Versuch 211

Viskosität von Luft

1. Aufgaben

1.1 Messen Sie die Viskosität η von Luft mit dem Rotationsviskosimeter

- bei Atmosphärendruck für zwei verschiedene Umlauffrequenzen des inneren Zylinders.
- bei einer Drehfrequenz und verschiedenen Drücken bis herab zu etwa 2 Pa.

1.2 Stellen Sie die Viskosität η in Abhängigkeit vom Druck p grafisch dar!

1.3 Aus der Viskosität bei Atmosphärendruck ist nach Gleichung (5) der effektive gaskinetische Moleküldurchmesser für Luft zu bestimmen.

2. Grundlagen

Stichworte:
Innere Reibung in Gasen, mittlere freie Weglänge, Viskosität, gaskinetischer Moleküldurchmesser, laminare Strömung, Drehschwingung

2.1 Innere Reibung in Gasen

Wenn zwei differentiell dünne Schichten einer Flüssigkeit oder eines Gases wirbelfrei aneinander gleiten (laminare Strömung) dann wirkt eine Reibungskraft F_R auf sie, die der Geschwindigkeit entgegengesetzt gerichtet ist und vom Gradienten der Geschwindigkeit senkrecht zur Bewegungsrichtung abhängt.

$$F_R = -\eta \ A \ \frac{dv}{dr} \tag{1}$$

η... dynamische Viskosität, Einheit: $1\ N \cdot s\ /m^2 = 1\ Pa\ s$

$\frac{dv}{dr}$... Geschwindigkeitsgefälle (-gradient), A...Fläche der gleitenden Schichten.

Die innere Reibung in Gasen kann mit Hilfe der kinetischen Gastheorie (vgl. z.B. /11/) verstanden werden. Diese liefert für die Viskosität die Beziehung

$$\eta = \frac{1}{3}\,\rho\,\overline{v}\,\Lambda \qquad (2)$$

ρ ist die Gasdichte und $\overline{v}$ die mittlere thermische Geschwindigkeit der Moleküle

$$\overline{v} = \sqrt{\frac{8 \cdot k \cdot T}{\pi \cdot \mu}} \qquad (3)$$

μ...ist die Masse eines Moleküls
Λ...ist die mittlere freie Weglänge der Gasmoleküle. Bei ihrer Bestimmung sind zwei Druckbereiche zu unterscheiden:

a) Höherer Druck

Die mittlere freie Weglänge Λ ist gegeben durch

$$\Lambda = \frac{1}{\pi \cdot \sqrt{2}} \cdot \frac{\mu}{D^2 \rho} \qquad (4)$$

Dabei ist D der gaskinetische Moleküldurchmesser.

Durch Einsetzen von (3) und (4) in (2) erhält man für die Viskosität unter Benutzung der Zustandsgleichung für ideale Gase

$$\eta = \sqrt{\frac{4}{9\,\pi^3}}\;\frac{\sqrt{R\,T \cdot M}}{D^2 \cdot N_A} \qquad (5)$$

(molare Gaskonstante $R = 8{,}31\ \mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}$, Avogadrokonstante $N_A = 6{,}023 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$, molare Masse M)

Weil $\Lambda \sim 1/\rho$ ist entsprechend Gl. 2 die Viskosität unabhängig vom Druck. Dieses an sich unerwartete Ergebnis stellt einen der überzeugendsten Erfolge der Kinetischen Gastheorie dar. Nach Gl. 5 ist $\eta \sim \sqrt{T}$.

b) Niederer Druck

Mit abnehmendem Druck wird wegen der abnehmenden Gasdichte die freie Weglänge Λ immer größer, bis sie in die Größenordnung der Gefäßdimension (Abstand der beiden Zylinder) kommt. Unterhalb eines gewissen Druckes bleibt also die freie Weglänge konstant, und entsprechend Gl. 2 nimmt die Zähigkeit mit abnehmender Dichte proportional zum Druck ab.

2.2 Rotationsviskosimeter

Unter einer evakuierbaren Glasglocke befinden sich zwei Zylinder: Der innere Zylinder mit dem Außenradius r_1 wird durch einen Motor mit der Umlauffrequenz f_u gedreht. Der äußere Zylinder mit dem Innenradius r_2 hängt frei schwingend an einem Torsionsfaden. Infolge der inneren Reibung wird durch Vermittlung der dazwischenliegenden Luft der äußere Zylinder aus seiner Gleichgewichtslage verdreht.

