Physikalisches Grundpraktikum III
FSU Jena - WS 07/08
Hausversuch

Stilianos Louca

30. Oktober 2007

Aufgabe 01 : Nichtlineare Regression

Unter der Annahme dass die Radioaktivität A der Probe durch die allgemeine Zeitfunktion

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-\frac{t}{T}},\ A_0, T \in \mathbb{R}$$

gegeben ist, ist die Halbwertsdauer $\mathcal{Q}$ gegeben durch

$$\mathcal{Q} = T \cdot \ln 2$$

Durch Überführung in eine lineare Darstellung kommt man auf

$$\mathcal{A}(t) = \alpha t + \beta$$

wobei

$$\mathcal{A}(t) := \ln A(t),\ \alpha := -\frac{1}{T},\ \beta := \ln A_0$$

und jetzt durch normale lineare Regression die zwei Parameter α und β zu bestimmen seien. Die der Transformation entsprechende Messreihe ist jetzt

t/h	0	1	2	3
$\mathcal{A}$	2.62	2.07	1.81	1.06

Mit der Methode der kleinsten Quadrate ergibt sich

$$\alpha = \frac{\overline{t \cdot \mathcal{A}} - \overline{t} \cdot \overline{\mathcal{A}}}{\overline{t^2} - \overline{t}^2} = -0.494\ h^{-1},\ \beta = \overline{\mathcal{A}} - \alpha \cdot \overline{t} = 2.631$$

und ferner der Bestwert für $\mathcal{Q}$

$$\mathcal{Q} = T \cdot \ln 2 = -\frac{\ln 2}{\alpha} \approx 1.4\ h$$

Aufgabe 02 : Bestimmung des Vertrauensbereichs

Der Parameter-Freiehitsgrad beträt $\nu = N - 1 = 9$. Damit ergibt sich nach der STUDENT-Verteilung (zweiseitiger Test)

$$t(\nu, 0.95) = 2.26,\ t(\nu, 0.99) = 3.25$$

$$95\%\ Konfidenz : x = \overline{x} \pm t(\nu, 0.95) \cdot \frac{s}{\sqrt{N}} = 4.36 \pm 0.0429\ cm \approx 4.36 \pm 0.04\ cm$$

$$99\%\ Konfidenz : x = \overline{x} \pm t(\nu, 0.99) \cdot \frac{s}{\sqrt{N}} = 4.36 \pm 0.0617 cm \approx 4.36 \pm 0.06\ cm$$

Aufgabe 03 : Anwendung des Chi-Quadrat-Tests

Sei $B_j,\ j = 1,...,12$ die beobachtete Anzahl von Geburten im j-ten Monat. Es wurden insgesamt $N = 1503$ Geburten registriert. Unter der Annahme es liegt eine Gleichverteilung vor, ergibt sich ein Monatlicher erwartungswert von $E_i = N/12 = 125.25$ Geburten. Die Anzahl der Freiheitsgrade ist $\nu = 12 - 1 = 11$. Es ergibt sich ein χ^2 Wert von

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{12} \frac{(E_j - B_j)^2}{E_j} \approx 7.283$$

Für ein Signifikanzniveau $a = 0.05$ bzw. eine Warscheinlichkeitsgrenze $W = 1 - a = 0.95$ ergibt sich ein maximaler Wert $\chi_0^2 = 19.68$ was viel größer ist als unserer ermittelter Wert. Demnach ist unser χ^2 Wert im erlaubten Wertebereich und wir haben allen Grund zu behaupten dass eine Gleichverteilung vorliegt!

Aufgabe 04 : Anwendung des Chi-Quadrat-Tests

Unter der Nullhypothese dass der Würfel nicht manipuliert sei, ist die Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{6}$ für die Erscheinung einer bestimmten Zahl bei einem Wurf gleichverteilt. Sei $P_j,\ j = 1,...,5$ die Wahrscheinlichkeit dass nach $n = 5$ Würfel-Würfen die 1 j-mal vorkommt. P_j gehorcht einer Binomialverteilung, d.h.

$$P_j = b_{n,p}(j) = \binom{n}{j} \cdot p^j \cdot (1-p)^{n-j} = \binom{5}{j} \cdot \frac{5^{5-j}}{5^n}$$

Da $N = 200$ mal Gewürfelt wurde ergeben sich für nicht-manipulierte Würfel die Erwartungswerte

Klassennummer i	**Ergebnis in Klasse**	**Wahrscheinlichkeit**	**Erwartete Anzahl** E_i
1	Keine Eins	0.4019	80.38
2	1X Eins	0.4019	80.38
3	2X Eins	0.1608	32.15
4	3,4 oder 5X Eins	0.035	7.08

Der χ^2 Test liefert

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{4} \frac{(E_i - B_i)^2}{E_i} = 12.299$$

Die Freiheitsgrade des Tests sind $\nu = 4 - 1 = 3$ (p und n sind auch ohne die Daten bekannt!). Die Wahrscheinlichkeit $W_3\left(\chi^2 \geq 12.299\right) \approx 0.007$ dass so ein hoher Wert für χ^2 vorkommt ist für nicht manipulierte Würfel sehr gering, und deutet darauf hin dass diese manipuliert sind!