Fehlerrechnung
Teil I

Ergebnisdarstellung

Linearisierung

Ausgleichsgerade

Signifikante Ziffern

Meßabweichungen

Fehlerfortpflanzungsgesetze

Ergebnisdarstellung

Beispiel: - Aufnahme einer Weg-Zeit-Messung : t – x oder x(t)

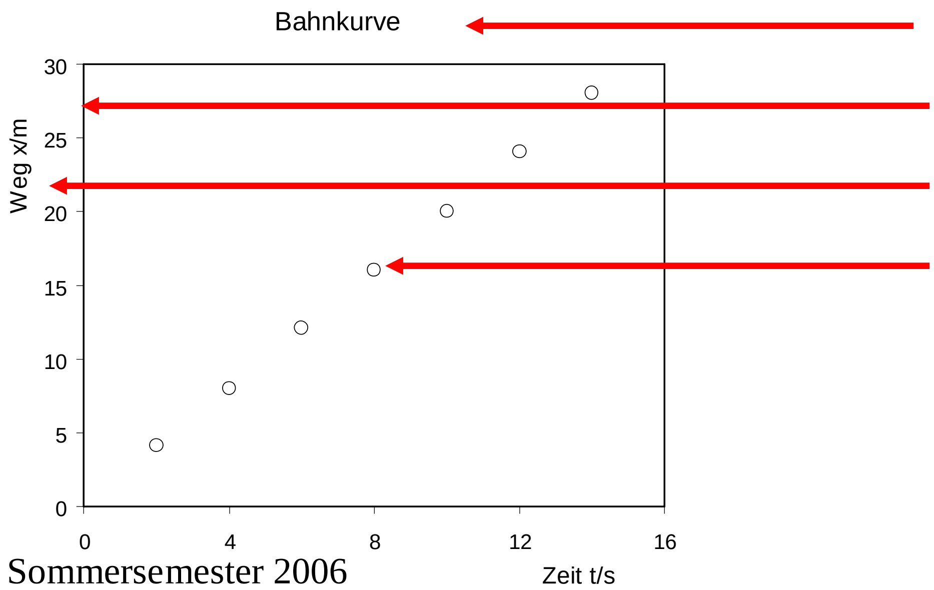
- Darstellung als Wertetabelle:

t/s	x/m	$V/\ ms^{-1}$
2	0.01	0.005
4	0.02	0.005
8	0.16	0.02

Resultat: Maßzahl · Einheit z.B. v = 22 m/s

Achtung: SI-Einheiten m, kg, s, A, K, cd, mol

Grafische Darstellung



Geradendarstellung

Das Auge kann nur die Gerade und den Kreis als geometrische Elemente eindeutig identifizieren.

$$Y = A \cdot X + B$$

Wichtige Funktionsverläufe können in Geradengleichungen überführt werden:

Potenzfunktion: $y = B \cdot x^{A} \quad \rightarrow \quad \ln y = A \cdot \ln x + \ln B$

doppelt-geteiltes logarithmisches Papier

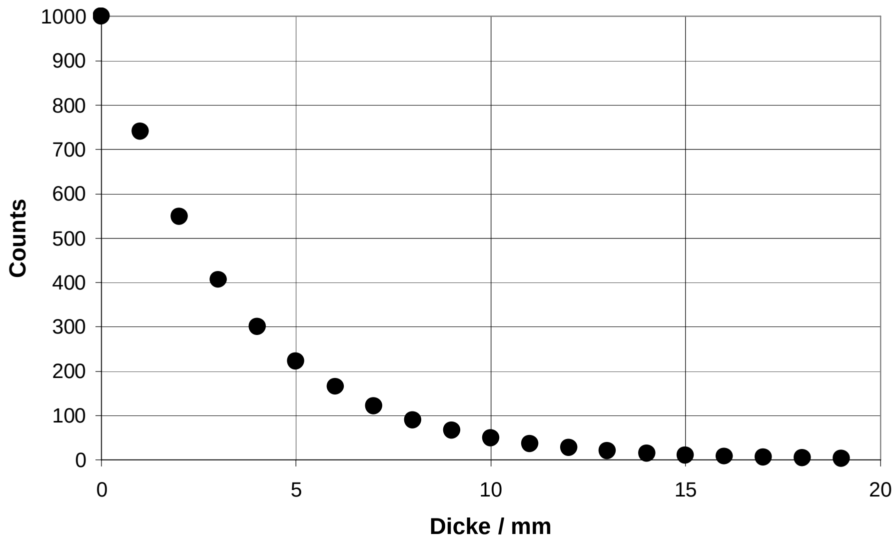
Exponentialfunktion: $y = B \cdot e^{A \cdot X} \quad \rightarrow \quad \ln y = A \cdot x + \ln B$

