Versuch 124

Longitudinal schwingende Zylinderstäbe

1. Aufgaben

1.1 Nehmen Sie die Resonanzkurven von zwei dünnen Stäben (Aluminium, Messing) in der 1. Ordnung auf. Bestimmen Sie aus der Periodendauer T_1 die Schallgeschwindigkeit c und den Elastizitätsmodul E sowie aus der Breite der Resonanzkurve die Güte Q der Stabschwingung und die dynamische Viskosität η des Materials.

1.2 Messen Sie die Resonanzperiodendauern T'_n eines dicken Stahlstabes in den Ordnungen n = 1, 2, 3, 4, 5, 6. Ermitteln Sie daraus die Schallgeschwindigkeit c, den Elastizitätsmodul E und den Torsionsmodul G .

2. Grundlagen

<u>Stichworte:</u>
Schwingungsgleichung, Schallwelle, Resonanz, Bandbreite, Güte, Elastizitätsmodul, Poissonzahl

2.1 Dünne Stäbe

Longitudinale Wellen pflanzen sich in einem dünnen elastischen Stab mit der Geschwindigkeit

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{1}$$

fort. Dabei ist E der Elastizitätsmodul und ρ die Dichte des Stabmaterials. Die Wellenlänge der Schwingung beträgt:

$$\lambda = c \cdot T \tag{2}$$

wobei T die Periodendauer der Schwingung ist. Der Stab gerät in Resonanz, d.h. es bilden sich stehende Wellen im Stab genau dann, wenn die Stablänge l ein ganzzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge ist (siehe Bild 1):

$$l = n\,\frac{\lambda}{2} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3}$$

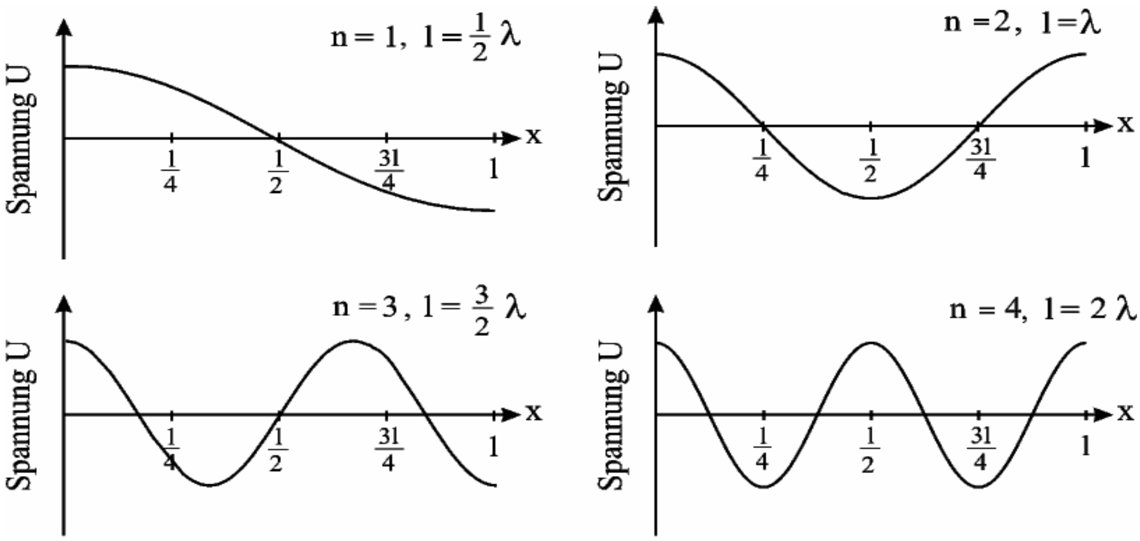

Bild 1: Stehende Wellen in einem longitudinal schwingenden Stab
(Enden nicht eingespannt).

