

Versuch 210

Thermohaus

Aufgaben

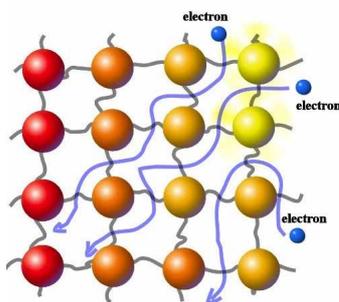
- Bestimmen des Wärmeleitkoeffizienten von Styropor, Metall, Glas und Holz mittels dynamischer und statischer Methode.
- Abschätzen des Heizaufwandes eines Einfamilienhauses im Winter.

Grundlagen

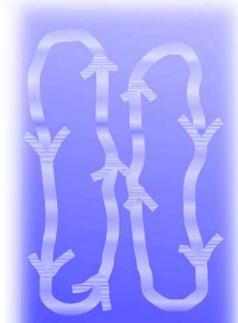
Wärmeübertragung

Die Übertragung von Wärme kann mittels der drei Übertragungsmechanismen *Leitung*, *Konvektion* und *Strahlung* geschehen:

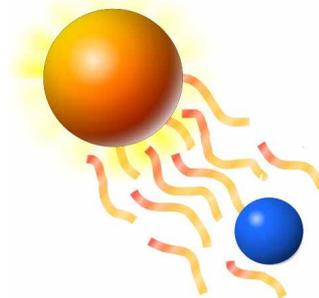
Wärmeleitung



Konvektionsströmung



Wärmestrahlung



Kennzeichen der Wärmeleitung ist, dass die Übertragung der Wärme mittels der Impulsweitergabe von kinetischer Energie über die Schwingungskopplungen der einzelnen Teilchen (Phononen), sowie über frei bewegliche Elektronen geschieht. Wärmeleitung tritt signifikant in Festkörpern auf, eine elektrisch leitender Körper ist besser leitend als ein Isolator (auf Grund der freien Ladungsträger).

Sind die Teilchen nicht durch starre Bindungen gekoppelt sondern gewissermaßen lose und frei (z.B. in Flüssigkeiten und Gasen), so kann der Wärmetransport durch sich bewegende Teile organisiert werden. Dabei kommt es zu Wärmeausgleichsströmungen. (Massentransport, Konvektion)

Bei stehenden Gasen oder in Vakuum ist weder Leitung (keine Phononen) als auch keine Konvektion als Mechanismus für den Wärmetransport verantwortlich, sondern Strahlung in Form elektromagnetischer Wellen (Photonen). Diese Übertragungsart wird vor Allem bei kontaktlosen Temperaturmessungen verwendet.

Wärmeleitung und Thermowellenn

Da der Wärmetransport ein Energiestrom darstellt, kann man bei Wärmeübertragung einen Energiestrom, bei Wärmeleitung und Konvektion kann man direkt von einer **Wärmestromdichte** j sprechen, wobei gilt:

$$j := \frac{\Delta Q}{A} \cdot \Delta t$$

Liegt Wärmeleitung durch einen Stoff vor, so ist j ebenfalls nach dem **Fouriersche Grundgesetz der Wärmeleitung**:

$$j = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} = -\lambda \cdot \text{grad}T$$

Die dabei eingeführte **Wärmeleitfähigkeit** λ gibt an, wie gut ein Stoff die Wärme weitergeben kann und hat als Einheit

$$[\lambda] = \frac{W}{K \cdot m}$$

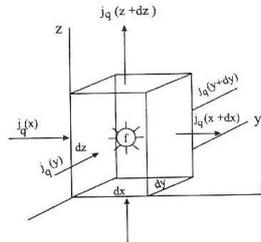
Nun sind bekanntlich Metalle gute Wärmeleiter, da freie Elektronen zur Verfügung stehen, welche dann hauptsächlich die Wärmeleitung organisieren. Wärmeisolatoren sind dann ebenfalls elektrisch schlecht leitfähig. Das **Wiedemann-Gesetz** beschreibt diesen Umstand so: Für kalte elektrische Leiter verhält sich die elektrische Leitfähigkeit proportional zur Wärmeleitung.