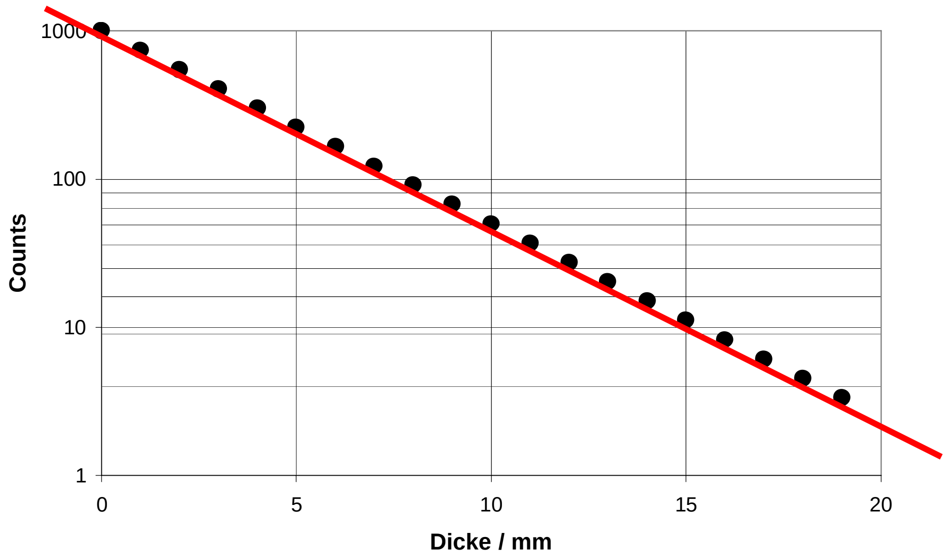
einfach-geteiltes logarithmisches Papier