An den freien Stabenden ergeben sich Schwingungsbäuche. Aus den Gleichungen (2) und (3) läßt sich die Resonanzperiodendauer T_n der Stabschwingung in Abhängigkeit der Ordnung n berechnen

$$T_n = \frac{\lambda}{c} = \frac{2\,l}{n\,c} = \frac{T_1}{n} \tag{4}$$

Aus den Meßwerten der Resonanzperiodendauern kann man mit Hilfe der Gleichung (1) und (4) den Elastizitätsmodul bestimmen:

$$T_n = \frac{2\,l}{n}\sqrt{\frac{\rho}{E}} \tag{5}$$

und daraus

$$E = \left(\frac{2\,l}{n\,T_n}\right)^2 \rho \tag{6}$$

Wird ρ durch die Masse m und das Volumen des Stabes ausgedrückt, so ergibt sich:

$$E = \frac{16\,ml}{\pi\,d^2\,(n\,T_n)^2} \tag{7}$$

Dabei ist d der Durchmesser des Stabes.

2.2 Der gedämpfte Oszillator

Das zeitliche Verhalten der Auslenkung der longitudinalen Stabschwingung u(t) läßt sich an einem festen Ort (z.B. an einem der Stabenden) durch die Differentialgleichung des harmonischen Oszillators

$$\ddot{u}(t) + \beta \cdot \dot{u}(t) + \omega_0^2 \cdot u(t) = F(t) \tag{8}$$

beschreiben. Dabei ist β die Dämpfungskonstante des Systems, F(t) die äußere Erregung und ω_0 die Resonanzfrequenz, die von der Schallgeschwindigkeit c und der Stablänge l abhängt,

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_n} = \frac{\pi n c}{l} \tag{9}$$

Die Differentialgleichung (8) läßt sich mit dem Ansatz

$$u(t) = U(\omega) \cdot e^{i \omega t}$$

lösen, wobei $U(\omega)$ komplex ist. $|U(\omega)|$ ist die Amplitude der Schwingung und $\arg\{U(\omega)\}$ ihre Phase. Weiterhin wird eine harmonische Erregung

$$F(t) = F\, e^{i \omega t}$$

mit reellem F angenommen. Durch Einsetzen von u (t) und F (t in (8) ergibt sich:

$$-\omega^2 U(\omega) + i \beta \omega U(\omega) + \omega_0^2 U(\omega) = F$$

bzw.:

$$U(\omega) = \frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2 + i \omega \beta} = \frac{F}{(\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0) + i \omega \beta} \tag{10}$$

In der Nähe der Resonanzfrequanz $(\omega \approx \omega_0)$ gilt

$$U(\omega) = \frac{F}{\omega_0 \left[2(\omega - \omega_0) + i \beta\right]} \tag{11}$$

und

$$|U(\omega)| = \frac{F}{\omega_0 \sqrt{4(\omega - \omega_0)^2 + \beta^2}}$$

Die Abhängigkeit der Amplitude der Stabschwingung $|U(\omega)|$ von ω ist in Bild 2 dargestellt.

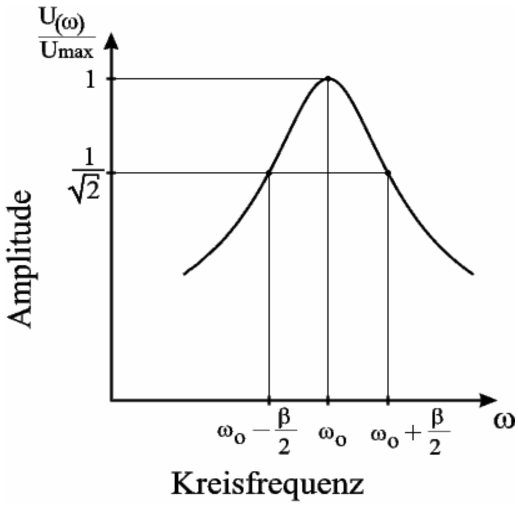

Bild 2: Amplitude des gedämpften Oszillators in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz.

An den Stellen

$$\omega_1 = \left(\omega_0 - \frac{\beta}{2}\right) \text{ und } \omega_2 = \left(\omega_0 + \frac{\beta}{2}\right)$$

ist die Amplitude auf das $\frac{1}{\sqrt{2}}$ - fache ihres Maximalwertes gesunken. Man nennt den Frequenzabstand

$$\omega_2 - \omega_1 = \beta \tag{12}$$

die *Bandbreite* des schwingungsfähigen Systems. Die Güte (oder Finesse) Q des Systems wird als

$$Q = \frac{\omega_0}{\beta} \tag{13}$$

definiert. Für den Fall geringer Dämpfung $\beta \ll \omega_0$ bzw. $Q \gg 1$ kann man Q von Gl. (13) auch unter Verwendung der Periodendauern ausdrücken

$$Q = \frac{T_n}{T_n^{(1)} - T_n^{(2)}} \tag{14}$$

Dabei sind

$$T_n^{(1)} = \frac{2\pi}{\omega_1} \quad \text{und} \quad T_n^{(2)} = \frac{2\pi}{\omega_2}$$

diejenigen Periodendauern, bei denen die Amplitude auf das $\frac{1}{\sqrt{2}}$-fache ihres Maximalwertes gesunken ist (siehe Bild 3).

