Versuch 104

Biegung

1. Aufgaben

1.1 Messen Sie die Durchbiegung verschiedener Stäbe in Abhängigkeit von der Belastung und stellen Sie den Zusammenhang grafisch dar! Kontrollieren Sie dabei, ob die Verformung reversibel ist.

1.2 Bestimmen Sie den Elastizitätsmodul E mit Hilfe des Anstiegs aus der grafischen Darstellung! Berechnen Sie vorher für jedes Profil das Flächenträgheitsmoment I_A!

1.3 Führen Sie eine Größtfehlerabschätzung durch, und vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit Tabellenwerten!

2. Grundlagen

Stichworte:
Dehnung, Durchbiegung, elastische und unelastische Verformung, neutrale Faser, Hookesches Gesetz, Elastizitätsmodul, Flächenträgheitsmoment.

2.1 Elastizitätsmodul und Hookesches Gesetz

Ein fester Körper wird durch die Einwirkung einer Kraft verformt. Hört die Wirkung der deformierenden Kraft auf, so kann der Körper entweder seine ursprüngliche Gestalt wieder vollständig einnehmen (elastischer Körper), oder er kann die veränderte Gestalt beibehalten (unelastischer Körper). Die Formänderung hängt dabei in komplizierter Weise von der äußeren Spannung ab. Man kann sich diesen Sachverhalt anhand der Dehnung eines Stahldrahtes gut veranschaulichen (Bild 1):

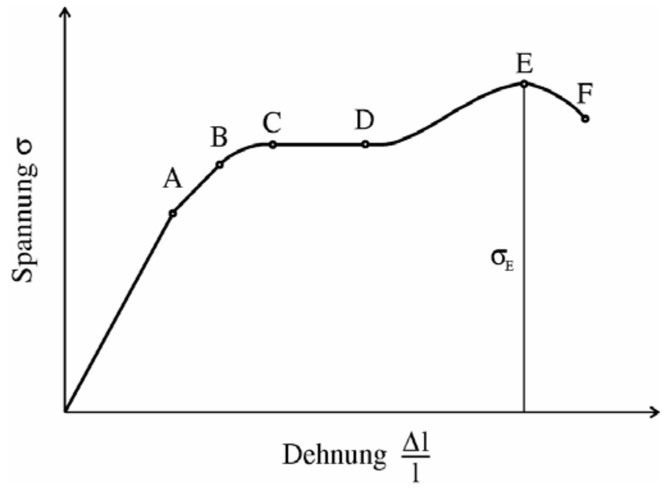

Bild 1: Spannungs-Dehnungs-Diagramm (schematisch)

Hängt man den Draht an einem Punkt fest auf und belastet ihn am unteren Ende, so ist bei kleiner Belastung die Verlängerung $\Delta l/l$ des Drahtes proportional der Zugspannung σ ($\sigma = F/A$; F ... Kraft, A ... Drahtquerschnitt). Vom Punkt A, der Proportionalitätsgrenze, nimmt die Dehnung schneller zu als die Spannung. In B ist die Elastizitätsgrenze erreicht. Bei weiterer Belastung kommt man in C zur Fließgrenze; der Stab verlängert sich dann bis D ohne Vergrößerung der Spannung. Von diesem Punkt an nimmt die Spannung wieder bis zu E (Zerreißfestigkeit σ_E), wo es dann beim Punkt F zum Reißen des Drahtes kommt. Die Erfahrung zeigt, dass bei kleinen Spannungen die relative Längenänderung $\Delta l / l$ proportional der Belastungskraft F und umgekehrt proportional zum Querschnitt A des Drahtes ist (*Hookesches Gesetz*), d. h.:

$$\frac{\Delta l}{l} = \alpha \frac{F}{A} \tag{1}$$

Der Proportionalitätsfaktor α heißt Elastizitätskoeffizient. Meistens rechnet man allerdings mit seinem reziproken Wert, dem *Elastizitätsmodul* $E = 1/\alpha$.

$$\frac{F}{A} = E \cdot \frac{\Delta l}{l} \tag{2}$$

Die Maßeinheit des E-Moduls ist Newton/Meter^2 oder Pascal:

$$1\ \mathrm{Pa} = 1\ \mathrm{Nm^{-2}} = 1\ \mathrm{m^{-1}\,kg\,s^{-2}}$$

Der E-Modul ist im allgemeinen eine Stoffkonstante, er hängt allerdings von der Vorbehandlung und der Reinheit des Materials ab.