Versuchsprotokolle

Wir wenden uns wieder der Wärmeleitung zu und betrachten ein infinitesimales Volumenelement $dV = dx dy dz$. In diesem ist die Wärmeänderung gleich der Änderung der Inneren Energie (Temperatur, mittlere kin. Energie der schwingenden Atome und driftenden Elektronen) plus dem zugeführten (bzw. unter Beachtung des Vorzeichens abgeführten) Wärmestrom. Also:

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta I \cdot \Delta t$$

Dabei setzt man eine Wärmequelle f in die Mitte des Elements, welche die scheinbar vorhandene Quelle bzw. Senke repräsentiert.



Führt man nun die Wärmeänderung auf das zeitliche Verhalten der Wärmequelle zurück und setzt zusätzlich auch die weiteren Größen entsprechend...

$$\Delta Q = f \cdot dV \cdot \Delta t$$

$$\Delta U = c \cdot dm \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \cdot \Delta t = c \cdot \rho \cdot dV \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \cdot \Delta t$$

$$\begin{aligned} \Delta I &= \sum_{k=\{x,y,z\}} j_k \cdot A_k = \sum_{k=\{x,y,z\}} [j_k(k+dk) - j_k(k)] \cdot \frac{dV}{dk} \\ &= \sum_{k=\{x,y,z\}} [j_k(k) + j_k(dk) - j_k(k)] \cdot \frac{dV}{dk} \end{aligned}$$

... erhält man eine Differentialgleichung mit Divergenzaussage:

$$c \cdot \rho \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = f - \left(\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} \right) = f - \text{div} j$$

Das soll uns aber nicht weiter stören, da wir nun in diese das Fouriersche Grundgesetz der Wärmeleitung einsetzen können. Wir erhalten:

$$c \cdot \rho \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = f + \lambda \cdot \text{grad div} j$$

Um diese lösen zu können, verabschiedet man sich von dem Gedanken eines infinitesimalen Volumenelementes und betrachtet die Wärmequelle f als periodische Randbedingung. Weiterhin wird das Problem im Eindimensionalen gelöst und bei $x = \infty$ sei (empirisch gestützt) im Unendlichen die durch die Quelle hervorgerufene Wärmeänderung vollständig gedämpft. Also folgende Randbedingung:

$$T(x=0, t) = T_{\text{Umgeb}} + T_0 \cdot \cos \omega t$$

$$T(x=\infty, t) = T_{\text{Umgeb}}$$

Es ergibt sich folgende freundliche Gleichung:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{c \cdot \rho} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = a \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Dabei ist a die **Temperaturleitfähigkeit**. Dies ist eine partielle Differentialgleichung, die man mit Hilfe des sogenannten Separationsansatzes zu lösen versucht:

$$T(x, t) = A(t) \cdot B(x) + C$$

...weiter geht es dann auf der nächsten Seite!

Versuchsprotokolle

Es ergibt sich dann

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial t} B &= a \cdot A \cdot \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} \\ \frac{\partial A}{\partial t} \cdot \frac{1}{a \cdot A} &= \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial^2 B}{\partial x^2}, \forall t, x \\ \Rightarrow \frac{\partial A}{\partial t} \cdot \frac{1}{a \cdot A} &= \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \text{const}\end{aligned}$$

Diese Gleichung ist konstant, weil sie zu allen Zeiten an allen Orten gelten soll, also auch zur Zeit $t=0$ bzw. bei $x=0$. Dies erfüllt sie aber nur, wenn der linke bzw. der rechte Term konstant ist. Damit kann man aber zwei einfache Differentialgleichungen aufstellen, bei denen δ^2 die Konstante ist:

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial t} \frac{1}{a \cdot A} &= \delta^2 \Rightarrow A(t) = A_0 \cdot e^{a\delta^2 t} \\ \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} &= \delta^2 \Rightarrow B(x) = B_0 \cdot e^{\delta x} \\ \Rightarrow T(x, t) &= A(t) \cdot B(x) + c = A_0 \cdot B_0 \cdot e^{a\delta^2 t + \delta x} + C\end{aligned}$$