Exponentialgesetze

$$y = B \cdot e^{A \cdot x} \quad \rightarrow \quad \ln y = A \cdot x + \ln B$$

Beispiel: radioaktiver Zerfall $\quad N = N_0 \cdot e^{-\mu \cdot x}$



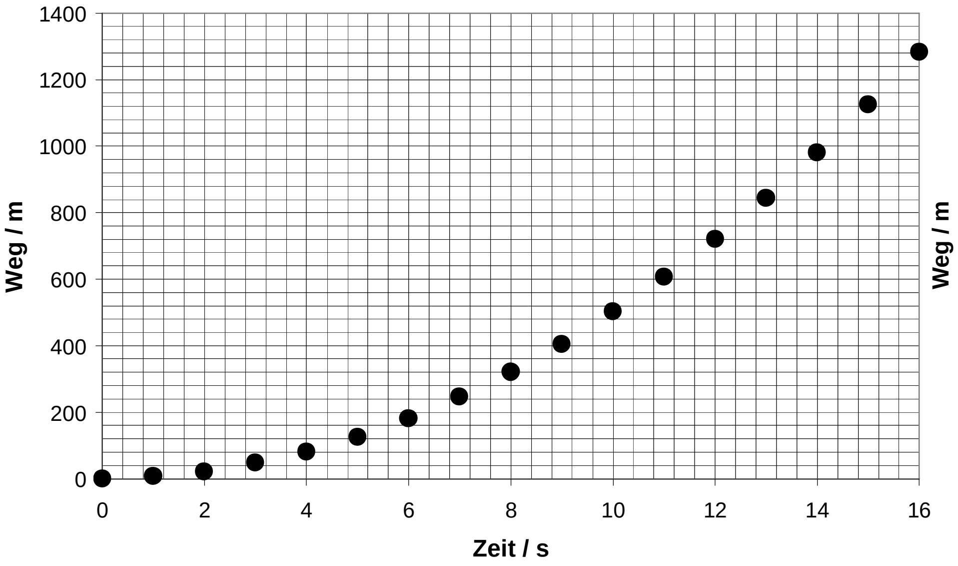


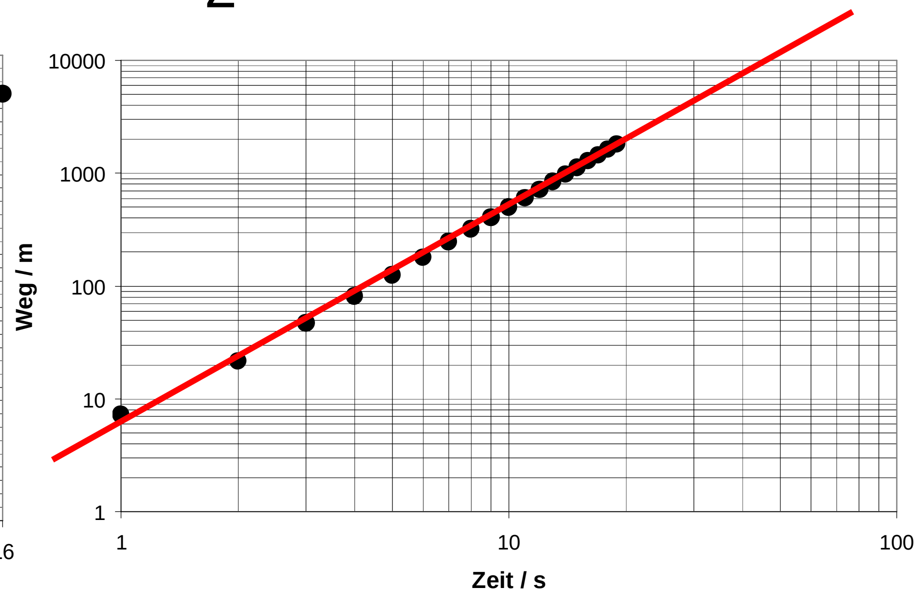
Einfach-logarithmische Darstellung

Potenzgesetze

$$y = B \cdot x^A \qquad \rightarrow \qquad \ln y = A \cdot \ln x + \ln B$$

Beispiel: freier Fall $\qquad s = \frac{g}{2} \cdot t^2$



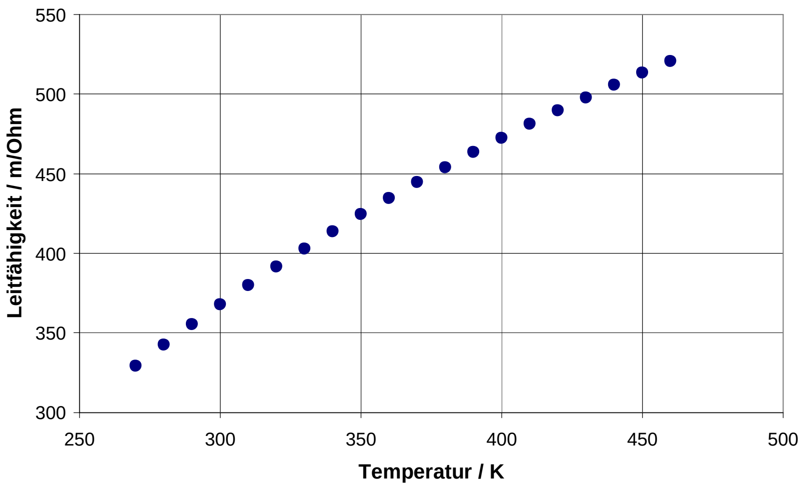


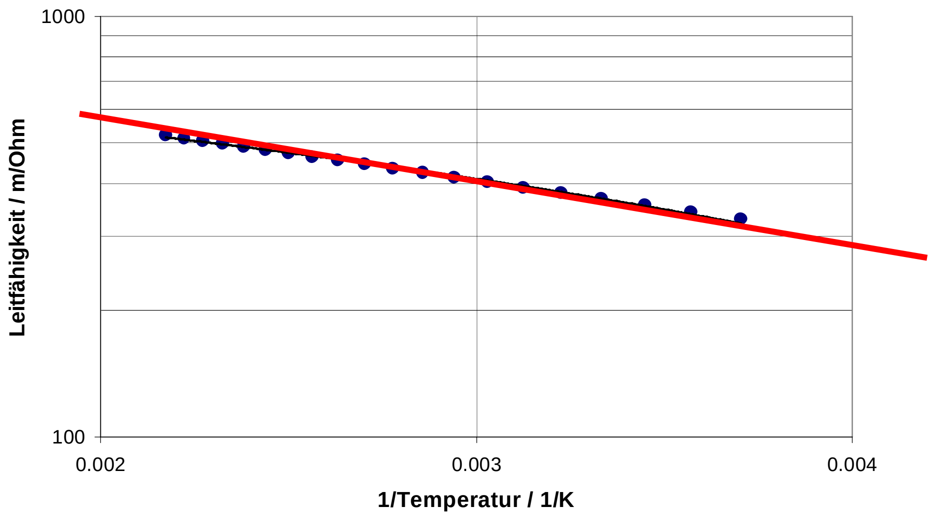
Doppelt-logarithmische Darstellung

Darstellung von e $^{\text{const / T}}$