E-Modul einiger ausgewählter Stoffe:

Stahl	$21 \cdot 10^{10}$ Nm^{-2}
Kupfer	$12 \cdot 10^{10}$ Nm^{-2}
Aluminium	$7 \cdot 10^{10}$ Nm^{-2}
Knochen (entlang der Achse bei Zug)	$1{,}6 \cdot 10^{10}$ Nm^{-2}
Menschenhaar	$0{,}4 \cdot 10^{10}$ Nm^{-2}

Der Elastizitätsmodul eines Stoffes ist umso größer, je weniger dieser den formverändernden Kräften nachgibt.

2.2 Biegung

Die Bestimmung des Elastizitätsmoduls erfolgt üblicherweise aus dem Spannungs-Dehnungs-Diagramm, das mit Hilfe einer speziellen Zerreißmaschine aufgenommen wird. Bei Proben mit größerem Querschnitt läßt sich der Elastizitätsmodul auch über einen Biegeversuch bestimmen. Diesem Sachverhalt liegen folgende Überlegungen zugrunde:
Ein Stab bekannten Querschnittes liegt auf zwei Schneiden. In der Mitte zwischen den Schneiden greift außer dem Eigengewicht eine zusätzliche Kraft F an, die zu einer Durchbiegung des Stabes führt (Bild 2).

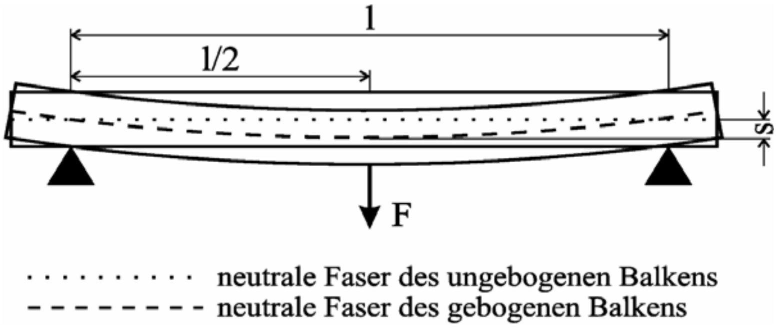

Bild 2: Prinzipielle Anordnung zur Untersuchung der Biegung

Die angreifende Kraft bewirkt, daß die oberen Schichten des Stabes zusammengedrückt, die unteren gedehnt werden. Dazwischen liegt eine Schicht, deren Länge sich nicht ändert, die also nur gebogen wird, die *neutrale Faser*. Infolge ihrer elastischen Spannung haben die unteren Schichten das Bestreben, sich wieder zusammenzuziehen, die oberen, sich wieder auszudehnen. Die Auslenkung der neutralen Faser an dem Ort l/2 senkrecht zum ungebogenen Balken wird als Biegepfeil s bezeichnet.
Der Biegepfeil s ist um so größer, je größer die Belastung ist. Im Gültigkeitsbereich des Hookeschen Gesetzes (kleines s) ist die Durchbiegung proportional zur angreifenden Biegekraft.

2.3 Flächenträgheitsmoment

Entscheidend für die Stärke der Durchbiegung bei vorgegebener Belastung sind Größe und Form des Stabquerschnitts (Profil). Dieser Einfluss wird durch das Flächenträgheitsmoment berücksichtigt. Es ist nach der Formel

$$I_A = \int y^2 d\,A \tag{3}$$

zu berechnen.
y ist der Abstand eines Flächenelements dA zur neutralen Faser, $dA = dx \cdot dy$ ist ein Flächenelement der Querschnittsfläche des Stabes.

Bei gegebenem Querschnitt ist ein Profil umso stabiler, je weiter entfernt von der neutralen Faser die Masse angeordnet ist. Um mit einer bestimmten Materialmenge eine maximale Biegefestigkeit zu erreichen, wird man dem Querschnitt eine besondere Form geben. Beispiele sind lange Röhrenknochen bei Menschen und Tieren, T-Träger an Gebäuden usw.
Für ausgewählte Beispiele sind im Anhang die Formeln zur Berechnung der Flächenträgheitsmomente angegeben.

2.4 Meßmethode

Der Stab liegt auf zwei Schneiden mit dem Abstand l (Bild 3).

