Versuch 121

Akustische Hohlraumschwingungen

Versuchsziel:

Es soll gezeigt werden, daß Hohlraumresonatoren akustische Resonatoren mit einer nur von ihrer Geometrie abhängigen Eigenfrequenz sind. Auf Grund der hohen Resonatorgüte genügt der normale Geräuschpegel der Umgebung zur Anregung einer nur wenig gedämpften harmonischen Schwingung, die im Inneren des Resonators mit einem Sondenmikrofon nachgewiesen werden kann. Das zeitabhängige Mikrofonspannungssignal wird einer schnellen Fourieranalyse unterzogen, die das Schallfrequenzspektrum des Hohlraumresonators liefert.

1. Aufgaben

1.1 Geben Sie am Computer mit dem Formeleditor verschiedene periodische Funktionen ein und lassen Sie deren Frequenzspektrum berechnen. Prüfen Sie, wie das angezeigte Fourierspektrum mit der Grösse der Fourieramplituden zusammenhängt.

1.2 Registrieren Sie die Hohlraumschwingungen in einem leeren Rundkolbenglas und bestimmen Sie das Fourierspektrum bei unterschiedlichen Abtastfrequenzen. Stellen Sie die Ergebnisse grafisch dar und diskutieren Sie die Erfüllung des Sampling-Theorems.

1.3 Verändern Sie die akustische Dämpfung im Hals des Rundkolbenglases und beobachten Sie die dadurch hervorgerufenen Veränderungen im Frequenzspektrum. Schätzen Sie die Resonatorgüte des Rundkolbens für den ungedämpften sowie den unterschiedlich gedämpften Resonator ab und diskutieren Sie qualitativ Ihre Meßergebnisse.

1.4 Messen Sie die Hohlraumresonanzfrequenz für unterschiedliche Hohlraumvolumina. Stellen Sie die Ergebnisse grafisch dar und vergleichen Sie diese mit der abgeleiteten Formel für die Resonanzfrequenz. Welche Näherungsformel halten Sie für zulässig?

2. Grundlagen

<u>Stichworte:</u>
Schallwellen, Schallmessung, Kondensatormikrofon, Helmholtzresonator, Resonanzfrequenz, Resonatorgüte, Frequenzspektrum, Fourieranalyse, Sampling-Theorem, Aliasing, akustisches Rauschen

2.1 etwas Akustik

Schallwellen in Luft sind sich ausbreitende hochfrequente Longitudinalschwingungen der Gaspartikel. Für die Schallgeschwindigkeit c gilt hierbei:

$$c_{schall} = \sqrt{\frac{1}{\gamma\rho_0}} \tag{1}$$

wobei γ die Kompressibilität und ρ_0 die mittlere Gasdichte sind. Wegen $\gamma = -\frac{1}{V}\cdot\frac{dV}{dp}$ folgt für adiabatische Prozesse mit $\kappa = C_p/C_v$ als dem Adiabatenexponenten

$$\gamma = \frac{1}{\kappa p_0} \tag{2}$$

Jetzt betrachten wir ein Gaspartikel, das in der Schallwelle mitschwingt. Seine oszillatorische Bewegung werde im eindimensionalen Fall durch eine Schwingung der Gestalt

$$x(t) = x_0 \cdot \sin 2\pi\left(f\,t - \frac{X}{\Lambda}\right) \tag{3}$$

beschrieben. Seine momentane Geschwindigkeit beträgt infolgedessen

$$\dot{x}(t) = 2\,\pi\,f\,x_0 \cdot \cos 2\pi\left(f\,t - \frac{X}{\Lambda}\right) \tag{4}$$

Der Ausdruck $2\pi \cdot x_0 \cdot f = \mu_0$ wird als **Schallschnelle** bezeichnet. Er ist proportional zum Schalldruck (genauer: Schallwechseldruckamplitude)

$$p = c\,\rho_0\,\mu_0 \tag{5}$$

Das Verhältnis von Schalldruck zu Schallschnelle ist die **akustische Impedanz** des Schallausbreitungsmediums

$$Z_{akust} = \frac{p}{\mu_0} = c_{Schall} \cdot \rho_0 \tag{6}$$

Schallreflexionen werden durch einen akustischen Reflexionskoeffizienten R_{akust} beschrieben:

$$R_{akust} = \frac{\left[Z_{akust,1} - Z_{akust,2}\right]^2}{\left[Z_{akust,1} + Z_{akust,2}\right]^2} \tag{7}$$

2.2 Hohlraumschwingungen

Wenn man eine leere Bierflasche anbläst, so entsteht ein ziemlich tiefer Ton, dessen Frequenz (bzw. Wellenlänge) offensichtlich nicht durch die Lineardimensionen des Resonanzkörpers bestimmt wird.

Beispiel: $l_{\text{Bierflasche}} = 0.25\ \text{m}$

Gehört : $f_{\text{Ton}} = 300\ \text{Hz}$ aber : $\frac{\Lambda \cdot c_{\text{Schall}}}{f} = 1\text{m}$

Beliebig geformte, gasgefüllte Hohlräume lassen sich zu Resonanzschwingungen erregen. Diese Tatsache wurde bereits von *Helmholtz* zur Klanganalyse ausgenutzt, weshalb man solche Resonatoren gewöhnlich als Helmholtz-Resonatoren bezeichnet. Die Schwingung erfolgt analog der Schwingung einer Masse m, die an einer Feder mit der Federkonstanten k befestigt ist. Für die Eigenfrequenz dieses Systems gilt:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{8}$$

Bei dem Resonator (Bild 1) wirkt das kompressible Gasvolumen V_H des Hohlraumes wie eine Feder, während die Gasmasse $\rho \cdot A \cdot l$ des Resonatorhalses von der Länge l und der Querschnittsfläche A die schwingende Masse bildet. Für die Eigenfrequenz des Resonators erwarten wir einen ähnlichen Ausdruck wie in Gl. 8; doch muß noch eine Konstante eingehen, die das im Hohlraum enthaltene Gas charakterisiert. Wir berechnen zunächst die Federkonstante des Gasvolumens V, die in diesem Fall als Steife S bezeichnet wird.

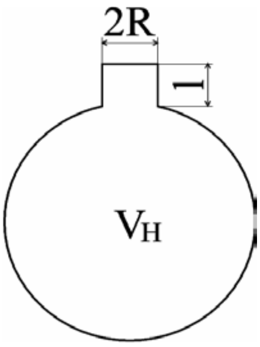

Bild 1: Rundkolben als akustischer Hohlraumresonator

Unter der Annahme, daß die Druckänderungen so schnell erfolgen, daß kein Wärmeaustausch mit der Umgebung stattfinden kann, gilt für die adiabatische Kompressibilität γ eines Gases nach den Ausführungen in der Mechanik der Flüssigkeiten und Gase:

$$\gamma = -\frac{1}{V_H} \cdot \frac{dV}{dp} = \frac{1}{\kappa \cdot p_0} \tag{9}$$

(Der Ruhedruck p wurde zur Unterscheidung vom Schalldruck als p_0 dargestellt)

Die Druckänderung Δp entsteht durch eine Kraft ΔF, die auf die Fläche A wirkt:

$$\Delta\, p = \frac{\Delta\, F}{A} \tag{10}$$

Für die Volumenänderung ΔV bei Verschiebung der Gasmasse im Resonatorhals um die Strecke Δl gilt, da sich V und l gegensinnig verhalten:

$$\Delta V = - A \cdot \Delta l \tag{11}$$

Durch Einsetzen dieser Ausdrücke in Gl. 9 erhält man nach Umformung:

$$\frac{\Delta F}{\Delta l} = \frac{p_0\, \kappa \cdot A^2}{V_H} \tag{12}$$

Der Ausdruck $\Delta F/\Delta l$, d.h. die Kraft, die zur Verschiebung um die Strecke Δl nötig ist, stellt die gesuchte Steife S dar. Die Masse des Gasvolumens im Resonatorhals beträgt $A \cdot l \cdot \rho_0$, wobei ρ_0 die Gasdichte bedeutet. Mit Kenntnis der Ausdrücke für die Masse und Feder-konstante ergibt sich somit:

$$\omega = \sqrt{\frac{A \cdot p_0\, \kappa}{V_H \cdot l \cdot \rho}} \tag{13}$$

Beachten wir nun noch, daß der Ausdruck $p_0\, \kappa / \rho_0$ gerade das Quadrat der Schallgeschwindigkeit c darstellt, und addieren wir zur Länge l die Mündungskorrektur $\frac{\pi\, R}{4}$ auf beiden Seiten des Resonatorhalses, so erhalten wir für die Eigenfrequenz des Resonators schließlich:

$$f = \frac{1}{2\,\pi}\, c \cdot \sqrt{\frac{A}{V_H \cdot \left(l + \frac{\pi\, R}{2} \right)}} \tag{14}$$

Diese Gleichung gilt, wie das Experiment zeigt, auch für $l = 0$, d.h. für einen Hohlraum, der anstelle des Resonatorhalses nur eine einfache Öffnung besitzt. Es existiert also nur eine **einzige Resonanzfrequenz**, solange die größte Abmessung des Hohlraumes klein gegen die Wellenlänge ist. *Helmholtz* führte mit Hilfe dieser Eigenschaft des Hohlraumes die erste Klanganalyse durch und gelangte damit zu erstaunlich genauen Ergebnissen.

2.3 Schallmessung

Die Energiedichte des Schallfeldes kann aus der gemittelten mechanischen Energie der harmonisch schwingenden Gaspartikel abgeleitet werden und beträgt $\frac{p^2}{2c^2_{Schall}\ \rho_0}$.

Daraus ergibt sich die **Schallbestrahlungsstärke B** zu

$$B = \frac{p^2}{2\, c_{Schall}\, \rho_0} \tag{15}$$

Die Schallbestrahlungsstärke ist also proportional dem Quadrat des Schalldrucks. Dieser ist einer Schallmessung unmittelbar zugänglich.

Hochempfindliche technische Detektoren für den Schalldruck sind die **Kondensator-mikrofone**, in denen die akustisch angeregten Schwingungen einer sehr dünnen Membran die Kapazität eines Meßkondensators modulieren. Mittels eines rauscharmen elektronischen Verstärkers mit nachfolgendem Impedanzwandler werden diese Kapazitätsänderungen in Wechselspannungssignale umgesetzt.

Auch das **Ohr** ist ein exzellenter Schalldetektor für den Frequenzbereich von 20 Hz bis etwa 20 kHz, wobei seine Empfindlichkeit allerdings stark frequenzabhängig ist. Während im Empfindlichkeitsmaximum von 4 kHz die gerade noch wahrnehmbare Schallleistungsdichte (Hörschwelle) bei etwa $2 \cdot 10^{-12}\, W/m^2$ liegt, ist das Ohr bei 100 Hz um fast 4 Größenordnungen unempfindlicher. Im Empfindlichkeitsmaximum wird vom Ohr eine Druckamplitude von nur 20 µPa wahrgenommen, bei der das Trommelfell mit einer Amplitude von etwa 10^{-11} m schwingt. Das ist etwa der 20fache Wert des durch die statistische Wärmebewegung der Gasmoleküle verursachten Brownschen Rauschens des Trommelfells und ist sogar 1 Größenordnung kleiner als ein Atomdurchmesser! In der technischen Literatur gibt man die Schallbestrahlungstärke oder den Schalldruck oft nicht absolut an sondern vergleicht diese Werte mit Bezugsgrößen B_0 bzw. p_0. So erhält man die in **Dezibel** (dB) anzugebenden Größen

relative Schalleistungsdichte	B_{rel} [dB] = 10log (B/B_0) = 20log (p/p_0)
relativer Schalldruck	p_{rel} [dB] = 10log (p/p_0)

2.4 Fourieranalyse

In Verallgemeinerung der bekannten Tatsache, daß sich eine periodische Funktion als Summe von Kosinus- und Sinusfunktionen aufschreiben läßt, kann jede beliebige physikalisch sinnvolle Funktion A(t) als Überlagerung von unendlich vielen Kosinus- und Sinusfunktionen dargestellt werden. Dieser Sachverhalt wird als **Fourieranalyse** bezeichnet.

$$A(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(f)\, e^{-i\cdot(2\pi t f)} df \tag{16}$$

$$A(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(t)\, e^{i\cdot(2\pi t f)} dt \tag{17}$$

Da A(f) eine komplexe Funktion der Frequenz ist, gibt man oft die Größe $|A(f)|^2$, das Leistungspektrum von A(t) [genauer: die spektrale Leistungsdichteverteilung] an, um den Frequenzinhalt von A(t) zu charaktersieren.

Im Experiment wird der zeitabhängige Signalspannungsverlauf A(t) in einem festgelegten Zeitintervall T zu n äquidistanten Zeitpunkten mit der Abtastfrequenz

f_T = n/T abgefragt. Die Abtastfrequenz f_T muß so gewählt werden, daß sie das **Sampling- Theorem** erfüllt:

$$f_T \geq 2 \cdot f_{mess} \tag{18}$$

Bei Verletzung dieser Bedingung werden wegen des **Aliasing-Effekts** (Bild 2) falsche Frequenzspektren berechnet.