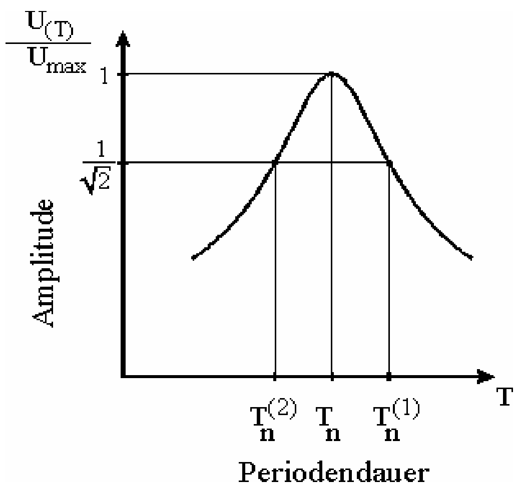

Bild 3: Amplitude des gedämpften Oszillators in Abhängigkeit von der Periodendauer.

In jedem elastischen Material wird bei periodischer Anregung ein Bruchteil der Schwingungsenergie in Wärme umgewandelt. Dadurch entsteht eine gedämpfte Schwingung, wobei entsprechend Gl.(12) die Bandbreite durch die Dämpfung verursacht wird. Bei gegebener Schwingungsamplitude ist die Schwingungsenergie proportional zu E, und die in Wärme umgewandelte Energie proportional zu E/Q, wobei die Güte Q entsprechend Gl.(13) mit der Bandbreite zusammenhängt. In strömenden Flüssigkeiten wird die Reibungsenergie durch die dynamische Viskosität η bedingt. In Analogie zu Flüssigkeiten definiert man auch in Festkörpern eine Viskosität

$$\eta = \frac{E}{Q \cdot \omega_0} \tag{15}$$

(Einheit Pa·s) und daraus

$$\eta = \frac{E\left(T_n^{(1)} - T_n^{(2)}\right)}{2\pi}$$

Dabei ist E der in Aufgabe 1.1 bestimmte Elastizitätsmodul. Beachten Sie, daß bei statischer Belastung sich die Zähigkeit *nicht* bemerkbar macht!

2.3 Dicke Stäbe

Die Resonanzperiode T'_n des dicken Stabes vom Durchmesser d verlängert sich gegenüber der des dünnen Stabes T_n um den Faktor

$$\frac{T'_n}{T_n} = 1 + \left(\frac{\mu\,\pi\,n\,d}{4\,l}\right)^2 \tag{16}$$

wobei μ die Poissonzahl des Stabmaterials ist (vgl. Lit.). Aus der Messung der Resonanzperioden des dicken Stabes in verschiedenen Ordnungen lassen sich der Elastizitätsmodul und die Poissonzahl μ bestimmen.

Setzt man (4) in (16) ein, so ergibt sich

$$n\,T_n' = n\,T_n + n\,T_n \left(\frac{\mu\,\pi\,d}{4\,l}\right)^2 n^2$$

$$n\,T_n' = T_1 + T_1 \left(\frac{\mu\,\pi\,d}{4\,l}\right)^2 n^2 \qquad (17)$$

Es besteht also ein linearer Zusammenhang zwischen $n\,T_n'$ und n^2. In der grafischen Darstellung von $n\,T_n'$ über n^2 ergibt sich daher eine Gerade mit dem Ordinatenabschnitt T_1 und dem Anstieg

$$B = T_1 \left(\frac{\mu\,\pi\,d}{4\,l}\right)^2 \qquad (18)$$

Beide Größen können aus der grafischen Darstellung bzw. durch Ausgleichsrechnung ermittelt werden. Aus T_1 und B lassen sich unter Verwendung der Gleichungen (7) und (18) der Elastizitätsmodul E und die Poissonzahl μ bestimmen.