Das ist schon recht nett, zumal man diese ja recht einfach lösen kann. Dazu benötigt man lediglich die Randbedingungen. Nun ist man aber nur an dem reellen Anteil der Lösung interessiert, also bestimmt man auch nur die Konstanten im Reellen:

$$\begin{aligned}T(x=0, t) &= \Re(A_0 \cdot B_0 \cdot e^{a\delta^2 t} + C) = T_{Umgeb} + T_0 \cos \omega t \\ T(x=\infty, t) &= \Re(A_0 \cdot B_0 \cdot e^{\text{sign} \delta \cdot \infty} + C) = T_{Umgeb}\end{aligned}$$

Es ergibt sich daraus in erster Linie:

$$\begin{aligned}C &= T_{Umgeb} \\ \delta &< 0 \\ D &= T_0 a \delta^2 = i \omega\end{aligned}$$

Aus der letzten Zeile kann man daraus δ noch ein wenig näher bestimmen. Zu beachten ist dabei, dass laut der zweiten Zeile $\delta < 0$ ist, also interessiert nur der negative Wurzelterm:

$$\delta = -\sqrt{i \frac{\omega}{a}} = -\sqrt{\frac{\omega}{a}} \cdot e^{i \frac{\pi}{4}} = -\sqrt{\frac{\omega}{2a}} (1+i) = -\sqrt{\frac{c\rho\omega}{2\lambda}} (1+i)$$

Und so erhält man für die Lösung der Wellengleichung im Reellen:

$$T(x, t) = T_{Umgeb} + T_0 e^{-\sqrt{\frac{c\rho\omega}{2\lambda}} x} \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{c\rho\omega}{2\lambda}} x\right)$$

Dabei fällt die Amplitude der Welle nach Durchlaufen der thermischen **Diffusionslänge** μ auf unter $1/e$ ab:

$$\mu = \sqrt{\frac{2\lambda}{c\rho\omega}}$$

Damit kann die Wellengleichung vereinfacht dargestellt werden zu:

$$T(x, t) = T_{Umgeb} + T_0 e^{-\frac{x}{\mu}} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\mu}\right)$$

Wärmeübergang und Wärmedurchgang

Wesentlich einfacher macht man es sich bei homogenen Medien mit glatten Flächen. Dann gilt für den **Wärmeenergiefluss** Q , dass dieser mittels der Größe der Wand A und eines linearen Proportionalitätskonstante α (**Wärmeübergangskoeffizient**) beschrieben werden kann.

Versuchsprotokolle

$$P := \frac{dQ}{dt}$$

$$P = \alpha \cdot A \cdot (T_{Pos_1} - T_{Pos_2})$$

Für Festkörper gilt ferner:

$$\alpha = \frac{\lambda}{d} = \Lambda \text{ (Wärmedurchlasskoeffizient)}$$

Durch Umstellen nach den Temperaturen, Summieren der nacheinander auftretenden Leitvorgänge erhält man den sogenannten **k- Wert**, ebenfalls ein Wärmeübergangskoeffizienten, als die Reziprogensumme aus den **Wärmeübergangswiderständen $1/\alpha$** :

$$k = \frac{1}{\sum \frac{1}{\alpha_n}}$$

$$P = k \cdot A \cdot \Delta T$$

Es gilt: Je kleiner der k- Wert ist, desto besser dämmt der Stoff.

Statisches und dynamisches Messverfahren

Nun kann man zur Ermittlung der Wärmeleitfähigkeit eines Stoffes zwei unterschiedliche Wege einschlagen: Man kann die mathematischen Eigenschaften der Wärmewelle (Phase und Amplitude) ausnutzen und misst dynamisch mit zeitlicher Änderung, oder man misst statisch direkt und wertet den Wärmedurchlasskoeffizienten aus.

Die Versuchsanordnung ist einmal in folgender Skizze recht gut veranschaulicht:

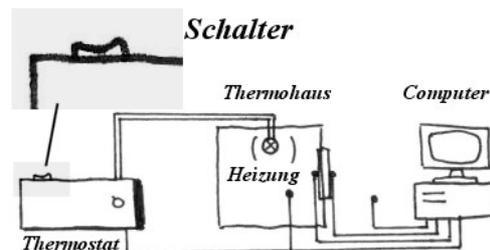


ABB. 1: Schematischer Aufbau des Versuchs „Thermohaus“. Wichtigstes Bedienelement ist der Schalter, deshalb ist er hier noch einmal vergrößert dargestellt.

