Versuch 112

Reversionspendel

1. Aufgaben

1.1 Die Schwingungsdauer eines Reversionspendels ist in Abhängigkeit von der Stellung des Laufgewichtes für beide Achsen zu messen und graphisch darzustellen.

1.2 Die Schwerebeschleunigung g ist zu bestimmen. Die relative Messunsicherheit für die Bestimmung von g soll nicht größer als $3 \cdot 10^{-4}$ sein.

1.3 Die Abhängigkeit der Schwingungsdauer T vom Auslenkwinkel φ_o ist zu bestimmen.

2. Grundlagen

Stichworte:
mathematisches Pendel, physikalisches Pendel, Schwingungsgleichung, Schwingungsdauer, Auftrieb, geografische Abhängigkeit der Schwerebeschleunigung

2.1. Mathematisches und physikalisches Pendel

Das „mathematische Pendel" ist die Idealisierung eines experimentellen Aufbaus und läßt sich nur näherungsweise, z.B. durch ein Fadenpendel (Kugel mit Masse m an einem dünnen Faden der Länge l), realisieren. Seine Bewegungsgleichung lautet:

$$m \cdot l \cdot \ddot{\varphi} = -m \cdot g \cdot \sin\varphi \quad \text{bzw.} \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \cdot \sin\varphi = 0 \tag{1}$$

Für kleine Auslenkungen ($\sin\varphi \approx \varphi$, φ im Bogenmaß) erhält man als Lösung

$$\varphi = \varphi_0 \cdot \cos\omega t \quad \text{mit} \quad \omega^2 = \frac{g}{l} \tag{2}$$

Wegen $\omega = 2\pi / T$ ergibt sich für die Schwingungsdauer:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \tag{3}$$

Bei einem physikalischen Pendel treten an die Stelle von g und l die Größen D_A und I_A. Dabei ist $D_A = m \cdot s_A \cdot g$ das Direktionsmoment bzgl. einer Drehachse A (m ... Gesamtmasse des Pendels, s_A ... Abstand des Massenmittelpunktes von der Drehachse) und I_A ist das Massenträgheitsmoment bezüglich der Achse A.
Ein physikalisches Pendel besitzt die gleiche Schwingungsdauer wie ein mathematisches Pendel der Fadenlänge

$$l_A = \frac{I_A}{m \cdot s_A} \tag{4}$$

l_A ist die der Achse A entsprechende „reduzierte Pendellänge“.

2.2 Reversionspendel

Das Reversionspendel besteht aus einem Metallstab, der um zwei parallele Achsen A und B schwingen kann. Die Achsen haben den vorgegebenen Abstand L. Zwischen den Achsen befindet sich ein kleines Laufgewicht der Masse m. Durch Verschieben von m läßt sich die Schwingungsdauer T des Pendels variieren. In der Nähe des Stabendes ist ein Zusatzkörper der Masse M angebracht. Bei einer bestimmten Stellung x des Laufgewichtes sind die Schwingungsdauern um die Achsen A und B einander gleich.

$$T_A = T_B = T \tag{5}$$

Dann ist der Achsenabstand L gleich der reduzierten Pendellänge, und aus der Gleichung für die Schwingungsdauer des mathematischen Pendels erhält man für die Schwerebeschleunigung

$$g = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot L \tag{6}$$

Der Vorteil des Reversionspendels besteht darin, daß zur Messung von g weder das Trägheitsmoment noch der Abstand Achse-Schwerpunkt sondern nur der leicht zu messende Abstand L bekannt sein muß.
Für genaue Messungen sind allerdings systematische Messabweichungen infolge des Auftriebs und der endlichen Schwingungsamplitude φ_0 (Einheit rad) zu berücksichtigen. Man erhält dann die korrigierte Gleichung (vgl. /1/)

$$g = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot L \cdot \left\{1 + \frac{1}{8}\varphi_0^2 + \frac{\rho_L}{\rho}\right\} \tag{7}$$

ρ_L ... Dichte der Luft, ρ ... Dichte des Pendels ($\rho = 10{,}03 \pm 0{,}04$ g / cm^3)

3. Versuchsdurchführung

3.1 Überlegen Sie sich vor dem Versuch, in welchem Bereich die Abweichungen der Messgrößen (T, L, ρ, φ_0) liegen dürfen, damit die relative Messunsicherheit von g den geforderten Höchstwert von $3 \cdot 10^{-4}$ nicht überschreitet!

3.2 Die Messung der Schwingungsdauer erfolgt mit einem Quarz-Frequenz- und Periodenmessgerät, welches durch das Pendel über eine Lichtschranke gesteuert wird. Zur Erhöhung der Messgenauigkeit wird über mehrere Perioden gemittelt. Bestimmen Sie die Schwingungsdauern T_A (x) und T_B (x) in Abhängigkeit von der Stellung x des Laufgewichtes. Dabei ist zunächst eine Änderung von x in Schritten von 5 cm und die Zeitmessung über 5 Perioden (10 Impulse!) ausreichend. $T_A(x)$ und $T_B(x)$ sind graphisch darzustellen, und daraus ist die ungefähre Lage der Schnittpunkte beider Kurven zu ermitteln. Im Bereich der Schnittpunkte sind $T_A(x)$ und $T_B(x)$ in Schritten von $\Delta x \leq 5$ mm über jeweils 10 Perioden (20 Impulse!) zu messen und in einem vergrößerten Diagramm aufzutragen. Im angegebenen Bereich können die beiden Funktionen durch Geraden angenähert werden. Ihr Schnittpunkt liefert T.
Die Messung der Länge L erfolgt durch Vergleich mit einem Invarstab (kleiner Ausdehnungskoeffizient!) bekannter Länge L_0. Die Differenz zwischen L und L_0 wird mit einem Messschieber bestimmt.

3.3 Bei fester Stellung des Laufgewichtes ist für 5 verschiedene Auslenkwinkel φ_0 (Einheit rad; $\varphi_0 \approx$ Auslenkung/Abstand Drehachse-Lichtschranke) die Schwingungsdauer T zu messen und über φ_0^2 aufzutragen. Es gilt (vgl. /1/):

$$T = T(\varphi_0 = 0) \cdot \left(1 + \frac{1}{16}\,\varphi_0^{\,2}\right) \tag{8}$$

d.h. die Meßwerte sollten auf einer Geraden liegen.