

Versuch 121

## Akustische Hohlraumschwingungen

### Aufgaben

1. Durchführung einer Fourieranalyse verschiedener, frei wählbarer Funktionen
2. Registrieren der Hohlraumschwingungen in einem leeren Rundkolbenglas. Bestimmen des Fourierspektrums bei unterschiedlichen Datenraten
3. Untersuchen der akustischen Dämpfung und Abschätzung der Resonatorgüte dieses modifiziertem Systems
4. Messen der Hohlraumresonanzfrequenzen unterschiedlicher Volumina

### Vorbereitung

#### Schallschwingungen

Für Schallschwingungen gilt:

$$c = \sqrt{\frac{1}{\gamma \cdot \rho_0}} = \lambda \cdot f,$$

wobei  $\gamma$  die Kompressibilität und  $\rho_0$  die mittlere Dichte des Mediums ist.

Dabei gilt aber die Grundgleichung der ablaufenden adiabatischen Zustandsänderungen

$$\frac{p_1}{p_2} = \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^\kappa$$

Für die Kompressibilität folgt deshalb:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{c^2 \cdot \rho_0} = -\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dp} \\ &= \frac{1}{\kappa \cdot p_0} \end{aligned}$$

$$\text{mit } \kappa = \frac{C_p}{C_v}$$

#### Hohlraumschwingung

Hat man nun ein Gefäß mit nur einer, wohl definierten Öffnung, so kann man davon ausgehen, dass die akustischen Schwingungen in dem Gefäß nur durch die Oszillation der Gasesmenge im Flaschenhals (die man annähernd als starr betrachtet) angeregt werden. Somit kann man ein Vergleich mit einem harmonischen Federschwinger unter Anregung heranziehen.

Es gilt also:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{wobei } k = \frac{dF}{dl}$$

Die Kraft, bzw. das  $k$  wird durch eine adiabatische Zustandsänderung des eingeschlossenen Gases bestimmt. Die Gleichung lautet:

$$\gamma = \frac{1}{\kappa \cdot p_0} = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp}$$

Also löst eine infinitesimale Verschiebung der starren Gasmasse im Gefäßhals einen infinitesimalen Druck- und Volumenänderung aus:

$$dp = \frac{dF}{A} \quad \text{und} \quad dV = -Ad \cdot l$$

**Versuchsprotokolle**

Es ergibt sich

$$\frac{dF}{dl} = k = \frac{p_0 \kappa A^2}{V}, \text{ und mit } m \text{ als Masse des Gases im Gefäßhalses } m = A \cdot l \cdot \rho_0 :$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{dF}{mdl}} = \sqrt{\frac{p_0 \kappa A^2}{Vm}} = \sqrt{\frac{p_0 \kappa}{\rho_0} \cdot \frac{A}{Vl}} = c \sqrt{\frac{A}{Vl}}$$

Hinzu kommt noch eine Mündungskorrektur, die zu der Länge hinzu zu addieren ist.

$$f = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{A}{V \cdot \left( l + \pi \frac{R}{2} \right)}}$$

Wie man sehen kann, ist also das Frequenzspektrum unabhängig von der Form des Gefäßes, sondern hängt nur vom beinhalteten Volumen, Halslänge und -öffnung ab.

**Sampling- Theorem**

Liegen die aufgenommenen Messwerte nur in einzelnen Punkten vor, so muss bei der Aufnahme auf die Erfüllbarkeit des Sampling- Theorems geachtet werden. Dieses besagt:

$$f_{\text{Messapparatur}} \geq 2 \cdot f_{\text{Messwert}}$$

Nur unter dieser Bedingung kann das Ergebnis auswertbar sein. Jedoch stellt diese untere Schranke kein Garant dar, dass es dies in jedem all dann auch ist. Um deshalb Messungenauigkeiten in Frequenz und Amplitude zu umgehen, sollte man mehr als 2 Messwerte pro Periode aufnehmen: 10 Messpunkte, z.B. ist eine gute Auswertungsgrundlage.