2.2.1 Statischer Fall

Bei rotierendem innerem Zylinder befindet sich der äußere Zylinder dann in Ruhe, wenn sich das durch die innere Reibung bedingte Drehmoment M_R und das durch die Verdrillung des Torsionsfadens hervorgerufene Drehmoment M_T aufheben, wenn also gilt:

$$M_R + M_T = 0 \tag{6}$$

Mit der Annahme, daß der Luftspalt zwischen beiden Zylindern so klein ist, daß das Geschwindigkeitsgefälle dv/dr konstant bleibt, erhalten wir mit Hilfe von (1) für M_R

$$M_R = \eta \, A \, \frac{2\pi \; r_1 \; f_u \; r_2}{d} \tag{7}$$

(f_u ... Umdrehungsfrequenz des inneren Zylinders; $d = r_2 - r_1$) und für M_T

$$M_T = - D_\varphi \, \Delta \, \varphi \tag{8}$$

Die Reibungsfläche A ist durch die Höhe h und den Radius r_2 des äußeren Zylinders gebenen :

$$A = 2\pi \, r_2 h \tag{9}$$

Die Winkelrichtgröße $D\varphi$ kann aus der Schwingungsdauer T und dem Trägheitsmoment I des äußeren Zylinders bestimmt werden:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D_\varphi}} \tag{10}$$

Wenn man mit den Gleichungen (7) bis (10) in Gleichung (6) eingeht, erhält man für die Zähigkeit

$$\eta = \frac{I \; d}{r_2^2 \; r_1 \; h} \; \frac{\Delta \; \varphi}{T^2 \; f_u}$$

$$\eta = K \cdot \frac{\Delta\varphi}{T^2 \, f_u} \tag{11}$$

Der Faktor K ist die sogenannte Viskosimeterkonstante und muß für den jeweiligen Aufbau bekannt sein.

2.2.2 Dynamischer Fall

Da wegen der geringen Dämpfung bis zur Einstellung des Gleichgewichtes eine zu große Zeit vergehen würde, ist die Messung im dynamischen Betrieb durchzuführen:
Wir können die Schwingungen des äußeren Zylinders als eine gedämpfte Drehschwingung behandeln. Zur Berücksichtigung der Dämpfung ist im Dämpfungsglied der Schwingungsdifferentialgleichung für die Winkelgeschwindigkeit die Geschwindigkeitsdifferenz zwischen äußerem und innerem Zylinder einzusetzen. Wir erhalten folgende Schwingungsgleichung für den äußeren Zylinder.

$$I\,\ddot{\varphi} + R\left(\dot{\varphi} - 2\pi \cdot f_u\right) + D_\varphi\,\varphi = 0 \qquad (12)$$

Die Reibungskonstante R ist entsprechend Gleichung (7) gegeben durch

$$R = \eta\, A\, \frac{2\pi\, r_1\, r_2}{d} \qquad (13)$$

Die Gleichung (12) beschreibt eine gedämpfte Drehschwingung mit dem logarithmischen Dekrement

$$\delta = \frac{R}{2I}\, T$$

wobei der äußere Zylinder um eine neue Gleichgewichtslage schwingt, die um den Winkel

$$\Delta\varphi = \frac{R}{D_\varphi}\, f_u \qquad (14)$$

gegenüber der dem nicht rotierenden inneren Zylinder zugeordneten Gleichgewichtslage verschoben ist.

Durch Einsetzen von Gleichung (13) und (10) in Gleichung (14) erhält man den gleichen Wert für die Verschiebung des Gleichgewichts durch den rotierenden inneren Zylinder wie entsprechend (11) im statischen Fall.

