

Versuchsprotokolle

Versuch 120

Gekoppelte Pendel

Aufgaben

1. Messen der Eigenschwingungsdauer zweier gekoppelter Pendel.
2. Bestimmung der Schwingungs- und Schwebungsdauer.
3. Bestimmung der Kopplungsgrade bei verschiedenen Kopplungen.

Grundlagen

Die Schwingungsgleichung und das physikalische Pendel

Da bis jetzt noch nicht innerhalb des Praktikums über die mathematische Formulierung von Schwingungsproblemen gesprochen wurde, gehe ich kurz auf die Herleitung der Schwingungsgleichung am Beispiel des physikalischen Pendels ein.

An dem gesamten Pendel greift in jedem Moment eine auslenkende Kraft F_a und eine rücktreibende Kraft F_r an. Während es sich bei F_r offensichtlich um die Schwerkraft handelt, ist F_a ein Resultat des 3. Newtonschen Axioms, nämlich die Trägheit zu F_r , oder anders: $-F_a$ ist die Kraft, die angewendet werden muss, um den Körper aus seiner derzeitigen (gleichförmigen) Geschwindigkeit zu bringen.

Betrachten wir uns erst einmal das physikalische Pendel an sich:

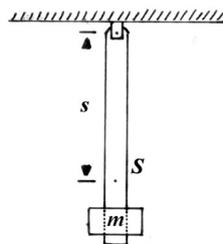


ABB I.1: Das Physikalische Pendel errechnet sich im Unterschied zum Mathematischen über einen Rotationsansatz. Dazu benötigt man die Größen Schwerpunktsabstand s , Masse m und Trägheitsmoment I_S .

$$\begin{aligned}\vec{M}_a + \vec{M}_r &= 0 \\ M_a &= I_S \cdot \ddot{\alpha} \\ M_r &= mgs \cdot \sin \alpha\end{aligned}$$

für kleine Winkel α gilt:

$$\sin \alpha = \alpha$$

und somit

$$I_S \ddot{\alpha} + mgs \alpha = 0$$

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgs}{I_S} \alpha = 0$$

was eine populäre Differentialgleichung mit dem imaginären Lösungsansatz

$$\alpha = C \cdot e^{i(\omega t + \beta)}$$

$$0 = -C \cdot \omega^2 \cdot e^{i(\omega t + \beta)} + \frac{mgs}{I_S} \cdot C \cdot e^{i(\omega t + \beta)}$$

$$0 = C \cdot e^{i(\omega t + \beta)} \cdot \left(\omega^2 - \frac{mgs}{I_S} \right) \Big|_{t=0} \Rightarrow C \cdot e^{i(\omega t + \beta)} = C$$

Mit der Randbedingung können wir dies ins Reelle überführen zu:

$$C \cdot \cos \omega t \cdot \left(\omega^2 - \frac{mgs}{I_S} \right) = 0$$

Versuchsprotokolle

Die letzte Gleichung hat für alle t nur die Lösung

$$\begin{aligned}\bar{\omega}^2 &= \frac{mgs}{I_S} \\ \bar{\omega} &= \frac{2\Pi}{\tau} = \sqrt{\frac{mgs}{I_S}} \\ \tau &= 2\Pi \sqrt{\frac{I_S}{mgs}}\end{aligned}$$

für $t=0s$ ergibt sich ferner:

$$\begin{aligned}C \cdot \cos \omega t &= \alpha|_{t=0s} \\ C &= \hat{\alpha}\end{aligned}$$

Die gesamte Schwingungsgleichung lautet also:

$$\hat{\alpha} \cdot \cos \omega t = \alpha$$

Das sympathische Pendel

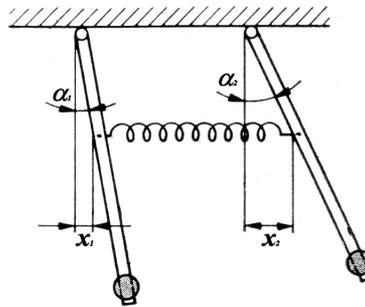


ABB I.2: Das sympathische Pendel besteht aus zwei physikalischen Pendel, welche mittels einer Kopplung (meist eine Feder) an den Angriffspunkten r_1 und r_2 verbunden sind.