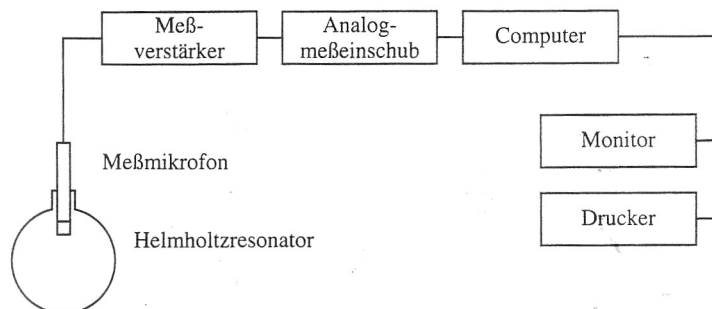
**Fourieranalyse**

Warum das Ganze? Ziel ist es, eine Übersicht über das in der Schwingung enthaltene Frequenzspektrum zu erhalten. Diese wird uns durch die Mittel der Mathematik, der Fourieranalyse, geliefert:

$$A(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} A(f) \cdot e^{-i2\pi \cdot ft} df \qquad A(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} A(t) \cdot e^{i2\pi \cdot ft} dt$$

**Versuchsaufbau**

Der Versuch gliedert sich in drei Teile: Zum einen den Resonator selbst mit der Aufnahmeeinheit (Kondensator-Mikrofon), der Verstärkereinheit und der Verarbeitungseinheit (Computer), die die Analyse des eingehenden Frequenzspektrums vornimmt.



**Bemerkungen zum Messverfahren**

Da der Computer nur 2048 Messpunkte verarbeitet, gibt es außer der oberen Beschränkung (Sampling- Theorem) auch eine untere Grenze, nämlich

$$\frac{f_{\text{Messapparatur}}}{2} > f_{\text{Messwert}} > \frac{f_{\text{Messapparatur}}}{2048}$$

Darunter misst man nur noch die Oberschwingungen des aufgezeichneten Signals, jedoch nicht mehr das Signal selbst.

## Versuchsprotokolle

---

### **Durchführung**

#### **Versuchsobjekte**

Helmholzresonator Glaskolben, (NW: 1000ml; Flaschen, NW: 750ml), Versuchsapparatur (siehe oben), Dämpfungsmaterialien (Papier, Schaum), Wasser zur Volumenmanipulation, Druckpapier

#### **erwartete Ergebnisse**

- Formunabhängigkeit des Frequenzspektrums
- Proportionalitäten gemäß der Gleichung in der Vorbetrachtung
- Verschiebung der Resonanzfrequenz in kleiner Frequenzbereiche bei Dämpfung (gemäß der Kenntnis über gedämpfte Federschwingung)

#### **mögliche systematische Fehler**

- Ungünstige akustisches Hintergrundrauschen

#### **Versuchsablauf**

- Durchführen der Fourieranalyse bei diversen theoretischen Funktionen
- Messen des Helmholzresonators bei unterschiedlichen Messfrequenzen
- Messen des Helmholzresonators bei Dämpfung
- Messen des Helmholzresonators bei unterschiedlichen Volumina
- Und zum fröhlichen Ausklang: Vermessen von formungleichen Resonatoren (Wein und Sektflaschen)

#### **Fehlerquellen**

$$\Delta f$$

### **Messwerte**

Für mehr Details bitte unter dem Punkt „Darstellung“ nachsehen.

