# Versuch 106

# Torsionsmodul

## 1. Aufgaben

1.1 Messen Sie für zwei Metallstäbe den Torsionswinkel bei unterschiedlichen Drehmomenten. Stellen Sie den Zusammenhang grafisch dar, und bestimmen Sie daraus den Torsionsmodul G!

1.2 Bestimmen Sie für zwei weitere Metallstäbe den Torsionsmodul aus Torsionsschwingungen!

1.3 Schätzen Sie jeweils den Fehler für G ab. Vergleichen Sie die Ergebnisse untereinander sowie mit den gegebenen Tabellenwerten!

## 2. Grundlagen

Stichworte:
Hookesches Gesetz, Spannungs-Dehnungs-Diagramm, Massenträgheitsmoment, elastische und unelastische Verformung, Torsion, Torsionsmodul, Schwingungsgleichung.

2.1 Torsionsmodul und Hookesches Gesetz

Jeder feste Körper erfährt unter Krafteinwirkung (z.B. Dehnung, Stauchung, Verdrehung) eine Formveränderung. Wird ein Körper nur bis zur Elastizitätsgrenze des jeweiligen Materials belastet, so kommt es zu keiner bleibenden Verformung (elastisches Verhalten).
Bei Scher- oder Torsionsbelastung wird das elastische Verhalten durch den Schub- oder Torsionsmodul G beschrieben. Der Torsionsmodul eines Stoffes ist umso größer, je weniger dieser den formverändernden Kräften nachgibt. Greift an der Deckfläche A eines Würfels (Bild 1), dessen Bodenfläche festgehalten wird, eine Scher- oder Schubkraft $F_S$ parallel zur Deckfläche an, so ist der Scherungswinkel $\alpha$ proportional zur Schubspannung $\tau$ mit $\tau = F_s / A$, wobei der reziproke Wert des Torsionsmoduls G den Proportionalitätsfaktor darstellt. Es gilt:

$$\alpha = \frac{1}{G} \cdot \tau \quad \text{bzw.} \quad \frac{F_S}{A} = G \cdot \alpha \qquad (1)$$

Gleichung (1) repräsentiert also einen linearen Zusammenhang zwischen der an der Fläche A in horizontaler (bzw. tangentialer) Richtung angreifenden Kraft (Ursache) und der resultierenden geometrischen Verformung (Wirkung), ausgedrückt durch den Scherungswinkel $\alpha$. Gleichung (1) entspricht damit dem vom Vorgang der Dehnung eines Körpers her bekannten Hookeschen Gesetz.

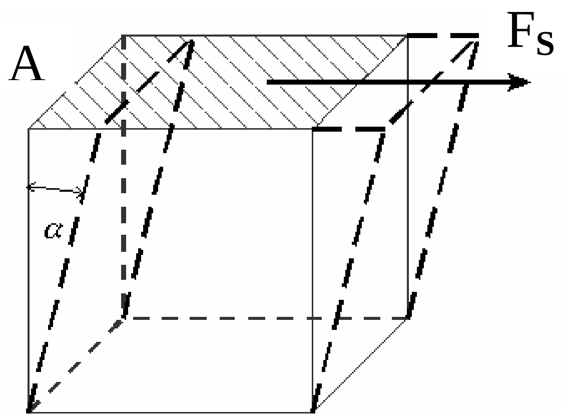


Bild 1: Prinzip der Scherung

Die Materialkonstante G hat für unterschiedliche Stoffe unterschiedliche Werte, (nach Ilberg, Physikalisches Praktikum) z.B.:

| | | |
|---|---|---|
| Aluminium | $2{,}4 \cdot 10^{10}$ | $N/m^2$ |
| Kupfer | $3{,}8 \ldots 4{,}7 \cdot 10^{10}$ | $N/m^2$ |
| Messing | $2{,}6 \ldots 4{,}1 \cdot 10^{10}$ | $N/m^2$ |
| Werkzeugstahl | $7{,}7 \ldots 8{,}1 \cdot 10^{10}$ | $N/m^2$ |
| Wolfram | $13 \ldots 15 \cdot 10^{10}$ | $N/m^2$ |
| Glas | $1{,}8 \ldots 3{,}0 \cdot 10^{10}$ | $N/m^2$ |
| Knochen | $1{,}0 \cdot 10^{10}$ | $N/m^2$ |

Der Torsionsmodul läßt sich aus Untersuchungen an verdrillten Stäben mit kreisförmigen Querschnitten bestimmen.

