

Versuch 201

Wärmeleitfähigkeit von Gasen

1. Aufgabe

- 1.1 Messen Sie die *relative* Wärmeleitfähigkeit λ_x/λ_0 (bezogen auf Luft bei äußerem Luftdruck) für Luft und CO₂ in Abhängigkeit vom Druck p . Stellen Sie λ_x/λ_0 als Funktion von p grafisch dar.
- 1.2 Interpretieren Sie die Meßkurven.

2. Grundlagen

Stichworte:

Wärmeleitung, Wärmeströmung, Wärmestrahlung, kinetische Gastheorie, mittlere freie Weglänge, Boltzmannkonstante, molekulare Freiheitsgrade, Wheatstone - Brücke.

2.1 Druckabhängigkeit der Wärmeleitung in Gasen

Der Transport von Wärmeenergie von einem Ort höherer zu einem Ort niedrigerer Temperatur kann durch Wärmeströmung (Konvektion), Wärmeleitung und Wärmestrahlung erfolgen. In einem verdünnten Gas (keine Konvektion) und bei Temperaturen in der Nähe der Zimmertemperatur (kaum Strahlung) überwiegt die Wärmeleitung deutlich die beiden anderen Arten des Wärmeübergangs.

Die Wärmeleitfähigkeit λ eines Stoffes ist eine Materialeigenschaft und definiert als das Verhältnis von Wärmestromdichte und Temperaturgradient (siehe Gl. 4). Sie hat die Dimension $\frac{W}{m \cdot K}$. In Gasen ist die Wärmeleitfähigkeit vom Druck und von der Temperatur abhängig.

Nach der kinetischen Gastheorie gilt **bei nicht zu kleinen Drücken:**

$$\lambda = \frac{1}{6} \Lambda \bar{v} f k n \quad (1)$$

(Λ ... mittlere freie Weglänge, \bar{v} ... mittlere Geschwindigkeit der Moleküle, f ... Zahl der Freiheitsgrade der jeweiligen Molekülsorte, k ... Boltzmannkonstante, n ... Moleküldichte)

mit
$$\Lambda = \left(\pi \sqrt{2} n D^2 \right)^{-1} \quad (2)$$

und
$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi} \frac{N_A}{M}} \quad (3)$$

(D... gaskinetischer Moleküldurchmesser, T... Temperatur in Kelvin, N_A ... Avogadrokonstante, M... Molmasse).

Es fällt auf, daß nach Gl.1 keine Druckabhängigkeit existieren dürfte, da die Teilchenzahldichte zu n proportional, die freie Weglänge Λ jedoch umgekehrt proportional zu p ist, das Produkt $\Lambda \cdot n$ also konstant ist. Dennoch weiß man aus der Praxis, daß z.B. in Thermosgefäßen luftleer gepumpte Doppelwandungen zur Wärmeisolation genutzt werden. Worin liegt die Lösung dieses Widerspruchs? Entscheidend ist das Verhältnis zwischen freier Weglänge und den Abmessungen des Versuchsgefäßes. Solange die freie Weglänge kleiner ist, gilt Gl.1 und die Wärmeleitfähigkeit ist tatsächlich über weite Bereiche eine Konstante. Wenn aber Λ (zu niedrigen Drücken hin) die Dimension des Gefäßes überschreitet, wird die Wegstrecke, welche die Teilchen maximal zurücklegen können, durch die Gefäßabmessungen bestimmt. Λ muß in Gl. 1 dann faktisch als Konstante angesehen werden und λ wird direkt von der Molekülzahldichte n und damit vom Druck p abhängig.

Die Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit, welche über \bar{v} in Gl.1 eingeht, soll hier nicht Gegenstand der Betrachtung sein.

2.2. Meßmethode

Die Versuchsanordnung besteht aus einem dünnen Heizdraht, der sich auf der Achse eines zylindrischen Glasrohres befindet (vgl. Bild 1 und 2). Die Wärme wird durch das Gas vom Draht nach außen transportiert und über die Rohrwand an die Umgebung abgegeben. Man speist den Draht mit einer konstanten elektrischen Leistung, die gerade die Wärmeverluste kompensiert. Somit bleibt nach Einstellung eines **stationären Zustandes** eine konstante Temperaturdifferenz zwischen Draht und Rohr bestehen.

Der einfachste Fall für die Wärmeleitung ist der Wärmestrom Φ durch eine ebene Platte (d...Dicke, A...Fläche), deren beide Seiten auf konstanter Temperatur (T_1, T_2) gehalten werden:

$$\Phi = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{d} A \quad (4)$$

Zur Verallgemeinerung schreibt man diese Gleichung für differentiell dünne Schichten dx :

$$\Phi = -\lambda \cdot \frac{dT}{dx} \cdot A \quad (5)$$

Für eine zylinderförmige Schicht der Dicke dr gilt entsprechendes in Zylinderkoordinaten:

$$\Phi = -\lambda \frac{dT}{dr} 2\pi r l \quad (6)$$

(r... Radius, l... Länge des Zylinders).