#### **Frequenzspektrum bei unterschiedlichen Messfrequenzen**

$f_{MB}$ [kHz]	$f_{MW}$ [kHz]	$\Delta f_{MW}$ [kHz]
0,3	nicht messbar	
1	0,18	0,001
3	0,18	0,003
10	0,19	0,008
30	0,246	0,053

#### **Frequenzspektrum bei Dämpfung**

Dämpfung (Material)	$f_{MB}$ [kHz]	$f_{MW}$ [kHz]	Bandwidth [kHz]	$\Delta f$ [kHz]
Schaum	1	0,126	0,020	0,0018
Papier	3	0,131	0,045	0,0054

#### **Frequenzspektrum bei verschiedenen Volumina**

V [cm] <sup>3</sup>	$f_{MB}$ [kHz]	$\Delta f$ [kHz]
100	0,576	0,0026
150	0,4875	0,0026
350	0,3214	0,0026
600	0,2568	0,0026
850	0,2082	0,0026
1100	0,18	0,0026

#### **Frequenzspektrum formungleicher Körper**

$$f_{Wein}=0,0166\text{kHz}$$

$$f_{Sekt}=0,1154\text{kHz}$$

$$\Delta f=0,1018\text{kHz}$$

**Versuchsprotokolle**

**Auswertung**

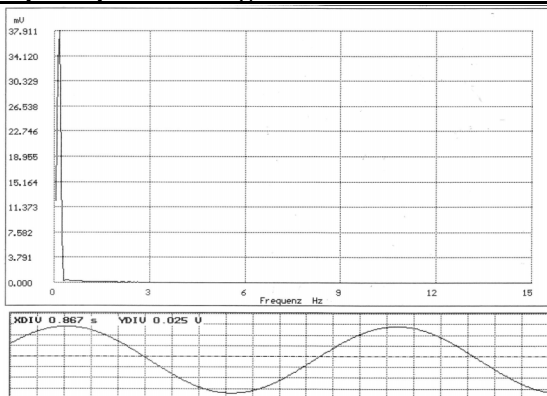
**Frequenzspektrum bei Dämpfung**

Berechnung der Güte: 
$$Q = \frac{f}{\Delta f_{bandwidth}}, \Delta Q = Q \cdot \left( \frac{\Delta f}{f} + \frac{2\Delta f}{f_{bandwidth}} \right)$$

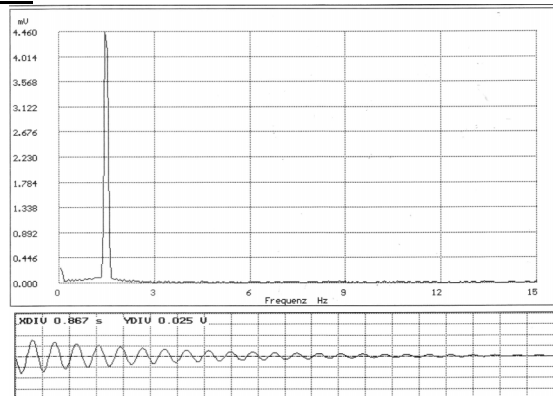
Dämmung (Material)	$f_{MB}$ [kHz]	$f_{MW}$ [kHz]	Bandwidth [kHz]	$\Delta f$ [kHz]	$Q$	$\Delta Q$
Schaum	1	0,126	0,020	0,0018	6,30	1,22
Papier	3	0,131	0,045	0,0054	2,91	0,82

**Darstellung**

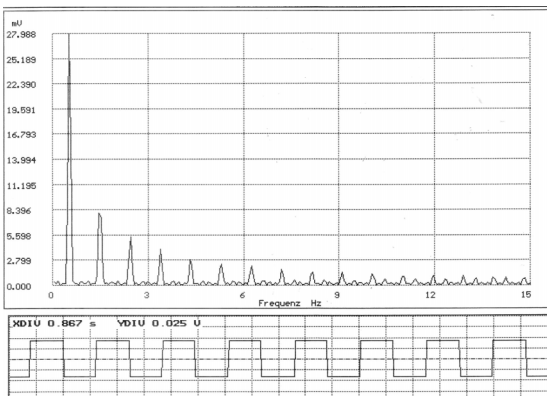
**Frequenzspektrum ausgewählter theoretischer Funktionen**



