Versuch 124

Longitudinal schwingende Zylinderstäbe

Aufgaben

1. Aufnehmen der Resonanzkurve der 1. Ordnung von 2 dünnen Stäben. Bestimmen
   a) Periodendauer der Resonanzschwingung
   b) Schallgeschwindigkeit des Materials
   c) Elastizitäts- Modul
   d) Bandbreite und Güte des Resonators
   e) dynamische Viskosität
2. Messen der Resonanzperiodendauer eines dicken Stahlstabes der 1 bis 6 Ordnung. Bestimmen der folgenden Größen:
   a) Schallgeschwindigkeit
   b) Elastizitäts- Modul
   c) Torosions- Modul

Vorbereitung

Schwingungsgleichung

Für eine Schwingungsgleichung beliebiger Art wählt man den folgenden Ansatz:

$$\ddot{u}(t) + \beta\dot{u}(t) + \varpi_0^{\;2} u(t) = F(t),$$

wobei β eine geschwindigkeitsabhängige Reibung und ω_0 die Eigenkreisfrequenz ist. Die Lösung dieser Dgl. lautet

$$u(t) = U(\varpi)e^{i\varpi t}$$

und ist gelöst, wenn man z.B. eine zeitlich periodische Kraft F annimmt, die in das System von außen eingreift,

$$F(t) = Fe^{i\varpi t}$$

Also führt die Variation der Konstante $U(\omega)$ zu dem Ergebnis:

$$U(\varpi) = \frac{F}{\varpi_0^{\;2} - \varpi^2 + i\varpi\beta}$$

Nimmt man ferner an, dass die Dämpfung nicht allzu stark ist, so ist $\varpi_0 \approx \varpi$, und damit

$$U(\varpi) = \frac{F}{\varpi_0\left[2(\varpi - \varpi_0) + i\beta\right]},\ \left|U(\varpi)\right| = \frac{F}{\varpi_0\sqrt{4(\varpi - \varpi_0)^2 - \beta^2}}$$

Bandbreite und Güte

Setzt man für ω

$$\varpi_1 = \varpi_0 - \frac{\beta}{2}, \varpi_2 = \varpi_0 + \frac{\beta}{2},$$

so ergibt sich

$$\left|U(\varpi_{1,2})\right| = \frac{F}{\varpi_0\sqrt{4\left(\varpi_0 \pm \frac{\beta}{2} - \varpi_0\right)^2 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}U(\varpi_0)$$

Also ist die Schwingung bei ± β /2 auf den Effektivwert der Resonanzschwingung abgeklungen. Daher nennt man β auch die Bandbreite. Mit dieser ist die Güte Q definiert:

$$Q = \frac{\varpi_0}{\Delta\varpi_{\sqrt{2}^{-1}}} = \frac{\varpi}{\beta}$$

Dynamische Viskosität

In Analogie zu Reibungen in Flüssigkeiten definiert man auch für Feststoffe eine Viskosität

$$\eta = \frac{E}{Q\varpi_0}.$$

Akustik dünner Stäbe

In Festkörpern gilt

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \lambda \cdot f\,,$$

wobei E der Elastizitätsmodul ist.

$$\Delta l = \frac{l}{E} \cdot \frac{F}{A}$$

Es bilden sich lt. der Wellentheorie an losen Enden Reflektionen, die dann zu konstruktiver Interferenz der Schallwellen führt, wenn

$$l = \frac{n}{2}\lambda$$

$$\lambda = \frac{2}{n} l = \frac{c}{f} = c \cdot T$$

$$T = \frac{2l}{n \cdot c} = \frac{2l}{n} \cdot \sqrt{\frac{\rho}{E}}$$

Setzt man nun noch die Dichte eines runden Stabes ein, also

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{4m}{\pi l \cdot d^2}\,,$$

dann erhält man für den E- Modul

$$E = \frac{16m \cdot l}{\pi (d \cdot nT)^2}.$$

Dicke Stäbe

Bei dicken Stäben ist die Reibung größer und man muss beachten, dass die Resonanzperiodendauern mit einem quadratischen Korrekturfaktor behaftet sind

$$T_{dick} = T_{dünn}\left[1 + \left(\frac{\mu\pi n d}{4l}\right)^2\right].$$

Dabei ist μ die Poisonzahl, der Quotient aus Querkontraktion zu Längendehnung, des verwendeten Materials:

$$\mu = \frac{2\Delta d}{d} \cdot \frac{l}{\Delta l} = \frac{\varepsilon_D}{\varepsilon_L}$$

Letzten Endes kann man mit diesem Wissen alle weiteren mechanischen Verformungsmodule errechnen: den Schermodul G und den Kontraktionsmodul K.

$$G = \frac{E}{2(\mu + 1)}$$

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}$$

	c [ms^{-1}]	ρ [10^3 kg m^{-3}]	μ	E [GPa]	G [GPa]	K [GPa]
Aluminium	5100	2,698	0,34	73	26	71,6
Messing	3300	8,1... 8,6	0,35	103	42	100
Stahl (Feder)	5000	6,6... 8,0	0,29	220	85	53
Stahl (St37)			0,29	206	81	167

Durchführung

Versuchsobjekte

Experimetieranordnung (siehe Blockschaltbild), verschiedene Metallstäbe (siehe Messwertaufnahme)

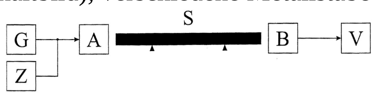

ABB 1: Blockschaltbild des Versuches (G- Generator mit Z- Zeitgeber, A- Lautsprecher, B- Empfänger, V- Voltmeter)

erwartete Ergebnisse

- n^2- Abhängigkeit der T_{dick}- Ergebnisse
- Proportionalitäten gemäß der Gleichung in der Vorbetrachtung
- vgl. mit angegebenen Tabellenwerten

mögliche systematische Fehler

- Ungenaue Kalibrierung (Stößel nicht exakt zentriert)
- Stab liegt nicht in den Viertelpunkten auf ➔ unbeabsichtigte Durchbiegung

Versuchsablauf

- Aufnahme derResonanzkurve der dünnen Stäbe
- Messen der Resonanzperiodendauer des dicken Stahlstabes

Fehlerquellen

$$\Delta T, \Delta U, \Delta m, \Delta l, \Delta d$$

Messwerte

Aluminiumstab

$$d = 7{,}99 \pm 0{,}01 mm, l = 749{,}7 \pm 0{,}2 mm, m = 105{,}1 \pm 0{,}1 g$$

Messspannung: U_{mess}=3mV

T [µs]	U [mV]
290,877	0,4
290,962	0,5
291,017	0,6
291,047	0,7
291,071	0,8
291,085	0,9
291,099	1
291,115	1,1
291,125	1,2
291,159	1,5
291,17	1,6
291,176	1,7

T [µs]	U [mV]
291,193	1,8
291,203	1,8
291,225	1,7
291,23	1,6
291,24	1,5
291,265	1,2
291,288	1
291,303	0,9
291,325	0,8
291,351	0,7
291,416	0,6
291,869	0,5

Messingstab

$$d = 9{,}67 \pm 0{,}01 mm, l = 749{,}7 \pm 0{,}2 mm, m = 492{,}1 \pm 0{,}1 g$$

Messspannung: U_{mess}=2mV

T [µs]	U [mV]
424,775	0,3
424,794	0,4
424,808	0,5
424,816	0,6
424,827	0,7
424,833	0,8
424,847	0,92

T [µs]	U [mV]
424,864	0,8
424,872	0,7
424,877	0,6
424,885	0,5
424,895	0,4
424,919	0,3

Stahlstab 124B

$$d = 19{,}94 \pm 0{,}01 mm, l = 748{,}8 \pm 0{,}2 mm, m = 1822 \pm 1 g$$

n	T [µs]
1	289,551
2	145,206
3	96,867
4	72,672
5	58,159
6	48,466

Auswertung

Dünne Stäbe

Berechnung der Schallgeschwindigkeit

$$c = 2 \cdot l \cdot f_{res}$$

$$\Delta c = c \cdot \left(\frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta f_{res}}{f_{res}} \right)$$

Berechnung der Díchte

$$\rho = \frac{4m}{\pi \cdot l \cdot d^2}$$

$$\Delta\rho = \rho \cdot \left(\frac{\Delta l}{l} + 2\frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta m}{m} \right)$$

Berechnung des Elastizitätsmoduls

$$E = \rho \cdot c^2$$

$$\Delta E = E \cdot \left(\frac{\Delta\rho}{\rho} + 2\frac{\Delta c}{c} \right)$$

Berechnung der Güte

$$Q = \frac{\varpi_{res}}{\beta}$$

$$\Delta Q = Q \cdot \left(\frac{\Delta\varpi_{res}}{\varpi_{res}} + \frac{\Delta\beta}{\beta} \right)$$

Berechnung der Viskosität

$$\eta = \frac{E}{Q\varpi_{res}}$$

$$\Delta\eta = \eta \cdot \left(\frac{\Delta E}{E} + \frac{\Delta Q}{Q} + \frac{\Delta f_{res}}{f_{res}} \right)$$

Dicke Stäbe

Berechnung der Schallgeschwindigkeit

$$c = 2 \cdot l \cdot \frac{1}{\hat{T}_{res}}$$

$$\Delta c = c \cdot \left(\frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta\hat{T}_{res}}{\hat{T}_{res}} \right)$$

Berechnung der Díchte

$$\rho = \frac{4m}{\pi \cdot l \cdot d^2}$$

$$\Delta\rho = \rho \cdot \left(\frac{\Delta l}{l} + 2\frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta m}{m} \right)$$

Berechnung des Elastizitätsmoduls

$$E = \rho \cdot c^2$$

$$\Delta E = E \cdot \left(\frac{\Delta\rho}{\rho} + 2\frac{\Delta c}{c} \right)$$

Berechnung der Poisonzahl

$$\mu = \frac{4l}{\pi d}\sqrt{\frac{B}{A}}$$

$$\Delta\mu = \mu \cdot \left(\frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta A}{2 \cdot A} + \frac{\Delta B}{2 \cdot B} \right)$$

Berechnung der G- und K- Module

$$G = \frac{E}{2(\mu+1)}; \Delta G = G \cdot \left(\frac{\Delta E}{E} + \frac{\Delta\mu + 1}{\mu + 1} \right)$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)}; \Delta K = K \cdot \left(\frac{\Delta E}{E} + \frac{1 - 2\Delta\mu}{1 - 2\mu} \right)$$

Darstellung

Dünne Stäbe

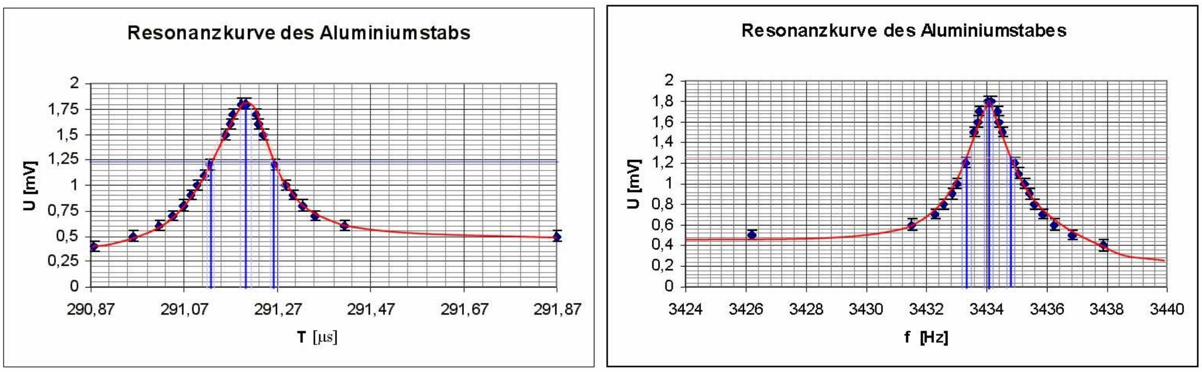

ABB II.1: Darstellung der Resonanzkurve über den Periodendauern (links) bzw. der Frequenz (rechts) bei dem Aluminiumstab.

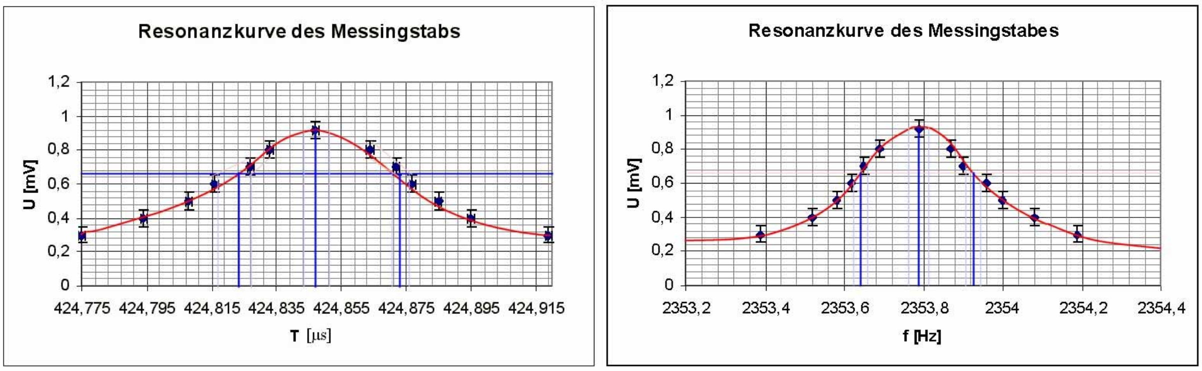

ABB II.2: Darstellung der Resonanzkurve über den Periodendauern (links) bzw. der Frequenz (rechts) bei dem Messingstab.

Aluminiumstab

aus der Darstellung gewonnen:

$$T_{res} = (291{,}20 \pm 0{,}01)\mu s$$
$$\varpi_{res} = 2\pi(3434{,}05 \pm 0{,}15)Hz$$
$$\beta = 2\pi(1{,}46 \pm 0{,}30)Hz$$

$$c = (5149{,}00 \pm 1{,}60)\frac{m}{s}$$
$$\rho_{Aluminium} = (2{,}79 \pm 0{,}01)\frac{g}{cm^3}$$
$$E = (73{,}96 \pm 0{,}31)\cdot 10^9 \frac{N}{m^2}$$
$$Q = (2352{,}09 \pm 483{,}41)$$
$$\eta = (9{,}16 \pm 1{,}92)\cdot 10^3 \frac{Ns}{m^2}$$

Messingstab

aus der Darstellung gewonnen:

$$T_{res} = (424{,}96 \pm 0{,}04)\mu s$$
$$\varpi_{res} = 2\pi(2353{,}79 \pm 0{,}03)Hz$$
$$\beta = 2\pi(0{,}29 \pm 0{,}04)Hz$$

$$c = (3529{,}27 \pm 1{,}00)\frac{m}{s}$$
$$\rho_{Messing} = (8{,}90 \pm 0{,}02)\frac{g}{cm^3}$$
$$E = (110{,}86 \pm 0{,}31)\cdot 10^9 \frac{N}{m^2}$$
$$Q = (8116{,}51 \pm 1119{,}62)$$
$$\eta = (923{,}54 \pm 129{,}99)\frac{Ns}{m^2}$$

Dicker Stab

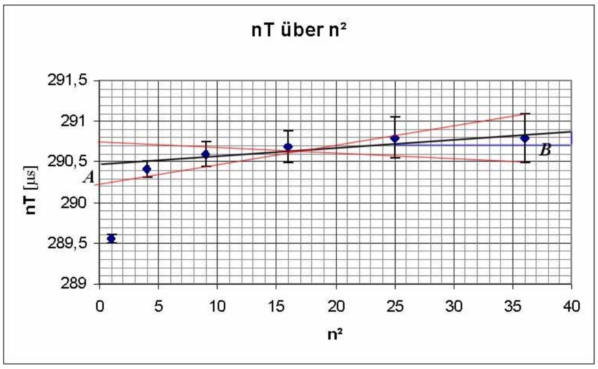

ABB II.3: Darstellung des Produktes aus Periodendauer und Resonanzordnung. Der Wert der 1. Ordnung fällt aus der Schar sichtlich heraus, vermutlich auf Grund von Messungenauigkeiten im Rosonanzplateau- Bereich.

Aus der Darstellung entnommen:

$$A = \hat{T}_{res} = (290{,}45 \pm 0{,}24)\mu s$$
$$B = (0{,}0097 \pm 0{,}0083)\mu s$$

$$c = (5156{,}14 \pm 5{,}64)\frac{m}{s}$$

$$\rho_{Stahl} = (7{,}79 \pm 0{,}01)\frac{g}{cm^3}$$

$$E = (207{,}10 \pm 0{,}72) \cdot 10^9 \frac{N}{m^2}$$

$$\mu = (0{,}30 \pm 0{,}14)$$

$$G = (79{,}65 \pm 70{,}74) \cdot 10^9 \frac{N}{m^2}$$

$$K = (172{,}58 \pm 302{,}62) \cdot 10^9 \frac{N}{m^2}$$

Diskussion

Die Diskussion zu diesem Versuch ist verständlicher Weise sehr kurz gehalten:
Die ermittelten Werte liegen in der Nähe der Erwarteten, Abweichungen von diesen (Tabellen-) Werten sind u.a. dadurch erklärbar, dass möglicher Weise die Zusammensetzung der verwendeten Legierungen der in den Tabellen beschriebenen und der im Versuch verwendeten Materialien nicht exakt die Selbe ist oder die Raumtemperatur nicht 20°C, für welche die Tabellenwerte aufgestellt sind, zum Zeitpunkt des Versuches gewesen war.
Durch die Extrapolation und die Bestimmung der Poisonzahl über graphische Auswertung sind Fehler in ungeheuren Größenodnungen entstanden, welche in Anbetracht des Ergebnisses natürlich hätten geringer angenommen werden können, was jedoch die Auswertungsmethodik nicht zuließ. Eine andere, bessere und genauere, Auswertungsmethodik wäre als sinnvoll zu erachten.

Jena, 01.12.2002