Die Bedeutung des Ein- und Ausschalters kann nicht überbetont werden, da in der dynamischen Messmethode er das einzige Bauteil darstellt, welches vom Versuchsdurchführenden alle 5 Minuten einmal zu betätigen ist. Das Thermohaus besteht aus einer zentralen Wärmequelle (100 W Glühlampe mit Strahlungsschutz), Innenraumtemperaturmessfühler, vier Probewänden mit jeweils einem Sensor mit Innen- bzw. Außenkontakt zum Probematerial und einem Raumtemperaturfühler (außen). Diese Messwerte werden vom PC alle 10s selbständig aufgenommen. Das Thermostat regelt die Innentemperatur auf einen relativ konstanten Wert (was aber erst für die statische Messung relevant ist). Was in der Skizze vernachlässigt wurde sind diverse Freizeitbeschäftigungen (Bücher, Musik, Hausaufgaben), welchen während dem Rest der Zeit nachgegangen wird. Nach ungefähr anderthalb Stunden kommt dann ein wenig Handlung ins Spiel, denn dann wird die Messwertaufnahme am PC beendet und ausgewertet (dynamische Messmethode).

Anschließend wird das Thermohaus voll hoch geheizt, bis das Thermostat eingreift. Dann werden bei annähernd konstanter Innenraumtemperatur an allen zu detektierenden Stellen innerhalb einer oder zwei Minuten gemessen und anschließend ausgewertet (statisches Messverfahren).

Durchführung

Versuchsobjekt:

Thermohaus mit Thermostat, Heizung (100 W Glühlampe mit Strahlungsschirm) und vier zu untersuchenden Wänden (Metall $d=5\text{mm}$, Holz $d=20\text{mm}$, Styropor $d=20\text{mm}$, Glas $d=5\text{mm}$), Wärmesensoren (Kontaktelemente), Computer, Interface

mögliche systematische Fehler:

1. fragwürdiger Kontakt der Sensoren zu den Materialien
2. kontinuierliche Erwärmung des Raums
3. Fehler im Fittprogramm

Versuchsprotokolle

Versuchsablauf:

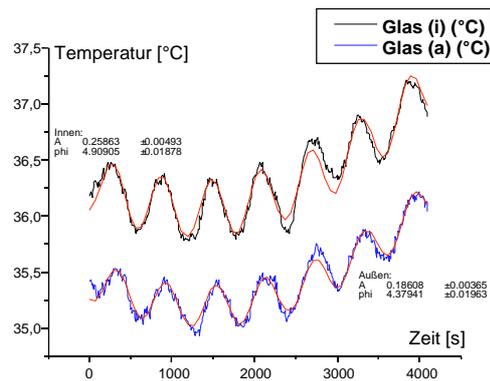
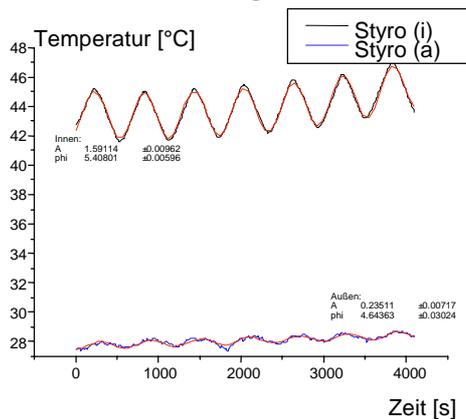
- Vorheizen, derweil' schon mal den Computer anmachen
- dynamische Messung
- statische Messung
- Auswertung der computergestützten Messwertaufnahme

Fehlerquellen:

$$\Delta\phi, \Delta T_0, \Delta T$$

Messwerte

Dynamische Messung



Für Metall und Holz konnten keine signifikanten Messwerte aufgenommen werden.