## 2.2 Meßmethode

Man benutzt einen kreiszylindrischen Stab der Länge L und dem Radius R, der am oberen Ende fest eingespannt ist und am unteren Ende durch ein äußeres Drehmoment M um den Winkel φ verdreht wird, wobei die verdrehte Strecke auf dem Zylindermantel der Bogenlänge s entspricht. Zerlegt man gedanklich den Stab in dünne Kreishohlzylinder der Dicke dr, so gilt für deren Querschnittsfläche:

$$dA = 2\pi r \cdot dr \tag{2}$$

Der Scherungswinkel $\alpha$ kann für kleine Verdrillungen durch $\alpha = s/L$ und der Bogen s durch $s = r \cdot \varphi$ ersetzt werden, d.h.

$$\alpha = \frac{r \cdot \varphi}{L} \tag{3}$$

Durch die im Abstand r von der Zylinderachse angreifende Scherkraft $dF_S$ wird ein Drehmoment dM erzeugt

$$dM = dF_s \cdot r \tag{4}$$

Nach $dF_S$ umgestellt und in Gl.1 eingesetzt erhält man:

$$\frac{dM}{r \cdot 2\pi r \cdot dr} = G \cdot \frac{r \cdot \varphi}{L} \tag{5}$$

Nach Integration über alle Kreishohlzylinder von r = 0 bis R (Radius des Drahtes) erhält man das Drehmoment

$$M = \frac{\pi}{2} \cdot G \cdot \frac{R^4}{L} \cdot \varphi \tag{6}$$

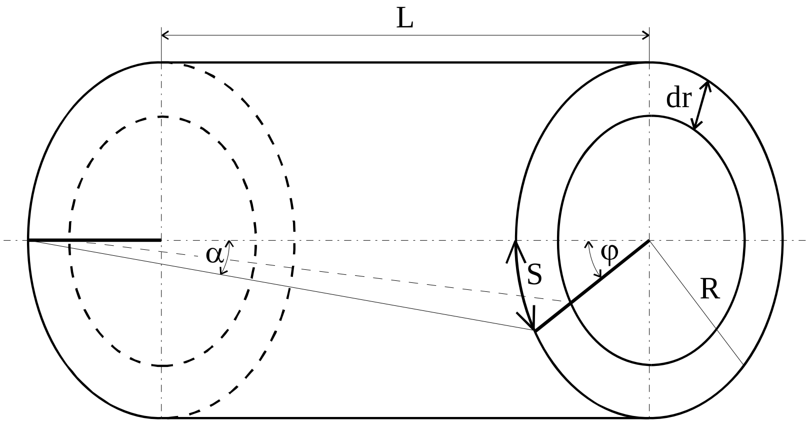


Bild 2: Schema zur Berechnung der Torsion

### 2.2.1 Statische Methode

Man erzeugt das zur Torsion nötige Drehmoment, indem man am Umfang der Kreisscheibe der Spannvorrichtung (Radius $R_s$) über eine Schnur durch Anhängen von Massestücken m das Gewicht $F_G$ wirken läßt ($M = F_G \cdot R_s = m \cdot g \cdot R_s$) und die Änderung des Torsionswinkels $\Delta\varphi$ in Abhängigkeit der angehängten Masse $\Delta m$ misst. Die Gl. 6 lässt sich nach G umstellen:

$$G = \frac{2 \cdot L \cdot g \cdot R_s}{\pi \cdot R^4} \cdot \frac{\Delta m}{\Delta\varphi} \tag{7}$$

### 2.2.2 Dynamische Methode

Wenn man den einseitig eingespannten verdrillten Stab losläßt, kommt es zu einer Torsionsschwingung, die durch die Differentialgleichung

$$I \cdot \ddot{\varphi} = -D \cdot \varphi \tag{8}$$

beschrieben wird (I ... Trägheitsmoment, D ... Direktionsmoment, $\varphi$ ... Drehwinkel).