Unter der Voraussetzung, daß Φ konstant ist, kann man Gl. 6 umformen in

$$\frac{\Phi}{r} dr = -2\pi l \lambda \cdot dT \quad (7)$$

und integrieren. Man erhält dann für den Wärmestrom von der Achse des Zylinders nach außen zum Glasrohr

$$\Phi = \lambda \frac{2\pi l}{\ln\left(\frac{r_G}{r_D}\right)} (T_D - T_G) \quad (8)$$

(T_D ... Temperatur des Drahtes, T_G ... Temperatur am Glasrohr, r_D ... Radius des Drahtes, r_G ... Radius des Glasrohres).

Nach dem Energieerhaltungssatz ist der Wärmestrom Φ gleich der zugeführten elektrischen Leistung:

$$\Phi = \frac{U^2}{R_D} \quad (9)$$

(R_D ... Widerstand des Drahtes, U ... angelegte Spannung).

Durch Einsetzen von Gl. 9 in Gl. 8 erhält man für die Wärmeleitfähigkeit

$$\lambda = \frac{\ln \frac{r_G}{r_D}}{2\pi l (T_D - T_G)} \frac{U^2}{R_D} \quad (10)$$

Gl.10 liefert den Absolutwert der Wärmeleitfähigkeit, erfordert aber die Messung vieler Größen. Wesentlich einfacher ist die Bestimmung eines auf die (bekannte) Wärmeleitfähigkeit von Luft bezogenen Relativwertes (Methode von SCHLEIERMACHER). Es genügt dann, nur die Spannung U zu messen, während alle anderen Größen aus Gl.10 konstant gehalten werden. l , r_G und r_D sind Apparatkonstanten, T_G entspricht etwa der Zimmertemperatur, die Temperatur T_D des Drahtes und damit gleichzeitig der Widerstand R_D sind im stationären Fall konstant. Anstatt Gl.10 kann man dann schreiben: $\lambda = \text{const} \cdot U^2$. Für Luft bei äußerem Luftdruck (unsere Bezugsgröße) heißt das: $\lambda_0 = c U_0^2$ und für alle anderen Drücke und Gasarten $\lambda_x = c U_x^2$. Damit erhält man zur Bestimmung der *relativen* Wärmeleitfähigkeit die einfache Beziehung:

$$\frac{\lambda_x}{\lambda_0} = \left(\frac{U_x}{U_0} \right)^2 \quad (11)$$

3. Versuchsdurchführung

3.1 Messung

Der Drahtwiderstand wird als unbekannter Widerstand R_x in eine Wheatstone-Brücke geschaltet (siehe Bild 1). Das Verhältnis der Abgleichwiderstände $R_1 : R_2$ wird konstant und etwa 1:1 gehalten. Durch das Konstanthalten wird erreicht, daß die Spannung am Heizdraht proportional zur Gesamtspannung U^B an der Brücke ist. Damit kann man anstelle von Gl. 11 schreiben:

$$\frac{\lambda_x}{\lambda_0} = \left(\frac{U_x^B}{U_0^B} \right) \quad (12)$$

In einem Vorversuch muß zunächst die Größe des Drahtwiderstandes R_x im ungeheizten Zustand ermittelt werden. Man legt bei hohem Druck (gute Wärmeableitung) eine kleine Spannung U_B (etwa 0,5 V) an, so daß sich der Draht noch nicht nennenswert erwärmt und stellt den Normalwiderstand R_N so ein, daß die Brücke abgeglichen ist. Wegen $R_1 = R_2$ gilt nun $R_x = R_N$.

Die eigentliche Messung (geheizter Draht) soll bei einer Temperatur von ca. 50-60°C erfolgen, was einem um etwa 10% höheren Widerstand entspricht. D. h. also: R_N wird um 10% erhöht, womit man die Zieltemperatur T_D und den zugehörigen Drahtwiderstand R_D (Gl. 10) vorgibt. Dieser Wert wird danach nicht mehr verändert. Nun versucht man, durch Erhöhen der Brückenspannung U_B (Heizen des Drahtes) die Brücke wieder zum Abgleich zu bringen.