Beispiel: elektrische Leitfähigkeit im Halbleiter

$$\sigma(T) = \sigma_0 \cdot e^{-\frac{E}{2kT}}$$

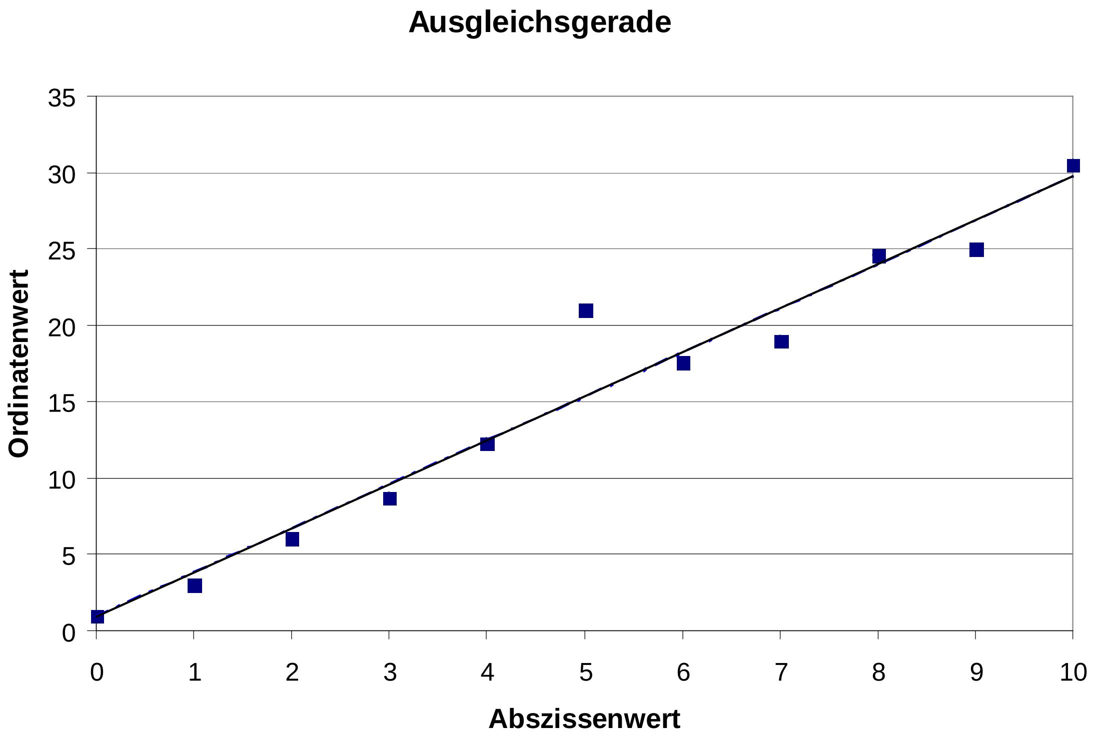


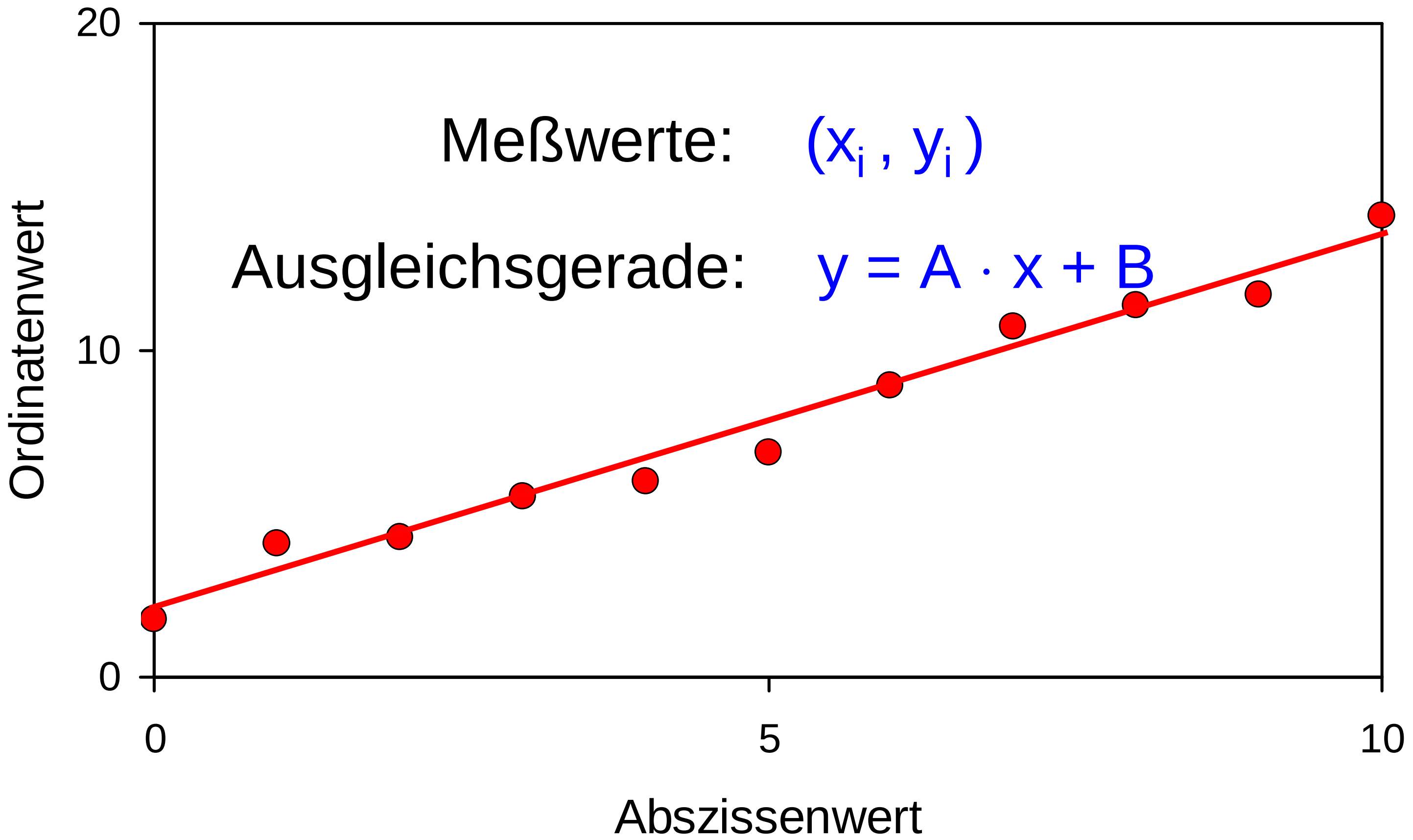


Ausgleichsgerade - lineare Regression

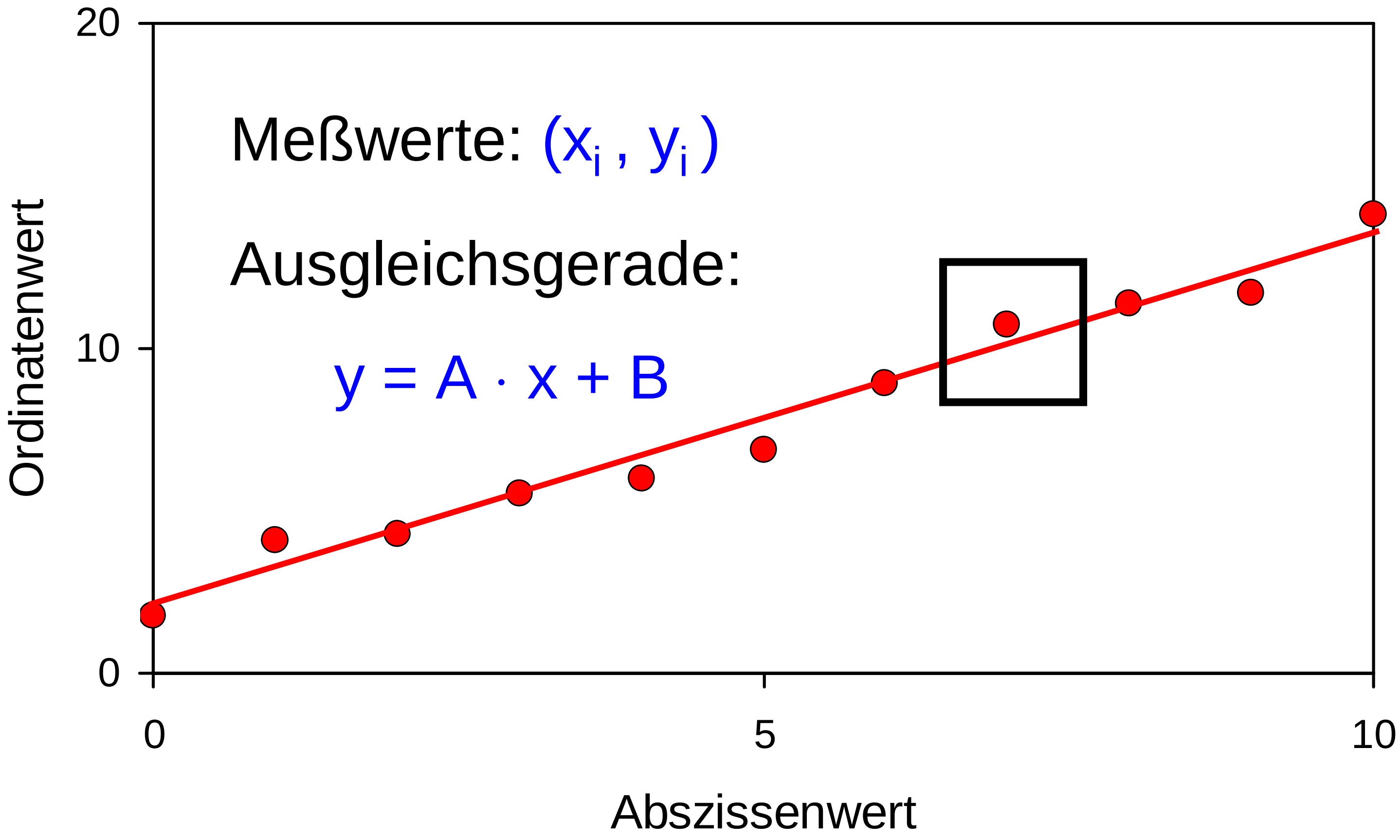
Problem: Messwerte streuen infolge Meßabweichungen um eine Gerade.

Gesucht ist diejenige Gerade, die den Messwerten am besten entspricht :

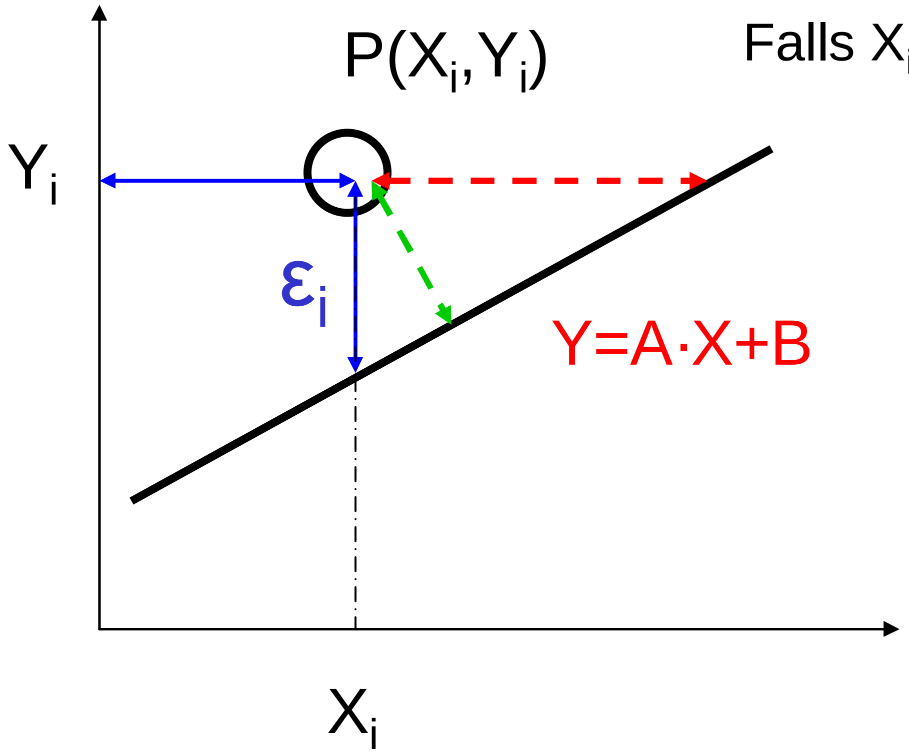




Idee: A und B so wählen, daß die Abweichungen der Meßwerte von der Ausgleichsgeraden minimal werden >>> *(Methode der kleinsten Quadrate)*



$\sum$ (Abweichungen)^2 = Minimum



Falls X_i genauer als Y_i gemessen wurde:

$$Y_i = A \cdot X_i + B - \varepsilon_i$$

$$\varepsilon_i = A \cdot X_i + B - Y_i$$

$$\sum \varepsilon_i^2 = \text{Minimum}$$

$$\varepsilon_i = f\,(A,B)$$

$$\longrightarrow$$

$$\partial \sum \varepsilon_i^2 / \partial A = 0\ !$$

$$\partial \sum \varepsilon_i^2 / \partial B = 0\ !$$

$$\boxed{B = \frac{\overline{y} \cdot \overline{x^2} - \overline{x \cdot y} \cdot \overline{x}}{\overline{x^2} - \overline{x} \cdot \overline{x}} \quad \text{und} \quad A = \frac{\overline{x \cdot y} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x} \cdot \overline{x}}}$$