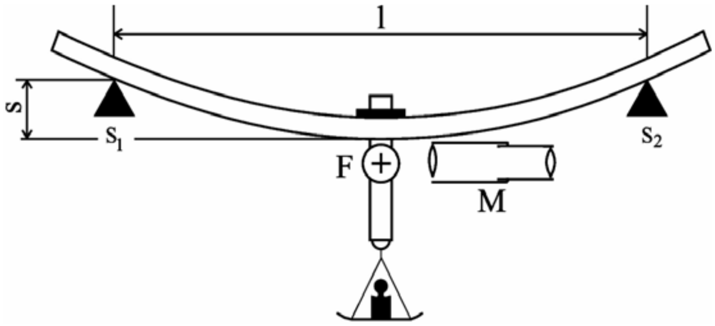

Bild 3: Messanordnung

(s - Durchbiegung, l - Schneidenabstand zwischen S_1 und S_2, F - Fadenkreuz, M - Mikroskop)

In der Mitte befindet sich die Schale zur Aufnahme der Wägestücke sowie ein aufgestecktes Fadenkreuz. Das Mikroskop mit Okularskala dient dazu die Lage des Fadenkreuzes zu bestimmen. Ohne Zusatzgewicht wird der Wert s_o gemessen. Bei Belastung vergrößert sich die Durchbiegung auf s'. Die Differenz $s' - s_o$ ist der Biegepfeil s .
Für kleine Durchbiegung $\left(s \ll \frac{1}{2} l\right)$ ist s proportional zur durchbiegenden Kraft (vgl. /7/):

$$s = \frac{l^3 \cdot F}{48 \cdot E \cdot I_A} \tag{4}$$

Für den Elastizitätsmodul erhält man daraus

$$E = \frac{l^3 \cdot m \cdot g}{48 \cdot I_A \cdot s} \tag{5}$$

3. Versuchsdurchführung

3.1 Der jeweilige Stab wird mit aufgestecktem Fadenkreuz auf die Schneiden gelegt (der Abstand l ist vorgegeben). Dann wird die Schale zur Aufnahme der Wägestücke in die Mitte zwischen den Schneiden an den Stab gehängt und s_o mit dem Meßmikroskop bestimmt. Anschließend wird s (Differenz $s' - s_o$) für 5 Belastungen (Masse zwischen 100 g und 500 g) gemessen. Zum Schluß ist die Bestimmung von s_o zu wiederholen. Ist die Durchbiegung reversibel?
Die Anzahl und Art der zu vermessenden Stäbe gibt der Assistent vor.

3.2 Die Okularskala des Messmikroskops muß, um die tatsächlichen Werte für s zu erhalten, kalibriert (geeicht) werden. Zu diesem Zweck stellt man die Skala eines vorhandenen Objektmikrometers im Mikroskop scharf ein, bringt die Bilder beider Skalen zur Deckung (Okular um 90° drehen) und liest in geeigneter Weise ab, z.B.:100 Skalenteile der Okularskala entsprechen ... mm in der Objektebene. Die Werte für s werden entsprechend umgerechnet.

3.3 Stellen Sie den Zusammenhang zwischen Masse m und Durchbiegung s für jeden Stab grafisch dar. Legen Sie jeweils eine Ausgleichsgerade durch die Meßpunkte, und bestimmen Sie deren Anstieg $\frac{\Delta m}{\Delta s}$.

Unter Berücksichtigung des Anstieges kann Gl. 5 folgendermaßen umgeschrieben werden:

$$E = \frac{l^3 \cdot g}{48 \cdot I_A} \cdot \frac{\Delta m}{\Delta s} \qquad (6)$$

3.4 Die Querschnittsparameter der Stäbe werden mit Meßschieber bzw. Feinmessschraube ermittelt und daraus die Flächenträgheitsmomente berechnet (Formeln für I_A vgl. Anhang).

Vergleichen Sie die Durchbiegung s von Stäben gleicher Länge und Querschnittsfläche, jedoch unterschiedlicher Form des Querschnittes bei gleicher Belastung.

3.5 Berechnen Sie E für alle Stäbe nach Gl.6!

Eine Fehlerabschätzung kann aus Gl.6 durch Addition der relativen Fehler aller in die Berechnung eingehenden Größen erfolgen (Δl vorgegeben, Anstiegsfehler grafisch abschätzen, ΔI_A folgt aus der Meßgenauigkeit der Querschnittsparameter und Fehlerfortpflanzung entsprechend der jeweiligen Berechnungsformel). Vergleichswerte für E entnehmen Sie bitte Abschnitt 2.1 der Versuchsanleitung oder geeigneten Nachschlagwerken (z.B. /1/).

Anhang: Flächenträgheitsmomente für ausgewählte Beispiele von Querschnittsflächen: