

Versuch 120

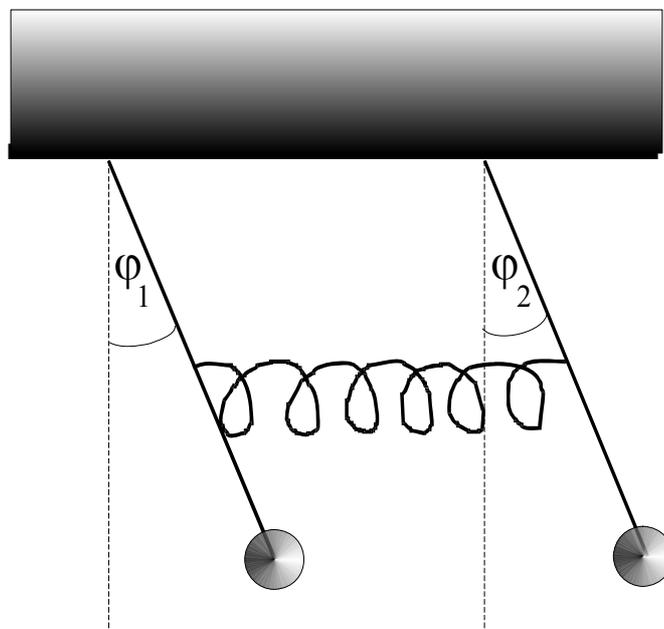
Gekoppelte Pendel

1. Aufgaben

- 1.1 Messen Sie die Schwingungsdauer zweier gekoppelter Pendel bei gleichsinniger und gegensinniger Schwingung.
- 1.2 Messen Sie die Schwebungs- und Schwingungsdauer bei Schwebungsschwingungen .
- 1.3 Wiederholen Sie Ihre Messungen jeweils bei veränderter Kopplung und berechnen Sie die Kopplungsgrade.
- 1.4 Vergleichen Sie die Ergebnisse von 1.1 und 1.2 mit den theoretischen Erwartungen (Gültigkeit von Gl. 6 und 8).

2. Grundlagen

Unter einem gekoppelten Pendel versteht man zwei gleiche physikalische Pendel, die miteinander z.B. durch eine weiche Schraubenfeder so verbunden sind, daß beim Schwingen des einen Pendels auf das andere infolge der sich ändernden Dehnung der Kopplungsfeder eine periodisch wechselnde Kraft ausgeübt wird, die es zu Schwingungen anregt.



Es soll angenommen werden, daß die Pendel nicht durch Reibung gebremst werden. Falls beide Pendel gleich sind, haben sie auch die gleiche Eigenfrequenz ω_1 :

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \sqrt{\frac{D}{I}} \quad (1)$$

(D Direktionsmoment des Pendels, I Trägheitsmoment des Pendels)

Wenn man beide Pendel gleich weit und in gleicher Richtung auslenkt, wird die Feder nicht gedehnt, es wirkt also auch keine Kopplungsfederkraft. Bei dieser gleichsinnigen *Fundamentalschwingung* gilt für beide Pendel die Bewegungsgleichung

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_0 \cos \omega_1 t \quad (2)$$

Die andere *Fundamentalschwingung* des gekoppelten Pendels entsteht, wenn man beide Pendel um die gleiche Amplitude, aber in entgegengesetzter Richtung auslenkt. Es gelten die Bewegungsgleichungen

$$\varphi_1 = -\varphi_2 = \varphi_0 \cos \omega_2 t \quad (3)$$

Wegen der periodisch wirkenden Kopplungsfederkraft wird die Frequenz allerdings auf

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2} = \sqrt{\frac{D + 2\Theta}{I}} = \omega_1 \sqrt{1 + \frac{2\Theta}{D}} \quad (4)$$

erhöht, wobei Θ das Direktionsmoment der Kopplungsfeder ist. Wenn man von diesen beiden Grenzfällen zum allgemeinen Fall übergeht, so treten Schwebungsschwingungen auf. Dabei wird die Energie von einem Pendel auf das andere übertragen, so daß die Amplitude abwechselnd abnimmt und wieder anwächst. Wenn man annimmt, daß die Kopplung nur schwach ist ($\Theta \ll D$), kann die Bewegung durch eine periodische Amplitudenänderung (Schwebung mit Frequenz ω_S)

$$A_1 = \varphi_0 \cdot \sin \omega_S t \quad \text{bzw.} \quad A_2 = \varphi_0 \cdot \cos \omega_S t \quad (5)$$