3. Versuchsdurchführung

3.1 Messung

Mit Hilfe der auf der Grundplatte befindlichen Libelle ist eine möglichst genaue waagerechte Betriebslage einzustellen. Mit dem vorhandenen Motor können zwei verschiedene Umlauffrequenzen des inneren Zylinders eingestellt werden. Zum Ablesen der Verdrehung des äußeren Zylinders ist an diesem eine Gradeinteilung (Strichabstand 2°) angebracht.
Die Änderung der Gleichgewichtslage $\Delta\varphi$ infolge der Rotation des inneren Zylinders wird folgendermaßen gemessen: Man bestimmt jeweils bei stillstehendem sowie bei rotierendem innerem Zylinder für den schwingenden äußeren Zylinder 4 Umkehrpunkte links (d.h. Winkelstellungen φ_i, $i = 1,3,5,7$) sowie 3 Umkehrpunkte rechts (φ_i, $i = 2,4,6$). Danach werden durch Mittelwertbildung die Gleichgewichtslagen $\bar{\varphi}$ und daraus die Differenz

$$\Delta\varphi = \overline{\varphi}_{\text{still}} - \overline{\varphi}_{\text{rot}} \tag{15}$$

bestimmt.

$$\overline{\varphi} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\left(\varphi_1 + \varphi_3 + \varphi_5 + \varphi_7\right) + \frac{1}{3}\left(\varphi_2 + \varphi_4 + \varphi_6\right)\right] \tag{16}$$

Die Schwingungsdauer T wird aus der Zeitdifferenz zwischen mehreren Durchgängen durch die Gleichgewichtslage ermittelt. Nachdem $\Delta\varphi$ in Bogenmaß umgerechnet wurde, kann nach Gleichung (11) die Zähigkeit berechnet werden. Der Wert für K ist am Versuchsplatz angegeben. f_u kann man in einfacher Weise selber messen. Zur Änderung der Umlauffrequenz wird der Treibriemen auf das andere Scheibenpaar gelegt.

Zur Messung der Druckabhängigkeit wird der Rezipient ausgepumpt und darauf schrittweise Luft eingelassen. Der Druck wird mit einem Membran- ($\geq$ 1 Torr) bzw. Wärmeleitungsvakuummeter (< 1 Torr) gemessen.

Richtwerte (in Torr): 0,02; 0,05; 0,1; 0,2; 1; 10; 100; $\approx$ 760

Achtung ! Vakuumpumpe nur nach Einweisung durch den Assistenten in Betrieb nehmen und ausschalten !
Rezipient nicht ohne Splitterschutz evakuieren !

3.2 Hinweise zur Auswertung

Da der auszumessende Druckbereich viele Größenordnungen überstreicht, ist bei der grafischen Darstellung der Druck sinnvollerweise logarithmisch aufzutragen. Um den linearen Zusammenhang zwischen η und p (vgl. 2.1b) trotzdem nachweisen zu können, kann auch die η-Achse logarithmisch geteilt werden. Analysieren Sie die Meßkurve in Hinblick auf die von der Theorie gemachten Voraussagen (η= const. bei höheren Drücken, $\eta \sim p$ bei niedrigen Drücken, Übergangsgebiet bei $\Lambda \approx$ Zylinderabstand). Vergleichen Sie den Wert für die Viskosität bei Atmosphärendruck sowie den berechneten gaskinetischen Moleküldurchmesser jeweils mit den erwarteten Werten. Beachten Sie bei der Fehlerbetrachtung, daß bestimmte Fehleranteile (unter anderem ΔK) zwar die Genauigkeit des Absolutwertes η beeinflussen (hier also als zufällige Fehler in Erscheinung treten) jedoch auf die Form der Meßkurve (z. B. die Streuung der Meßwerte bzgl. einer idealen Geraden) keinen Einfluß haben.

Schätzen Sie unter Berücksichtigung der Meßfehler ab, ob für η eine Angabe der Temperatur erforderlich ist!

3.3 Fragen

a) Zum Verständnis der Aufgabenstellung.

- Was versteht man unter dynamischer und kinematischer Zähigkeit.
- Durch welche Beziehung ist nach dem Gleichverteilungssatz die mittlere quadratische Geschwindigkeit der Moleküle eines idealen Gases angegeben ?
- Welche qualitativen Aussagen liefert die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung ?
- Was bedeutet mittlere freie Weglänge ?

b) Weiterführende Fragen :

- Warum ist die innere Reibung ein „Transportvorgang“?
  Welche anderen Erscheinungen in Gasen kennen Sie, die mit Transportvorgängen verbunden sind?
- Warum ist die Kenntnis der Zähigkeit von Luft wichtig für die genaue Bestimmung der elektrischen Elementarladung?