Für den Betrag des rücktreibenden Drehmomentes M gilt bei kleinen Verdrehwinkeln (Elastizitätsbereich)

$$M = D \cdot \varphi \tag{9}$$

Aus (6) und (9) erhält man

$$D = \frac{\pi}{2} \cdot G \cdot \frac{R^4}{L} \tag{10}$$

Die Lösung der Schwingungsgleichung (8) ist eine harmonische Schwingung mit der Schwingungsdauer

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}} \tag{11}$$

I ist das Trägheitsmoment des schwingenden Systems (Stab und Befestigungs-vorrichtung). Dieses ist i.a. nicht bekannt und muss deshalb eliminiert werden. Dazu schraubt man eine Zusatzmasse mit dem Trägheitsmoment $I_1$ (bezüglich der Drehachse) an die vorhandene Scheibe. Das Trägheitsmoment des Torsionspendels vergrößert sich dadurch additiv, so daß man für die Schwingungsdauer jetzt

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I + I_1}{D}} \tag{12}$$

erhält. Daraus ergibt sich für das Direktionsmoment

$$D = \frac{(2\pi)^2 \, I_1}{\left(T_1^2 - T^2\right)} \tag{13}$$

und somit für den Torsionsmodul

$$G = \frac{8\pi \cdot L \cdot I_1}{R^4 \left(T_1^2 - T^2\right)} \tag{14}$$

Dicke Stäbe haben ein großes Direktionsmoment, so dass die Torsionsschwingung zu klein wird, um mit der Stoppuhr gemessen werden zu können. Es empfiehlt sich daher die statische Methode zur Bestimmung des Torsionsmoduls. Liegt dagegen das zu untersuchende Material als Draht vor, wird der Torsionsmodul dynamisch ermittelt, weil sich Drähte leicht verdrillen lassen.
Ausgenutzt wird das elastische Verhalten eines Körpers bei Torsion z.B. in Form von Torsions- bzw. Drehstabfedern im Fahrzeugbau.

# 3. Versuchsdurchführung

## 3.1 Allgemeine Hinweise

- Eine Anleitung zur Bedienung der Spannvorrichtung liegt am Versuchsplatz.
- Beachten Sie, daß wegen der Gefahr der Abscherung der Torsionswinkel $\varphi$ nicht zu groß werden darf (etwa 90° bei dünnen und 40° bei dicken Stäben).
- Beginnen Sie die Messung mit dicken Stäben und mit kleinen Gewichten, die Sie langsam erhöhen bis sinnvoll meßbare Auslenkungen vorhanden sind.
- Vermeiden Sie ruckartige Belastungen!
- Trägheitsmoment der Zusatzmasse $I_1 = (103 \pm 1) \cdot 10^{-4}$ kg m$^2$

## 3.2 Statische Methode

Der Torsionswinkel wird an der Winkelteilung auf der Kreisscheibe $R_s = (88 \pm 1)$ mm abgelesen. Die zur Berechnung des Torsionsmoduls benötigten Größen L und R werden mit Lineal bzw. Feinmeßschraube bestimmt. Messen Sie $\varphi$ für 5...10 verschiedene Belastungen und stellen Sie die Abhängigkeit zwischen Torsionswinkel $\varphi$ und angehängter Masse m grafisch dar.
Legen Sie eine Ausgleichsgerade durch die Meßpunkte und bestimmen Sie deren Anstieg $\frac{\Delta m}{\Delta\varphi}$ ($\Delta\varphi$ in Bogenmaß!). Berechnen Sie G mit Gl. 7.

## 3.3 Dynamische Methode

Zur Bestimmung der Schwingungsdauer T stoppen Sie mehrfach die Zeit für je 5-20 Schwingungen, bilden den Mittelwert und teilen durch die Anzahl der Schwingungen. Nach dem Aufschrauben der Zusatzmassen wird die Messung in gleicher Weise für $T_1$ wiederholt. Die Berechnung von G erfolgt mit Gl. 14.

Schätzen Sie in allen Fällen die Messunsicherheit für G ab. Vergleichen Sie die Ergebnisse untereinander sowie mit vorhandenen Erwartungswerten!