$$E = \frac{16\,m\,l}{\pi\,d^2\,T_1^2} \qquad (19)$$

$$\mu = \frac{4 \cdot l}{\pi \cdot d} \cdot \sqrt{\frac{B}{T_1}} \qquad (20)$$

Die Kenntnis von zwei der vier die elastischen Eigenschaften eines Materials bestimmenden Konstanten (E, μ, Torsionsmodul G, Kompressionsmodul K) genügt, um die anderen Konstanten zu bestimmen. Es gilt nämlich:

$$G = \frac{E}{2\,(\mu + 1)} \qquad (21)$$

und

$$K = \frac{E}{3\,(1 - 2\,\mu)} \qquad (22)$$

3. Versuchsdurchführung

Der experimentelle Aufbau ist in Bild 4 dargestellt:

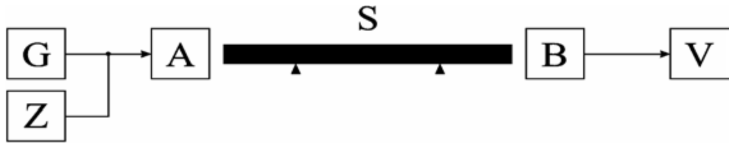

Bild 4: Experimenteller Aufbau G : RC – Generator; Z: Zeit- und Frequenzmesser; S: Stab; A, B: Kopfhörer; V: Röhrenvoltmeter

Der RC-Generator erzeugt eine sinusförmige Ausgangsspannung, deren Periodendauer mit dem Zeit- und Frequenzmesser gemessen wird. Die Kopfhörermembran des Kopfhörers A erregt im Stab longitudinale Schwingungen. Die im Kopfhörer B induzierte Spannung ist proportional der Schwingungsamplitude des Stabes und wird mit dem Röhrenvoltmeter V gemessen.
Zu Beginn des Versuches werden alle Geräte eingeschaltet, um sie warmlaufen zu lassen. Der zu untersuchende Stab wird so auf die Halterung aufgelegt, daß die Auflagepunkte um je 1/4 der Stablänge von den Stabenden entfernt sind (Besselsche Punkte). Damit wird erreicht, daß sich die Durchbiegung auf ein Minimum reduziert (Warum?). Für die Untersuchung nichtmagnetischer Materialien (Aufgabe 1.1) werden die Membranen mit Stößel in die Kopfhörer eingesetzt. Die Kopfhörer werden so justiert, daß die Stößel die Mitten der Stirnflächen des Stabes gerade berühren. Für die Untersuchung magnetischer Materialien (Aufgabe 1.2) werden Kunststoffmembranen verwendet.
Das Suchen nach den Resonanzperioden der Stäbe geschieht in der folgenden Weise: Am RC-Generator wird eine hohe Ausgangsspannung (1...2V) eingestellt, am Röhrenvoltmeter der empfindlichste Meßbereich. Am Meßplatz liegen Hinweise über die Frequenzbereiche aus, in denen die Resonanzperioden 1.Ordnung der einzelnen Stäbe zu erwarten sind. Die Frequenz des RC-Generators wird langsam in dem angegebenen Bereich durchgestimmt. Im Resonanzbereich muß die Erregerspannung des Generators bzw. die Empfindlichkeit des Röhrenvoltmeters (Meßbereich) herabgesetzt werden (am RC-Generator befindet sich ein Knopf zur Feineinstellung der Frequenz)! Nehmen Sie für Aufgabe 1.1 vom Maximum ausgehend nach beiden Seiten 5 Meßpunkte bis herab zu etwa 30% der Maximalspannung auf.
Nutzen Sie zur Suche der Resonanzen höherer Ordnungen (Aufgabe 1.2) aus, daß

$$T_n' > \frac{T_1'}{n} \qquad \text{für } n \geq 2$$

ist (siehe Gleichung 16).
Die Werte für Durchmesser d, Masse m und Länge l der Stäbe sowie weitere Hinweise finden Sie am Meßplatz .

Literatur

Geiger-Scheel: Handbuch der Physik Bd. VI, Mechanik I der elastischen Körper, Springer-Verlag, S. 356 ff.