Physikalisches Grundpraktikum II
FSU Jena - SS 2007
Hausversuch II

Stilianos Louca

5. Mai 2007

Aufgabe 01 : Normalverteilung

a) Die Dichtefunktion $G_{\mu,\sigma}(x)$ der $\mu - \sigma$ Normalverteilung ist gegeben durch

$$G_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

und entsprechend die Wahrscheinlichkeit $P_{\mu,\sigma}(a,b)$ dass ein gegebener Wert im Intervall (a,b) liegt durch die Fläche die durch die Dichtefunktion umschlossen wird:

$$P_{\mu,\sigma}(a,b) = \int_a^b G(x) \cdot dx, \ F_{\mu,\sigma}(x) := P_{\mu,\sigma}(-\infty, x) \ \Rightarrow \ P_{\mu,\sigma}(a,b) = F_{\mu,\sigma}(b) - F_{\mu,\sigma}(a)$$

Dieses Integral ist nicht auf elementare Stammfunktionen zurückzuführen, weshalb wir auf Tabellenwerte zurückgreifen müssen! Dazu erfolgt meist erst eine Transformation in eine 0-1-Normalverteilung (Normierung). Als F^{-1} wollen wir die Umkehrfunktion von $F_{0,1}$ bezeichnen.

- $$P = F_{\mu,\sigma}(58.5) = F_{0,1}\left(\frac{58.5-\mu}{\sigma}\right) = F_{0,1}(0.625) \approx 0.734$$

- $$P = F_{\mu,\sigma}(57.5) = F_{0,1}\left(\frac{57.5-\mu}{\sigma}\right) = F_{0,1}(-0.625) = 1 - F_{0,1}(0.625) \approx 0.266$$

- $$P = P_{\mu,\sigma}(57.2, 59.0) = P_{0,1}\left(\frac{57.2-\mu}{\sigma}, \frac{59.0-\mu}{\sigma}\right) = F_{0,1}(1.25) - F_{0,1}(-1)$$

  $$= F_{0,1}(1.25) + F_{0,1}(1) - 1 \approx 0.8944 + 0.8413 - 1 = 0.7357$$

b) Gesucht ist der Wert K so dass $F_{\mu,\sigma}(K) = 0.9$. Also

$$F_{0,1}\left(\frac{K-\mu}{\sigma}\right) \stackrel{!}{=} 0.9$$

Mit Hilfe der Tabelle ergibt sich $K \approx 59.02$

c) Analog zur vorhin ist der Wert K gesucht so dass $F_{\mu,\sigma}(K) = 1 - 0.6 = 0.4$. Also

$$F_{0,1}\left(\frac{K-\mu}{\sigma}\right) \stackrel{!}{=} 0.4$$

Es ergibt sich dass $K \approx 57.8$.

d) Gesucht sind die Intervalle (a,b) so dass $P_{\mu,\sigma}(a,b) = 0.7$. Offensichtlich sind diese unendlich viele da die Funktion $F_{\mu,\sigma}$ stetig ist! Jedoch werden wir uns auf ein ganz spezielles Intervall konzentrieren, das die Bedingung $|a-\mu| = |b-\mu|$ bzw. $\mu - a = b - \mu =: \delta > 0$, erfüllt. Daraus folgt

$$P_{\mu,\sigma}(a,b) = P_{\mu,\sigma}(\mu-\delta, \mu+\delta) = P_{0,1}\left(\frac{-\delta}{\sigma}, \frac{\delta}{\sigma}\right) = F_{0,1}(\gamma) - F_{0,1}(-\gamma) = 2F_{0,1}(\gamma) - 1 \stackrel{!}{=} 0.7,\ \gamma := \frac{\delta}{\sigma}$$

bzw.

$$F_{0,1}(\gamma) = 0.85$$

Es ergibt sich $\gamma \approx 1.04$ bzw. $\delta \approx 0.832$ also $a \approx 57.17$ und $b \approx 58.83$.

Aufgabe 02 : Normalverteilung

Die Anzahl n der Messungen ist gegeben durch

$$n = \left(\frac{F^{-1}\left(\frac{\mathcal{P}+1}{2}\right)\sigma}{\delta}\right)^2$$

wobei $\delta = 1\mu$m und $\mathcal{P} = 0.95$. Demzufolge

$$n = \left(F^{-1}(0.975)\cdot 5\right)^2 \approx (1.96\dot{}5)^2 \approx 96\ Messungen$$

Bemerkung: Bei so einer Anzahl von Stichproben wäre die Students-T-Verteilung praktisch Identisch mit der Standard-Normalverteilung weshalb wir von einer Normalerteilung ausgegangen sind, das es sich so einfacher rechnen lässt!

Aufgabe 03: Konfidenzintervall

Ist $\mathcal{P}$ die gesuchte Wahrscheinlichkeit dass ein Füllgewicht G_f kleiner als 1000g vorkommt und $\mu := 1054g$, $\sigma := 11g$, $G_p := 22g$, so gilt

$$\mathcal{P} = P(G_f < 1000) = P(G_f + G_p < 1022) = F_{\mu,\sigma}(1022) = F_{0,1}\left(\frac{1022-\mu}{\sigma}\right) \approx F_{0,1}(-2.91) \approx 0.00181$$

Aufgabe 04 : Konfidenzintervall

Der Mittelwert $\overline{x}$ und die Standardabweichung s der Stichprobe (4 Freiheitsgrade) sind jeweils 171.6g und 15.5g. Zu finden ist die Wahrscheinlichkeit $\mathcal{P}$ dass der entsprechende Erwartungswert μ kleiner als 200g ist, also für ein geeignetes d

$$\mathcal{P} = P\left(\mu < \overline{x} + d\frac{s}{\sqrt{n}} \stackrel{!}{=} 200\right) = P\left(-d < \frac{\overline{x}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right) = P\left(\frac{\overline{x}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} < d\right)$$

Es stellst sich heraus dass $d \approx 4.098$ was mit Hilfe der *Students-T-Verteilung* - Tabelle eine Wahrscheinlichkeit $\mathcal{P} \approx 0.9926$ ergibt.

Aufgabe 05 : Statistische Aussage

Da es sich hier um eine Binomialverteilung handelt, ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit P die Summe der Wahrscheinlichkeiten das entweder kein, eines oder zwei der Geräte defekt sind, da diese *Szenarien* sich genseitig ausschließen:

$$P = B\left(0,5,\frac{1}{10}\right) + B\left(1,5,\frac{1}{10}\right) + B\left(2,5,\frac{1}{10}\right) = \binom{5}{0}\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^5 + \binom{5}{1}\cdot\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^4 + \binom{5}{2}\cdot\frac{1}{10^2}\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^3 = \frac{9^3}{10^5}\cdot 136 = 0.99144$$