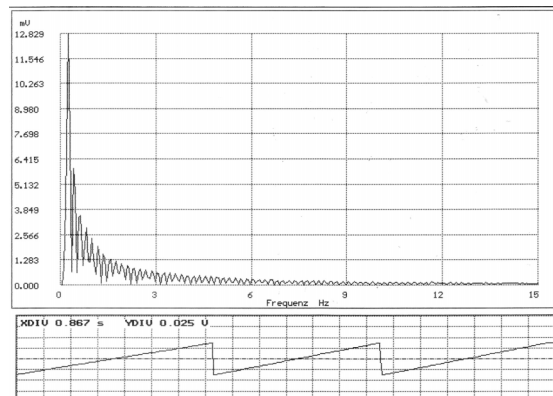
Frequenzspektrum einer Sinuskurve



Frequenzspektrum einer gedämpften Sinusschwingung

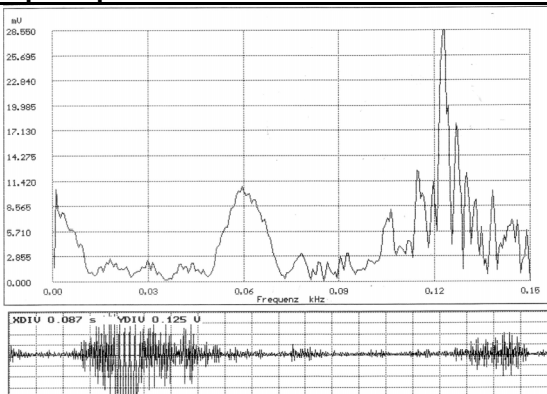


Frequenzspektrum einer Rechteckschwingung

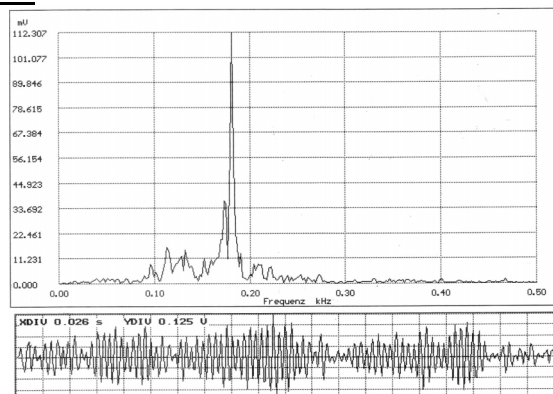


Frequenzspektrum eines Spannungsintegrators

**Frequenzspektrum bei unterschiedlichen Messfrequenzen**

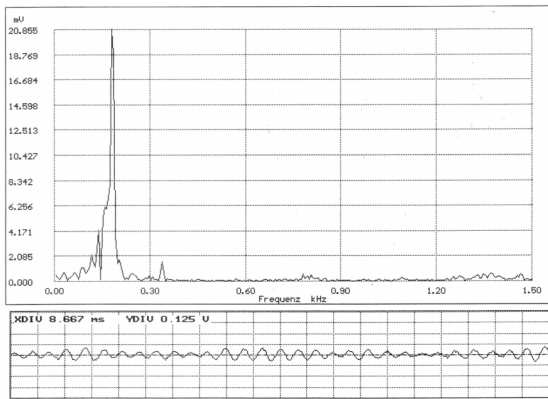


Aufgenommenes Frequenzspektrum bei 300 Hz, das Sampling-Theorem ist hier verletzt!

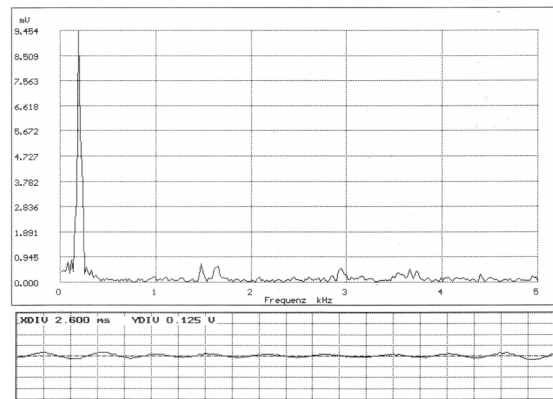


Aufgenommenes Frequenzspektrum bei 1 kHz

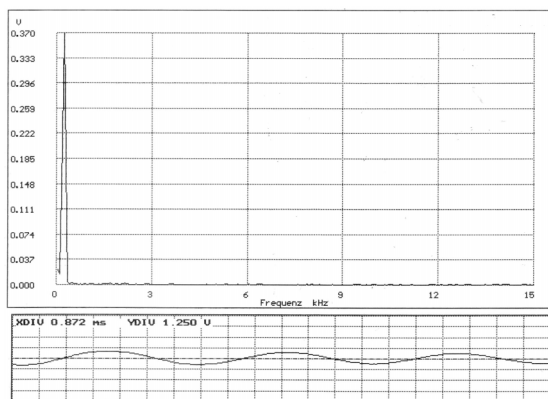
Versuchsprotokolle



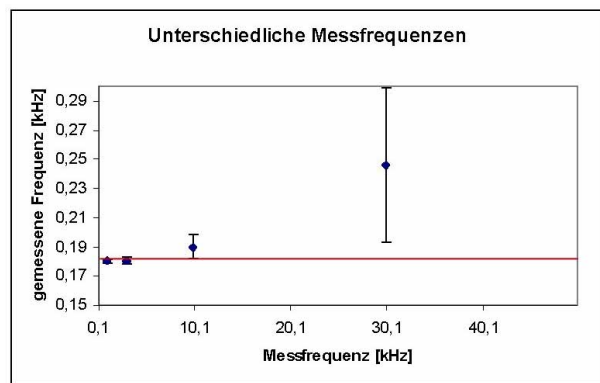
Aufgenommenes Frequenzspektrum bei 3 kHz



Aufgenommenes Frequenzspektrum bei 10 kHz

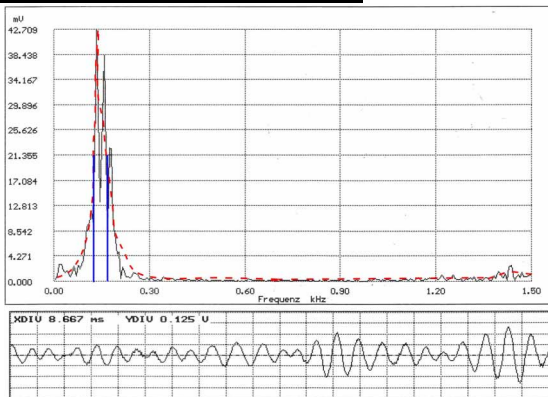


Aufgenommenes Frequenzspektrum bei 30 kHz,  
die obere Schranke ist hier grob verletzt