Meßgenauigkeit

Beispiel: Geschwindigkeitsmessung aus Weg und Zeit:

$$L = 72\ \text{cm},\quad t = 13.3\ \text{s} \longrightarrow v = 0.054135559...\ \text{m/s}$$

Messabweichungen: $\Delta L = 1\ \text{mm},\quad \Delta t = 0.1\ \text{s}$

$$L = (72{,}0 \pm 0{,}1)\ \text{cm} \qquad t = (13{,}3 \pm 0{,}1)\ \text{s}$$

$$v_{min} = \frac{71{,}9}{13{,}4}\ \text{cm/s} = 0.053\,656\,71..\ \text{m/s}$$

$$v_{max} = \frac{72{,}1}{13{,}2}\ \text{cm/s} = 0.054\,621\,21..\ \text{m/s}$$

$$\Delta v = v - v_{min} \cong v_{max} - v \cong 0.000\,5\ \text{m/s}$$

Formales Ergebnis: $v = (\,0.054\,135\,559 \pm 0.000\,5\,)\ \text{m/s}$

Welche Angabe ist vernünftig?

Meßgenauigkeit

Welche Angabe ist vernünftig? $v = (\, 0.054\,1\underline{35\,559} \pm 0.000\,5\,)$ m/s

! Beachte: Signifikante Ziffern (Stellen) !

Angabe der Meßabweichungen

absolute Meßabweichung :	$\Delta x = 0.000\,5$ m/s
relative Meßabweichung :	$\delta x = 0.0005 / 0.0541 = 0.01$
prozentuale Meßabweichung :	$\delta x \cdot 100\% = 1\%$

In nichts
zeigt sich der Mangel an mathematischer Ausbildung
mehr als an einer übertrieben genauen Rechnung

(C.F.Gauß)

Signifikante Stellen

Wie ist das Ergebnis

$v = (\,0.054\;135\;559 \pm 0.000\;5\,)$ m/s

vernünftig anzugeben?

Bei jeder Ergebnisangabe sollte die letzte signifikante Stelle des Ergebnisses *an der gleichen* Dezimalstelle stehen wie die *letzte signifikante Ziffer* der Meßunsicherheit.

Beispiele: $92.819\;4 \pm 0.32 \longrightarrow 92.82 \pm 0.32$

$0.003\;421\;6 \pm 0.000\;22 \longrightarrow (3.42 \pm 0.22)\cdot 10^{-3}$

Was bedeutet das?

Bei einer Einzelmessung erhält man mit 68% Wahrscheinlichkeit einen Meßwert zwischen $(3.42 - 0.22)\cdot 10^{-3}$ und $(3.42 + 0.22)\cdot 10^{-3}$

Qualität einer Messung
&
Signifikante Ziffern

mit Stoppuhr: 11.44 s

mit Kamera: 11.49 s

mit Lichtschranke: 11.486 s

- Ein Zuschauer stoppt die Zeit mit einer Stoppuhr (1 /100 s): 11,44 s
- Fernsehkamera, (100 Bilder pro Sekunde, Zielfoto): 11,49 s.
- Lichtschranke (zeitliche Auflösung von 1/1000 s): 11,486 s.

Messabweichungen

- Zuschauer: Reaktionszeit von 0,1 bis 0,2 s,
  Angabe der 2. Stelle nach dem Komma ist nicht sinnvoll. 11,4 s.
- Fernsehkamera: Angabe von 4 signifikanten Stellen. 11,49 s
- Lichtschranke: Messung sogar auf 5 Stellen genau. 11,486 s.

- 100 m-Strecke wurde auf 1mm genau bestimmt (6 signifikante Stellen)

Messung	Ergebnis	signifikante Stellen
Zuschauer	8,77 m / s	3
Kamera	8,703 m / s	4
Lichtschranke	8,7063 m / s	5

Rechnen mit signifikanten Ziffern (Stellen)

(gemeint: Messergebnisse)

Zahl	**signifikante Stellen**
156.4	4
4.5300	5
$0.0018 = 1.8 \cdot 10^{-3}$	2
$0.001800 = 1.800 \cdot 10^{-3}$	4

Multiplikation, Division, Radizieren: signifikante Stellen des Resultats sind durch Zahl mit wenigsten signifik. Ziffern gegeben

Beispiel: $48.0 \cdot 943 = 45\,264 = 45\,300$

Addition, Subtraktion: Das Endergebnis hat nach dem Komma so viele signifikante Stellen wie die Zahl mit den wenigsten signifikanten Stellen.

Beispiel: $3.16 + 2.7 = 5.86 = 5.9$

Arten von Messabweichungen

Messabweichung = Messwert - wahrer Wert

DIN 1319-1

Systematische Messabweichungen :

- bei Wiederholung der Messung reproduzierbar

- schwer erkennbar - aber korrigierbar
  z.B. Anzeigefehler, Schlupf, Spannungsabfall ..