Statische Messung

Zeit	Glas (innen)	Glas (außen)	Styro (innen)	Styro (außen)	Holz (innen)	Holz (außen)	Metall (innen)	Metall (außen)	Luft (innen)	Luft (außen)
s	°C	°C	°C	°C	°C	°C	°C	°C	°C	°C
00:00:00	42,065	40,564	53,755	29,629	47,287	33,922	39,439	39,012	60,515	24,391
00:00:10	42,056	40,559	53,686	29,648	47,318	33,958	39,495	39,078	60,436	24,42
00:00:20	42,054	40,537	53,569	29,742	47,301	33,99	39,499	39,067	60,163	24,314
00:00:30	42,046	40,524	53,492	29,72	47,316	34,027	39,523	39,082	60,019	24,325
00:00:40	42,032	40,539	53,396	29,45	47,289	33,98	39,497	39,129	59,913	24,283
00:00:50	42,001	40,536	53,365	29,362	47,329	33,995	39,567	39,161	59,782	24,267
00:01:00	42,039	40,511	53,339	29,372	47,313	34,009	39,587	39,187	59,738	24,233
00:01:10	42,05	40,464	53,329	29,35	47,326	33,932	39,573	39,169	59,658	24,261
00:01:20	42,04	40,504	53,333	29,434	47,335	33,936	39,598	39,199	59,89	24,293
00:01:30	42,092	40,588	53,349	29,551	47,345	34,059	39,649	39,242	59,967	24,321

Die kompletten Messwerte sind im Anhang zu finden.

Auswertung

Dynamische Messung

$$T(x,t) = T_{Umgeb} + T_0 e^{-\frac{x}{\mu}} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\mu}\right)$$

Dem folgt auf der nächsten Seite:

Versuchsprotokolle

Berechnung mittels der Dämpfung:

$$A(x) = T_0 e^{-\frac{x}{\mu}}$$

$$\frac{A(d)}{A(0)} = \frac{T_0 e^{-\frac{d}{\mu}}}{T_0 e^{-0}} = \frac{1}{e^{\frac{d}{\mu}}}$$

$$\mu_{Dämpfung} = \frac{d}{\ln A(0) - \ln A(d)}$$

$$\Delta\mu_{Dämpfung} = \mu_{Dämpfung} \cdot \left(\frac{\Delta d}{d} + \frac{\frac{\Delta A(0)}{A(0)} + \frac{\Delta A(d)}{A(d)}}{\ln A(0) - \ln A(d)} \right)$$

$$\mu_{Styro} = 10,46 \pm 1,02 \text{ mm}$$

$$\mu_{Glas} = 15,19 \pm 2,10 \text{ mm}$$

...mittels der Phasenverschiebung:

$$\varphi(x) = \frac{x}{\mu}$$

$$\varphi(d) - \varphi(0) = \frac{d - 0}{\mu}$$

$$\mu_{Phase} = \frac{d}{\varphi(d) - \varphi(0)}$$

$$\Delta\mu_{Phase} = \mu_{Phase} \cdot \left(\frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta\varphi(d) + \Delta\varphi(0)}{\varphi(d) - \varphi(0)} \right)$$

$$\mu_{Styro} = 26,16 \pm 2,55 \text{ mm}$$

$$\mu_{Glas} = 9,44 \pm 2,57 \text{ mm}$$

$$\mu = \sqrt{\frac{2\lambda}{c\rho\omega}} = \sqrt{2 \frac{a}{\omega}}$$

$$a = \frac{\mu^2 \omega}{2}$$

$$\Delta a = a \cdot 2 \frac{\Delta\mu}{\mu}$$

(Der Fehler der Frequenz wird auf Grund der Geringheit vernachlässigt.)

$$a_{Styro} = 1,15 \pm 0,22 \frac{\text{mm}^2}{\text{s}}$$

$$a_{Styro} = 7,16 \pm 1,40 \frac{\text{mm}^2}{\text{s}}$$

$$a_{Glas} = 2,41 \pm 0,67 \frac{\text{mm}^2}{\text{s}}$$

$$a_{Glas} = 0,93 \pm 0,51 \frac{\text{mm}^2}{\text{s}}$$

Statische Messung

$$\alpha = 8,1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$$

$$\lambda = \alpha d \frac{T_{L_a} - T_{W_a}}{T_{W_i} - T_{W_a}}$$

$$\Delta\lambda = \lambda \cdot \left(\frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta T_{L_a} + \Delta T_{W_a}}{T_{L_a} - T_{W_a}} + \frac{\Delta T_{W_i} + \Delta T_{W_a}}{T_{W_i} - T_{W_a}} \right)$$