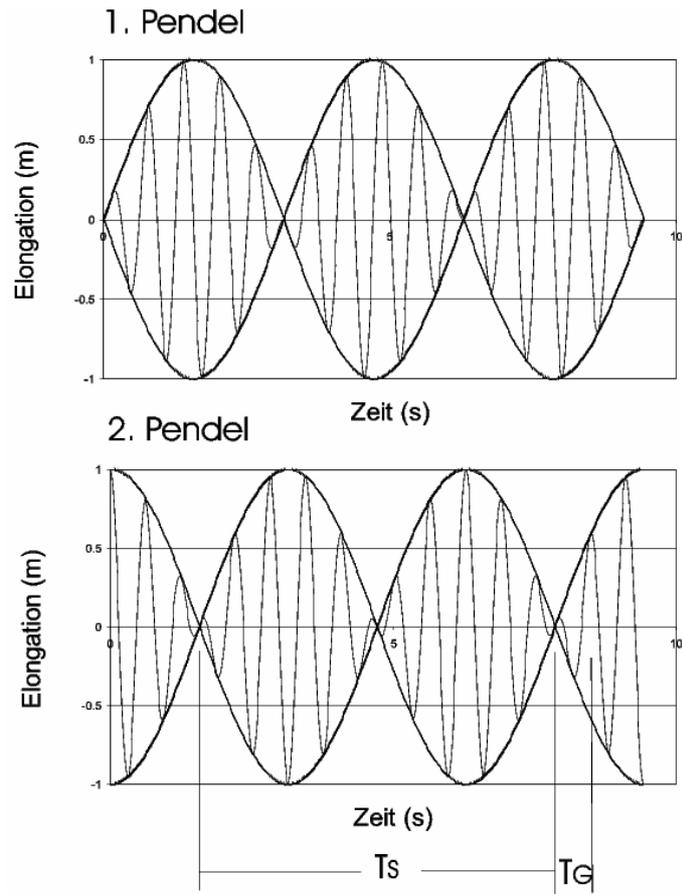
$$\text{mit} \quad \omega_S = \frac{1}{2} (\omega_2 - \omega_1) \quad (6)$$

und durch gleichartige Schwingungen der Einzelpendel (Frequenz der Grundschiwingung ω_G)

$$\varphi_1 = A_1 \cdot \sin \omega_G t \quad \text{bzw.} \quad \varphi_2 = A_2 \cdot \cos \omega_G t \quad (7)$$

$$\text{mit} \quad \omega_G = \frac{1}{2} (\omega_2 + \omega_1) \quad (8)$$

beschrieben werden.



Es ergibt sich für die Schwingungsdauer T_G aus Gl. 8

$$\frac{1}{T_G} = \frac{\omega_G}{2\pi} = \frac{1}{4\pi} (\omega_1 + \omega_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) \quad (9)$$

und analog aus Gl. 6 für die Schwebungsperiode T_S (T_S = doppelter (!) Abstand von zwei Nulldurchgängen der Amplitude)

$$\frac{1}{T_S} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) \quad (10)$$

Als Maß der Kopplung definiert man den Kopplungsgrad

$$K = \frac{\Theta}{D + \Theta} \quad (11)$$

Dieser kann durch Messung von T_1 und T_2 bestimmt werden. Nach Einsetzen von (1) und (4) in (11) erhält man:

$$K = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2} = \frac{T_1^2 - T_2^2}{T_1^2 + T_2^2} \quad (12)$$

3. Versuchsdurchführung

Machen Sie sich mit den Schwingungsmöglichkeiten der Pendel am Versuchsaufbau vertraut. Als Erstes sollte nachgeprüft werden, ob beide Pendel dieselbe Schwingungsdauer besitzen. Beachten Sie bei allen Messungen, daß zur Erzielung brauchbarer Ergebnisse die Auslenkung nicht zu groß gewählt werden darf (ca. 5 Skt.). Bei Aufgabe 1.1 sollte jede Messung über mind. 10 Schwingungsperioden erfolgen und ggf. mehrfach wiederholt werden. Bei 1.2 können wegen der abklingenden Amplitude nur wenige Perioden ausgemessen werden. Hier ist zur Erhöhung der Genauigkeit das mehrmalige Wiederholen der gesamten Meßreihe unbedingt notwendig. Der absolute Fehler ΔT für alle T-Werte (T_1 , T_2 , T_S , T_G) sollte unmittelbar im Anschluß an jede Meßreihe abgeschätzt und notiert werden.

Zur Veränderung der Kopplung wird die Befestigung der Feder verschoben. Die günstigsten Kopplungsgrade sind in einem Probeversuch zu ermitteln.

Zur Auswertung ist es sinnvoll, die jeweiligen Werte der Schwingungsdauer in Frequenzen umzurechnen und dann die gemessenen Frequenzen für Schwebung und Grundschiwingung (ω_S , ω_G) mit den berechneten Werten $\frac{1}{2} (\omega_2 - \omega_1)$ bzw. $\frac{1}{2} (\omega_1 + \omega_2)$ jeweils unter Beachtung ihrer Fehlergrenzen zu vergleichen, was z.B. in Form einer Grafik erfolgen kann.