendifferenz im Prinzip direkt ablesbar. Bei kleinen Phasenunterschieden kann man eine höhere Genauigkeit erreichen, wenn $\Delta\varphi$ über eine Lissajous-Figur bestimmt wird (X–Y-Betrieb, vgl. Bild 7).

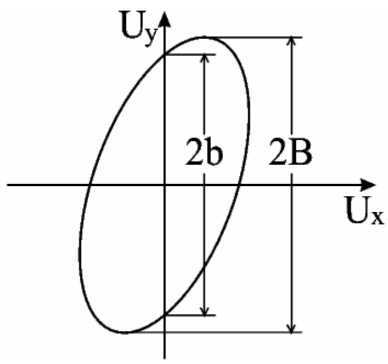


Bild 7: Bestimmung der Phasendifferenz $\Delta\varphi$ mit Hilfe von Lissajous - Figuren

Es gilt : $$\Delta\varphi = \arc \sin \left(\frac{b}{B}\right)$$

3.2 Freie Schwingungen

Ein Rechtecksignal (f ≈ 200 Hz) wird über einen Kondensator (Eingang B) eingekoppelt. Die Triggerung erfolgt in der Regel extern, ist aber auch manuell (feinfühliges Einstellen des Pegels notwendig) oder mit Hilfe des Eingangssignals (Lade- und Entladespitzen des Kondensators, DUAL-Betrieb) möglich. Als zusätzliche Dämpfung werden Dekadenwiderstände „x 1000 Ω“ und „x 100 Ω“in den Kreis geschaltet. Für die Messung des ohmschen Widerstandes der Spule steht ein Digital-Multimeter zur Verfügung.
Die Bestimmung des logarithmischen Dekrements erfolgt durch Mittelwertbildung aus möglichst vielen Schwingungsperioden. Der zusätzliche Dämpfungswiderstand R_D soll im Bereich 100...500 Ω liegen. Das Bild der Schwingung für noch größere Dämpfung (R_D = 1...2 kΩ) ist zu skizzieren. Wo in etwa ist der aperiodische Grenzfall zu vermuten?

3.3 Gekoppelte Schwingkreise

Ein zweiter und möglichst identischer Schwingkreis wird induktiv mit dem ersten gekoppelt. Beobachten Sie U(t) bei Anregung freier Schwingungen (analog 3.2, ohne Dämpfungswiderstand, externe Triggerung) im Primär- und im Sekundarkreis. Vergleichen Sie Ihre Meßkurve mit Bild 5. Messen Sie die Periodendauer für Grundschwingung und Schwebung und berechnen Sie daraus f_G und f_S. Zur Dokumentation werden die Oszilloskopbilder mittels Plotter ausgedruckt (Hinweis dazu am Versuchsplatz).

Anschließend werden erzwungene Schwingungen (analog 3.1) angeregt und die beiden Resonanzfrequenzen bestimmt. Achten Sie dabei auch auf die Phasenlage der Signale von Primar- und Sekundarkreis!

Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den theoretischen Vorhersagen (Gültigkeit von Gl. 19).