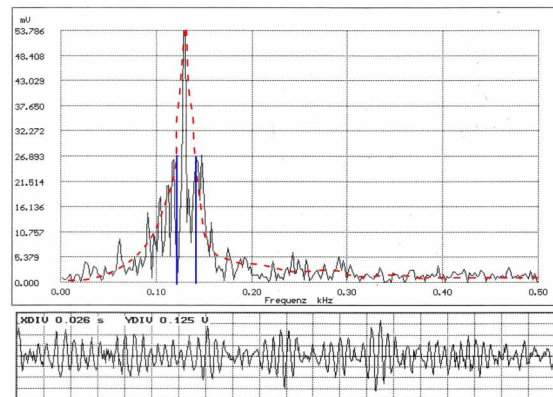


Übersicht der ermittelten Frequenzen inkl.  
deren Messgenauigkeit

**Frequenzspektrum bei Dämpfung**



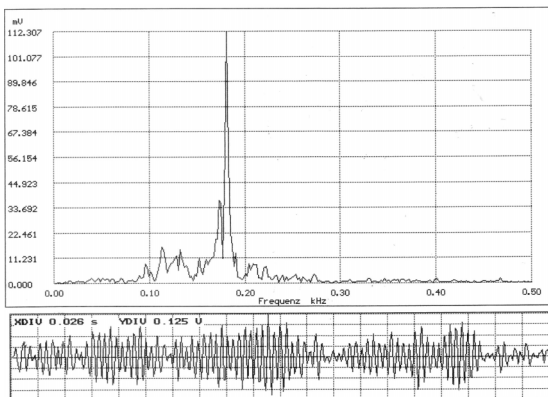
Papierdämpfung, gemessen mit 3 kHz



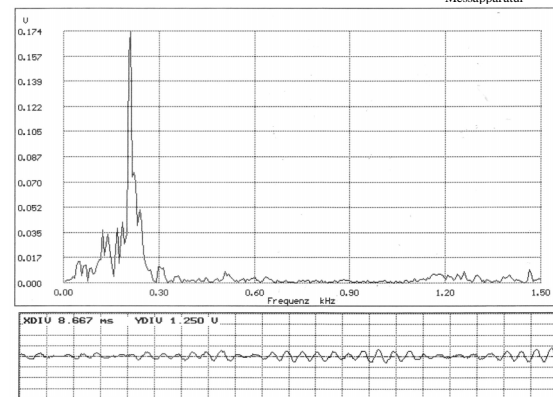
Schaumdämpfung, gemessen mit 1 kHz

**Frequenzspektrum bei verschiedenen Volumina**

Gemessen mit  $f_{\text{Messapparatur}} = 3\text{kHz}$

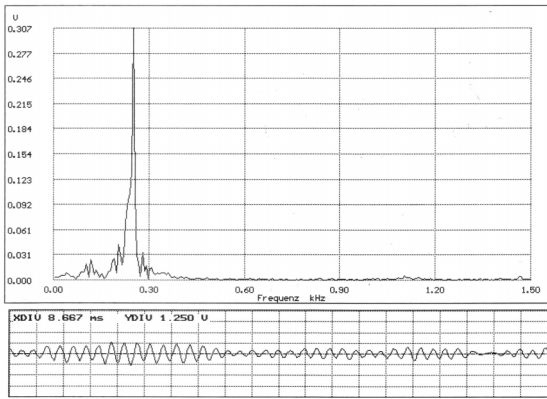


Frequenzspektrum bei vollen Volumen ( $V=1100\text{ml}$ )