Zeit	Glas (innen)	Glas (außen)	Styro (innen)	Styro (außen)	Holz (innen)	Holz (außen)	Metall (innen)	Metall (außen)	Luft (innen)	Luft (außen)
s	°C	°C	°C	°C	°C	°C	°C	°C	°C	°C
Mittel	42,047	40,533	53,461	29,526	47,316	33,981	39,543	39,133	60,008	24,311
ΔT	0,0455	0,062	0,213	0,196	0,029	0,0685	0,105	0,115	0,4285	0,0935
Dicke [mm]	5		20		20		5			
λ [W/mK]	0,47444386		0,19729685		0,27947582		1,50462439			
$\Delta\lambda$	0,13312406		0,02418877		0,02069922		1,12944975			

Versuchsprotokolle

Berechnung des Einfamilienhauses

Gegeben:

$$A_{\text{Grund}} = 120\text{m}^2 \approx 121\text{m}^2 = 11^2\text{m}^2$$

$$k_{\text{Wand}} \approx 0,5$$

$$h = 2 \cdot 2,2\text{m} = 4,4\text{m}$$

$$\Delta T = (20 - 5)^\circ\text{C} = 15^\circ\text{C}$$

Lösung:

Die Wärmeabstrahlung in den Boden wird vernachlässigt. Ferner soll das Haus ein Flachdach besitzen.

$$P = k \cdot A \cdot \Delta T = 0,5 \cdot (4 \cdot 11\text{m} \cdot 4,4\text{m} + 121\text{m}^2) \cdot 15^\circ\text{C} = \frac{dQ}{dt} = \frac{dW}{dt} = P_{\text{th}} = 2359,5 \approx 2360\text{W}$$

Ergebnisse

Dynamische Messung

Berechnung mittels der Dämpfung:

$$a_{\text{Styro}} = 1,15 \pm 0,22 \frac{\text{mm}^2}{\text{s}}$$

$$a_{\text{Glas}} = 2,41 \pm 0,67 \frac{\text{mm}^2}{\text{s}}$$

...mittels der Phasenverschiebung:

$$a_{\text{Styro}} = 7,16 \pm 1,40 \frac{\text{mm}^2}{\text{s}}$$

$$a_{\text{Glas}} = 0,93 \pm 0,51 \frac{\text{mm}^2}{\text{s}}$$

Statische Messung

Zeit	Glas	Styro	Holz	Metall
λ [W/mK]	0,47444386	0,19729685	0,27947582	1,50462439
$\pm \Delta \lambda$	$\pm 0,13312406$	$\pm 0,02418877$	$\pm 0,02069922$	$\pm 1,12944975$

Heizleistungsabschätzung

$$P_{\text{th}} \approx 2360\text{W}$$

Diskussion

Eine bissige Bemerkung zum Versuch und dessen Ergebnissen vorab: Dieser Versuch hat alles, was einen guten Thermodynamikversuch ausmacht: Er ist langweilig in der Durchführung, Unhandlich in der Fehlerrechnung und vollkommen unzuverlässig in den Ergebnissen. Das sieht man wohl sehr deutlich an den Werten bei der dynamischen Messung. Nicht nur, dass eine Auswertung sich nur bei Styropor und Glas lohnte (Holz ist mit einer Dicke von 20mm ein zu schlechter Wärmeleiter, Metall ein zu großer Wärmespeicher), auch die Werte schwanken um bis zu dem Faktor 6 (!) nur auf Grund der verschiedenen Auswertungsmethoden. Gründe dafür sind wohl in den Kontaktelementen zu suchen, die die Temperatur sowohl von der Oberfläche, als auch von der Umwelt aufnehmen und zwischen denen und der Oberfläche sich möglicherweise immer noch ein gewisser (wenn auch kleiner) Luftfilm liegt.

Auffällig auch, dass die Fehlerintervalle der Statischen Messung beinahe 100% erreichen, was nicht unbedingt auf eine sichere Aussage der Messung schließen lassen kann.

In so fern, ist die Aussage der Ergebnisse des Versuchs generell quantitativ zweifelhaft, qualitativ konnte die Existenz von Termowellen, welche Dämpfung und Phasenverschiebung besitzen, nachgewiesen werden und die Temperaturleitfähigkeit von den vier Stoffen bestimmt werden.

In sofern: Wenigstens etwas...

Die Messwerte sind im Anhang zu finden.

Jena, 19.06.2002