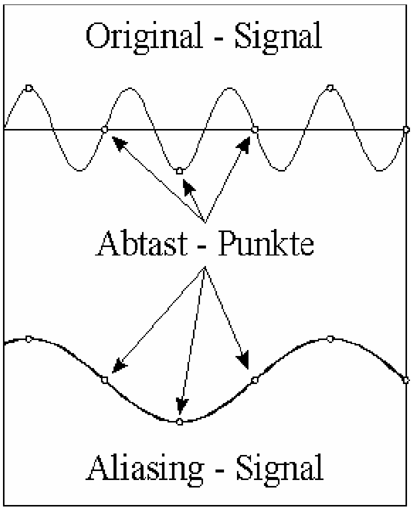

Bild 2: Die Abbildung zeigt, daß beim Abtasten einer 300 Hz-Schwingung mit 400 Hz bei der Rekonstruktion eine 100 Hz-Schwingung entsteht

3. Versuchsdurchführung

3.1 Das Blockschaltbild des Versuchsaufbaus ist in Bild 3 dargestellt. Das Meßmikrofon ist über die zugehörige Anschlußleitung mit dem Eingang des Meßverstärkers und der Verstärkerausgang ist mit dem Eingang CH1 des Analogmeßeinschubs zu verbinden. Der Rundkolben (oder andere zu untersuchende akustische Hohlraumresonatoren) und das Meßmikrofon sind mit Stativmaterial geeignet zu befestigen. Das Sondenende des Mikrofons soll sich im oberen Drittel des kugelförmigen Teils des Kolbens befinden.

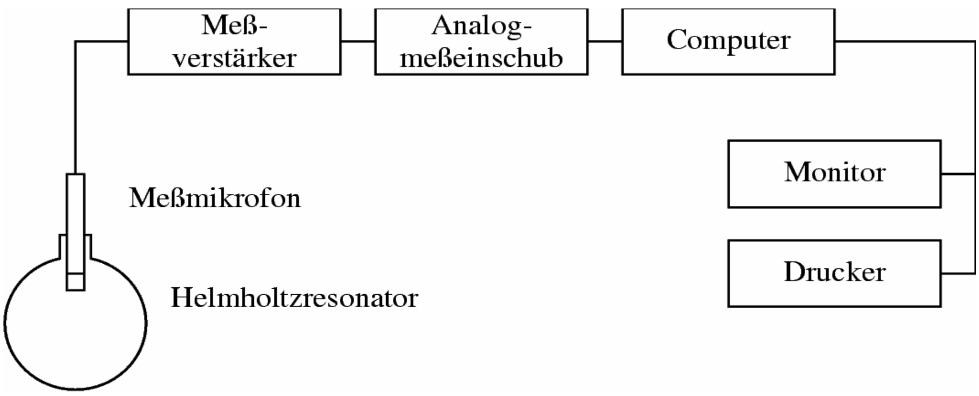

Bild 3: Versuchsaufbau

Nach Einschalten der Batteriespannung am Mikrofon bleibt dieses etwa 45min betriebsbereit. Danach erfolgt eine automatische Abschaltung. Ein erneutes Einschalten der Batterie ist nötig!

3.2 Das Meßprogramm wird automatisch beim Einschalten des Computers gestartet. Hinweise zu den günstigsten Parametereinstellungen liegen am Versuchsplatz aus. Mit dem [Formeleditor] aus dem Befehlsmenü [Auswertung] können Zeitfunktionen mathematisch modelliert und mit dem Befehl [Zeitsignal auswählen] grafisch dargestellt werden. Anschließend läßt sich das zugehörige Frequenzspektrum berechnen. Vergleichen Sie für einige wenige überschaubare Situationen den jeweiligen Zeitverlauf mit dem dazugehörigen Frequenzspektrum!

3.3 Für die Aufnahme von Mikrofonmessungen dient das Befehlsmenü [Messen], an das sich aus dem Menü [Auswertung] die Befehle [Zeitbereich auswählen] und [Synthetisieren] anschließen. Mit dem Kursor können Sie das Frequenzspektrum abfahren und Punkte anwählen, deren Frequenz und Amplitude dann mit den Befehl [Z] angezeigt werden. Da der Zeitverlauf des Mikrofonsignals an 2048 Punkten abgetastet wird, ist die zulässige Abtastfrequenz f_T durch die Bedingungen.

$$\frac{f_T}{2} \geq f_M > \frac{f_T}{2048} \tag{19}$$

bezüglich der Meßfrequenzen f_M eingeschränkt.

3.4 Eine Vergrößerung der Dämpfung des Resonators erreichen Sie beispielsweise durch Auskleiden des Gefäßhalses mit einem möglichst rauhen Material (Sandpapier, Krepppapier, ...) oder durch leichtes Abdecken mit Watte.

3.5 Die Verringerung des Hohlraumvolumens V_H erreichen Sie beispielsweise durch kontrolliertes Einfüllen von Wasser in den Rundkolben (Achtung: dabei ist das Mikrofon zu entfernen!). Die Meßergebnisse sollten zweckmäßigerweise im doppeltlogarithmischen Maßstab dargestellt werden, um die funktionale Abhängigkeit $f_{res}(V_H)$ leicht erkennen zu können.

Weiterführende Literatur:

Trendelenburg, „Akustik“, Springer 1950
H. Borucki, „Einführung in die Akustik“, Mannheim 1989