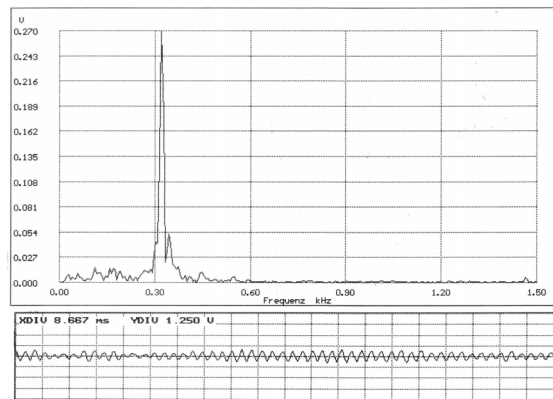


Frequenzspektrum bei  $V=850\text{ml}$

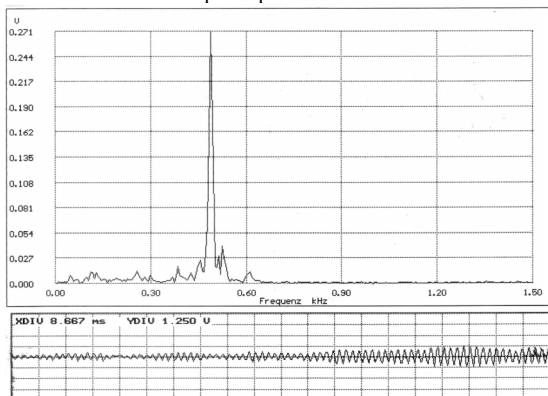
Versuchsprotokolle



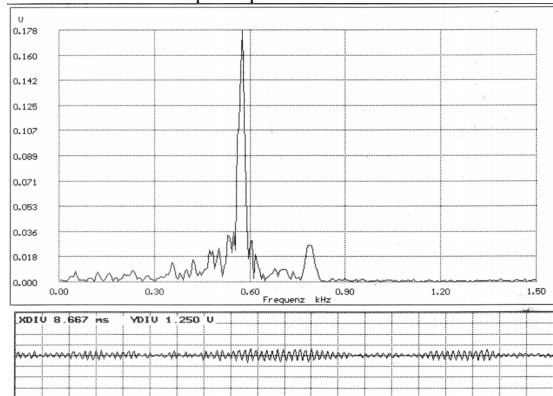
Frequenzspektrum bei V=600ml



Frequenzspektrum V=350ml

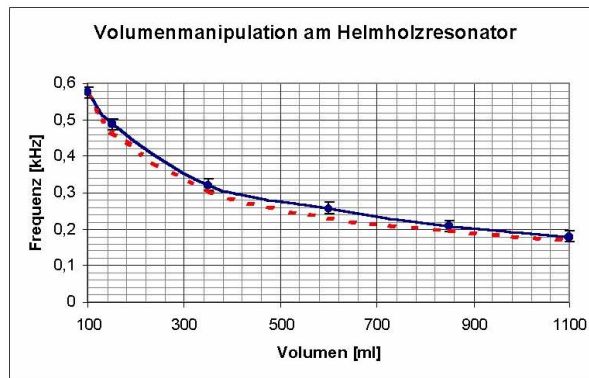


Frequenzspektrum bei V=150ml



Frequenzspektrum bei V=100ml

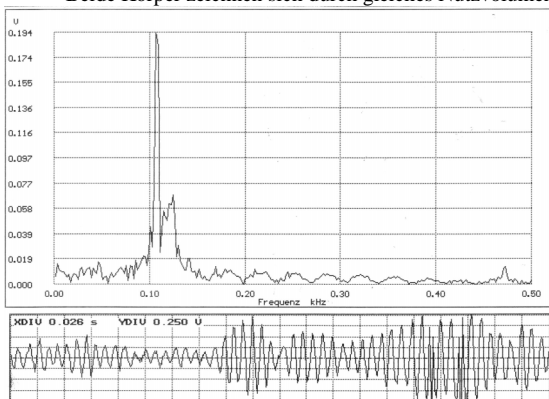
Übersicht



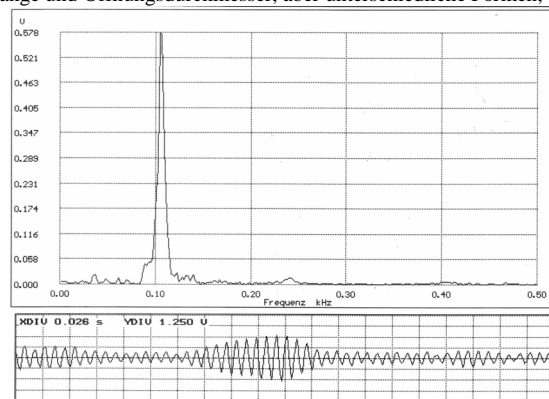
Der Verlauf zeigt im Vergleich zur angelegten theoretischen Kurve den erwarteten  $\frac{1}{\sqrt{V}}$  -Verlauf

**Frequenzspektrum formungleicher Körper**

Beide Körper zeichnen sich durch gleiches Nutzvolumen, Halslänge und Öffnungsdurchmesser, aber unterschiedliche Formen, aus.