Zufällige Messabweichungen, (auch: statistische M.a.):

- können positiv und negativ sein („streuen“)
- Häufigkeit nimmt mit der Größe ab

…. die Normenarbeit geht weiter: INC-1 (1980)

Nicht mehr Unterteilung in systematische und zufällige Meßabweichungen mehr sondern in:

Standardunsicherheit vom Typ A:

bei Wiederholmessung $$u_x = S_{\overline{X}}$$

Standardunsicherheit vom Typ B:

wissenschaftliche Beurteilung aller Informationen über die mögliche Streuung der Messgrößen:

Fehlergrenzen, Herstellerangaben, ………

Dann Annahmen über den Verteilungstyp,

Angabe der kombinierten Standardunsicherheit (Quadratisches Fortpflanzungsgesetz)

Wiederholmessungen

Zur genauen Bestimmung der Meßgröße y wird die Messung mehrfach wiederholt: $\longrightarrow$ Meßwerte y_i mit i = 1..n

Aus der Meßstatistik der y_i (= Stichprobe) können der Mittelwert $\bar{y}$ und die empirische Standardabweichung S bestimmt werden.

S^2 heißt empirische Varianz der Stichprobe.

Indirekte Messungen

Die Meßgröße y hängt in bekannter Weise von mehreren Meßwerten X_i ab: $y = f(x_1, x_2, .. X_m)$.

Die Meßunsicherheit von y wird durch Fortpflanzungsgesetze beschrieben (linear oder quadratisch).

Mittelwerte

Meßwerte $\{y_i\}$

Mittelwerte - arithmetisch: $$\bar{y} = \frac{\sum_{1}^{N} y_i}{N}$$

- geometrisch: $$\bar{y} = \sqrt[n]{y_1 y_2 .. y_n}$$

- quadratisch : $$\bar{y} = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

- Median : steht in der Mitte

Warum wird der arithmetische Mittelwert bevorzugt?

Eigenschaften des arithmetischen Mittelwerts

- Summe aller Fehler verschwindet: $$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y}) = 0$$

- Summe der Fehlerquadrate ist minimal: $$\frac{\partial}{\partial \overline{y}} \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2 = 0$$

Standardabweichung = Breite der Meßwertverteilung um Mittelwert

Standardabweichung s: $$s = \sqrt{\frac{\sum_{1}^{n}[y_i - \overline{y}]^2}{n-1}}$$

Betrachtung von mehreren Stichproben

Hierzu folgt ein simuliertes Beispiel

Gemessen wird die Kopfzahl von 5 Würfeln gemittelt über n =100 Würfe

Einzelmessung/ Stichprobe:

$\overline{X}_i$ s

Mittelwert	Standardabweichung
16,95	4,18
16,91	4,1
17	3,43
17,42	3,45
18,2	3,9
17,14	3,74
17,61	4,01
17,49	4

Mittelwert und Standardabweichung der Einzelmessung

Mittelung über alle Stichproben:

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_n \overline{X}_i$$

$$\boxed{S_{\overline{X}} = \frac{S}{\sqrt{n}}}$$

Mittelwert	Standardabweichung
17,47	0,39

Mittelwert und Standardabweichung des Mittelwerts

Schlußfolgerungen für die Streuung der Mittelwerte

- 1 Meßreihe liefert die Messwerte y_i, aus denen der Mittelwert $\bar{y}$ und die Streuung σ der Messwerte um den Mittelwert berechnet werden.
- Die Mittelwerte $\bar{y}_i$ vieler Messreihen verteilen sich mit der Streuung $\sigma_{\bar{y}}$ um den wahrscheinlichsten Mittelwert .

Es gilt bei Meßreihen (n - Stichprobenumfang) für die Standardabweichung des Mittelwerts = Standardunsicherheit:

$$\boxed{s_{\bar{y}} = \frac{s}{\sqrt{n}}}$$

Vertrauensbereich

Man definiert einen Vertrauensbereich **V(n,P)** :

$$V(n,P) = t \cdot s_{\bar{y}}$$

Er gibt an, dass der aus einer Messreihe von n Messungen gewonnene Mittelwert mit einer statistischen Sicherheit von P betragsmäßig um nicht mehr als V(n,P) vom „wahren“ Erwartungswert μ abweicht.

$$\bar{y} - V(n,P) \leq \mu \leq \bar{y} + V(n,P)$$

t*	Anteile der Messwerte im Intervall	Bezeichnung
1	68,3 %	Orientierende Messung
2	95,5 %	Betriebsmessung
3	99,7 %	Präzisionsmessung

***)** es liegen sehr viele Messungen vor (n>200)

Fortpflanzung **systematischer** Meßabweichungen

Gesucht ist eine obere Schranke ΔZ
für die Meßunsicherheit der indirekt gemessenen Größe Z,
die aus mehreren unsicheren Einzelgrößen bestimmt wird !

$$Z = f(X,Y) \qquad \Delta Z = \left|\frac{\partial Z}{\partial X}\right| \cdot \Delta X + \left|\frac{\partial Z}{\partial Y}\right| \cdot \Delta Y$$

$$Z = X \pm Y \qquad \Delta Z = \Delta X + \Delta Y$$

$$Z = X \cdot Y \qquad \Delta Z / Z = \Delta X / X + \Delta Y / Y$$

Im Praktikum werden gewöhnlich die Meßabweichungen mit 1..2 signifkanten Ziffern angegeben.

Fortpflanzung **zufälliger** Meßabweichungen

(Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz)

- $Z = f(X,Y)$
- Unkorrelierte und zufällige Messabweichungen bei X und Y
- Standardabweichungen s_X und s_Y

Gesucht ist die wahrscheinlichste Standardabweichung von Z!