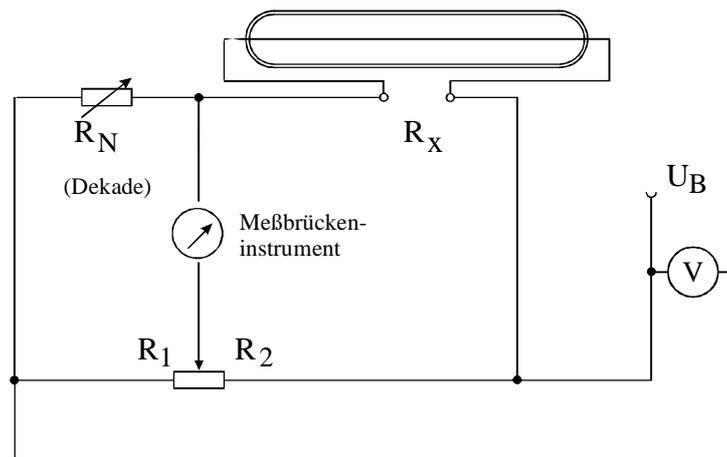


Bild 1: Versuchsaufbau (Wheatstone-Brücke)

Zu jedem eingestellten Druck erhält man so genau einen Spannungswert U_x^B , (für Luft bei Atmosphärendruck U_0^B), aus dem mit Gl.12 die relative Wärmeleitfähigkeit berechnet werden kann.

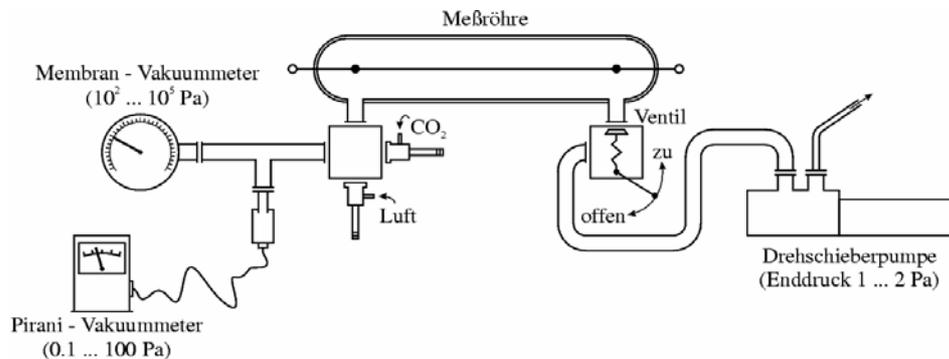


Bild 2: Versuchsaufbau (Vakuumerzeugung)

Im Praktikumsversuch sollen auf diese Weise zwei Meßkurven (für Luft und CO_2) gewonnen werden, die die Abhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit vom Druck zeigen. Dabei ist der gesamte, mit der vorhandenen Anlage erzeugbare Druckbereich zu nutzen.

Richtwerte: 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500, 1000, 2000, 5000, 10.000, 20.000, 40.000, (in Pa) 60.000, 100.000

Zeichnen Sie beide Kurven (λ_x / λ_0 über p) in ein Diagramm (p - Achse log. geteilt).

3.2 Hinweise zur Auswertung

Interpretieren Sie den Verlauf der Meßkurven! Vergleichen Sie den Verlauf und die absolute Höhe der Kurven von Luft und CO_2 !

Bei welchen Druckwerten setzt die Druckabhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit ein?

Welcher Wert ergibt sich aus der Theorie nach Gl.13 oder Tabelle aus Versuch 206? Versuchen Sie, Gründe für die auftretenden Abweichungen zu finden.

Spielen andere Arten der Wärmeübertragung im Versuch eine Rolle?

Wie ist das Verhalten bei sehr kleinen Drücken?

Zusatzaufgabe: Durch Kombination der Gleichungen (1) bis (3) erhält man eine Formel für λ , die verschiedene Schlußfolgerungen erlaubt. Schätzen Sie den gaskinetischen Moleküldurchmesser von CO_2 mit Hilfe der gegebenen Wärmeleitfähigkeit bei 0°C ab! Wie ist λ von f , M und D abhängig? Welchen Einfluß hat die Temperatur?

$$\begin{aligned} \text{Wärmeleitfähigkeit (760 Torr, } 0^\circ\text{C): Luft} &: 24,1 \cdot 10^{-3} \frac{\text{W}}{\text{K} \cdot \text{m}} \\ \text{CO}_2 &: 14,3 \cdot 10^{-3} \frac{\text{W}}{\text{K} \cdot \text{m}} \end{aligned}$$

Zur Berechnung der mittleren freien Weglänge kann Gl. 2 verwendet werden.

Mit $n = \frac{p}{kT}$ folgt :

$$\Lambda = \frac{kT}{\pi \sqrt{2} p D^2} \quad (13)$$