Frequenzspektrum einer bauchigen Weinflasche,  
Nenninhalt: 750 ml „Teuberfranken“ (14,0%), 1993  
Winzergemeinschaft Teuber, Oberbayern,  
mit bacchuslauniger Freude gemessen mit 1 kHz



Frequenzspektrum einer geleerten Sektflasche,  
Nenninhalt: 750 ml „Rotkäppchen“ (11,0% vol),  
hergestellt im nahegelegenen Freiburg,  
gemessen bei einer Arbeitsfrequenz von einem Kilohicks (=1 kHz)

## Versuchsprotokolle

---

### **Diskussion**

#### **Frequenzspektrum ausgewählter theoretischer Funktionen**

Wie erwartet zeigt sich bei den Sinus- Funktionen eine klarer Peak, bei der Rechteckspannung zunehmend abnehmende Peaks bei ungeradzahligem Vielfachen der Frequenz und bei der Dreieckspannung ein periodisch abnehmendes Peakmuster.

Dass es sich beim angezeigten Spektrum um eine Quadrat- Funktion handeln muss, offerieren die der Wertebereich (lediglich positive Werte), welche nicht durch die einfache Integration (im Imaginären Zahlenraum!) zu erklären ist.

Dieser Versuchsteil zeigt weiterhin, dass die Genauigkeit der Analyse, bzw. des Funktionengenerators nicht allzu hoch sein kann, da die Amplitude der Sinusschwingung mit einem relativen Fehler von 13% behaftet ist.

#### **Frequenzspektrum bei unterschiedlichen Messfrequenzen**

Abgesehen von den im Diagramm mit abgetragenen Ableseungenauigkeiten, verschieben sich die Werte der Resonanzfrequenz mit zunehmender Messfrequenz suggestive in Richtung des Frequenzspektrums der vorhandenen Oberschwingungen. Während bei 300Hz das Sampling- Theorem die Messung verbietet, die Messung bei 30kHz läuft entgegen die in der Vorbetrachtung aufgeführte obere Grenze der Messfrequenz.

#### **Frequenzspektrum bei Dämpfung**

Erwartungsgemäß zeigte sich eine „Linksverschiebung“ des Resonanzpeaks, so wie es bei gedämpften Schwingungen zu erwarten ist. Überraschend ist, dass die Dämpfung bei Einsatz von Papier offensichtlich größer ist, als die, bei der die Öffnung mittels Schaumstoff des Gefäßhalses ganz signifikant mehr eingeschränkt wurde. Dadurch lässt sich nur ein Schluss ziehen, dass die Dämpfung mehr zuschlägt, als die Einschränkung der Halsöffnung (und damit der Querschnittfläche  $A$ ) und das die Größe der Oberfläche der Reibung verursachenden Oberfläche ( $A_{\text{reib,Papier}} \gg A_{\text{reib,Schaum}}$ ) einen größeren Einfluss hat, als anzunehmen. Interessant wäre es, diesem Phänomen einen eigenen Versuch zu widmen.

#### **Frequenzspektrum bei verschiedenen Volumina**

Die unterlegte, theoretische Kurve zeigt im Diagramm deutlich, dass es sich bei der dargestellten Kurve um eine Proportionalität zu  $\frac{1}{\sqrt{V}}$  handelt. Diese Tatsache bestätigt die vorangegangene Theorie.

#### **Frequenzspektrum formungleicher Körper**

Dass bei beiden Gefäßen gleiche Resonanzfrequenz vorlag, kann man unter Berücksichtigung der Messungenauigkeit und trotz der Verfänglichkeit der vermessenen Gefäße leicht erkennen.

Zusammengefasst, sind die Ergebnisse dieses Versuchs als sehr aussagekräftig, der Versuch selbst als erfolgreich einzuschätzen.

Jena, 24.11.2002