$Z = f(X,Y)$ bekannt: s_X, s_Y gesucht: s_Z

$$\boxed{s_Z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)^2 \cdot s_X{}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right)^2 \cdot s_Y{}^2}}$$

s_Z wird nach DIN 1319 kombinierte Standardunsicherheit genannt

Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz

$$\boxed{s_Z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)^2 \cdot s_X{}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right)^2 \cdot s_Y{}^2}}$$

$Z = X + Y$	$s_Z{}^2 = s_X{}^2 + s_Y{}^2$
$Z = X \cdot Y$	$(s_Z/Z)^2 = (s_X/X)^2 + (s_Y/Y)^2$
$Z = x^n$	$s_Z = s_X \cdot n$
$Z = \ln X$	$s_Z = s_X / X$
$Z = e^X$	$s_Z = s_X \cdot Z$

Fortpflanzung **zufälliger** Meßabweichungen

(„Größtfehlerabschätzung“)

Wegen $c = \sqrt{a^2 + b^2} \leq |a| + |b|$ kann man schreiben

$$\boxed{s_Z \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x} \cdot s_X \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial Y} \cdot s_Y \right|}$$

Nach dieser „Größtfehlerabschätzung“ wird der Anfänger die Messgenauigkeit bestimmen.

Im Praktikum ist es sinnvoll, einen Vertrauensbereich von 95% zu wählen, d.h. t =2

Meßabweichungen von Summen und Differenzen

$L_1 = 27.30 \pm 0.16\ m$

$L_2 = 15.60 \pm 0.08\ m$

$$\overline{l_1 - l_2} = \overline{l_1} - \overline{l_2} = 11.7\,m$$
$$\overline{l_1 + l_2} = \overline{l_1} + \overline{l_2} = 42.9\,m$$

$$\boxed{\sigma_{l_1 - l_2} = \sqrt{\sigma_{l_1}^2 + \sigma_{l_2}^2}} = \sqrt{0.16^2 + 0.08^2} = 0.18$$
$$\boxed{\sigma_{l_1 + l_2} = \sqrt{\sigma_{l_1}^2 + \sigma_{l_2}^2}} = \sqrt{0.16^2 + 0.08^2} = 0.18$$

$l_1 - l_2 = (\ 11.70 \pm 0.18\ )\ m$

$l_1 + l_2 = (\ 42.90 \pm 0.18\ )\ m$

Beispiel für Fehlerfortpflanzung
(zufällige Meßabweichungen)

Bestimmung der Dichte von Luft : $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m_1 - m_2}{V}$

V = 16.73 $\pm$ 0.21 cm^3
m_1 = 10.3420 $\pm$ 0.0020 g
m_2 = 10.3210 $\pm$ 0.0020 g

Abschätzung der Messunsicherheit:

$$\frac{\sigma_\rho}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_V}{V}\right)^2} = \sqrt{\frac{\sigma_{m_1}^2 + \sigma_{m_2}^2}{m^2} + \left(\frac{\sigma_V}{V}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{0.0020^2 + 0.0020^2}{0.021^2} + \left(\frac{0.21}{16.73}\right)^2} \approx \sqrt{\frac{2}{100} + (0.013)^2} \approx 0.14$$

also: $\boxed{\frac{\sigma_\rho}{\rho} = 0.14}$

Bestimmung der Standardunsicherheit

(Standardabweichung des Mittelwerts)

1) Direkte Messung: - Wiederholmessung = Typ A $\boxed{u_Z = s_{\overline{Z}}}$

- „Fehlerangaben“ = Typ B

2) Indirekte Messung: Kombinierte Standardunsicherheit

lineare oder quadratische Fortpflanzung

Fazit: Die Kunst besteht nicht darin, den Formalismus der Fehlerrechnung zu handhaben, sondern darin, sinnvoll die Messabweichungen bei den einzelnen Messungen abzuschätzen (Standardabweichung vom Typ B).

Meßergebnis einer direkt gemessenen Größe

Meßvorgang $\longrightarrow$ Einzelmeßwerte X_i

Mittelwert

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i}{n}$$

Meßabweichungen

systematische	zufällige	~~grobe Fehler~~

Korrektur e_c Restfehler e_S

n > 6 Fehlerrechnung	n < 6 F.abschätzung
$e_Z = \overline{S} = \sqrt{\dfrac{\sum v_i^2}{n \cdot (n-1)}}$	$e_z \approx \Delta x$

korrigiertes Ergebnis

$X_c = \overline{X} + e_c$

Messunsicherheit $u = \sqrt{e_S^2 + e_Z^2} \leq |e_S| + |e_Z|$

Meßergebnis $X = X_c \pm u$

Beispiel: Messung der Periodendauer eines Fadenpendels bei einer Auslenkung von φ = 8 Grad

$$T = T_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\varphi}{2}\right) + \dots$$

Lichtschranke, syst. Restfehler e_S = 0.001 s

Meßwerte:

i	T_i / s	v_i / 10^{-4} s	v_i^2 / 10^{-8} s^2
1	2,949	-14	196
..	..	..	..
10	2,950	-4	16
Summe	29,504	0	640

Auswertung:

Mittelwert: T = 2,9504 s

Korrektur: $e_C = -T \cdot \left(\frac{1}{4}\sin^2\frac{\varphi}{2}\right) = -0.0036\,s$

syst. Restfehler: e_S = 0,001 s

zufäll. Fehler: $e_Z = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{640 \cdot 10^{-8}}{9 \cdot 10}} = 0.0003s$

Meßunsicherheit: $u = \sqrt{e_S^2 + e_Z^2} = 0{,}0013\,s$

Gesamtergebnis: $T_C = T + e_C \pm u \quad = \quad (2{,}947 \pm 0{,}001)\,s$