Es ergeben sich für Pendel 1 und Pendel 2 unter der Voraussetzung, dass beide gleich dimensioniert sind und die Kopplung in der selben Entfernung $r_1=r_2$ angreift, folgende Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}I_S \ddot{\alpha}_1 + mgs \alpha_1 &= -kr(x_1 - x_2) \\ I_S \ddot{\alpha}_2 + mgs \alpha_2 &= -kr(x_2 - x_1)\end{aligned}$$

wobei sich das jeweilige x_n zu

$$x_n = r_n \cdot \sin \alpha_n = r_n \alpha_n$$

ergibt. Also lauten unsere beiden Kandidaten voneinander subtrahiert bzw. aufeinander summiert:

$$\begin{aligned}I_S (\ddot{\alpha}_1 - \ddot{\alpha}_2) + mgs(\alpha_1 - \alpha_2) &= -2kr^2(\alpha_1 - \alpha_2) \\ I_S (\ddot{\alpha}_1 + \ddot{\alpha}_2) + mgs(\alpha_1 + \alpha_2) &= 0\end{aligned}$$

Sei nun

$$\begin{aligned}z_1 &= (\alpha_1 - \alpha_2) \\ z_2 &= (\alpha_1 + \alpha_2)\end{aligned}$$

Es ergibt sich- oh welch Wunder- schon wieder eine Differentialgleichung. Nämlich

$$\begin{aligned}\ddot{z}_1 + \left(\omega^2 + \frac{2kr^2}{I_S} \right) z_1 &= 0 \\ \ddot{z}_2 + \omega^2 z_2 &= 0\end{aligned}$$

Versuchsprotokolle

Das bedeutet, dass im Falle einer gegenläufigen ($\alpha_1 = -\alpha_2$) und parallelen Eigenschwingung ($\alpha_1 = \alpha_2$) folgende Kreisfrequenzen entstehen:

$$\omega_{z_1} = \sqrt{\frac{mgs + 2kr^2}{I_S}}$$

$$\omega_{z_2} = \omega = \sqrt{\frac{mgs}{I_S}}$$

also gilt:

$$\tau_{z_1} = 2\Pi \sqrt{\frac{I_S}{mgs + 2kr^2}}$$

$$\tau_{z_2} = 2\Pi \sqrt{\frac{I_S}{mgs}}$$

Aus diesen beiden Grundschnwingungen setzen sich mittels Überlagerung alle anderen gekoppelten Schwingungen zusammen.

Sympathisches Pendel mit voller Schwebung- ein Beispiel

Wird bei $t=0s$ nur ein Pendel ausgelenkt und das andere in Ruhelage gehalten, so entsteht der verblüffende Effekt, dass die Energie beider Pendel zwischen diesen „hin- und herwandert“. Das bedeutet für Pendel 1:

$$\alpha_1(t) = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{\hat{\alpha}}{2} \cdot \cos \omega_{z_1} t + \frac{\hat{\alpha}}{2} \cdot \cos \omega_{z_2} t = \hat{\alpha} \cdot \cos \frac{\omega_{z_1} - \omega_{z_2}}{2} t \cdot \cos \frac{\omega_{z_1} + \omega_{z_2}}{2} t$$

Und für Pendel 2 unter Berücksichtigung des anderen Phasenwinkels, zurückführend auf die von Pendel 1 verschiedene Randbedingung:

$$\alpha_2(t) = \hat{\alpha} \cdot \sin \frac{\omega_{z_1} - \omega_{z_2}}{2} t \cdot \sin \frac{\omega_{z_1} + \omega_{z_2}}{2} t$$

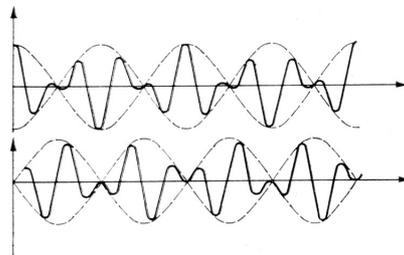


ABB I.3: charakteristisches Schwingungsabbild einer gekoppelten Schwingung zwischen zwei gleichen Oszillatoren

Wir sehen also wenn wir die Gleichungen erstellt haben, dass wir in der stillschweigenden Bedingung $\omega_1 \approx \omega_2$ eine Schwebung mit großer Oberschwingung erhalten. Die Abhängigkeiten der Schwingungszeiten für Ober- und Grundschnwingung entnimmt man aus ihren Gleichungen:

$$\begin{aligned} \tau_{Schwebung} &= 2\Pi \frac{1}{\omega_{z_1} - \omega_{z_2}} = 2\Pi \frac{1}{\sqrt{\frac{mgs + 2kr^2}{I_S}} - \sqrt{\frac{mgs}{I_S}}} \\ &= 2\Pi \frac{\sqrt{I_S}}{\sqrt{mgs + 2kr^2} - \sqrt{mgs}} \\ \tau_{Grund} &= 2\Pi \frac{1}{\omega_{z_1} + \omega_{z_2}} = 2\Pi \frac{1}{\sqrt{\frac{mgs + 2kr^2}{I_S}} + \sqrt{\frac{mgs}{I_S}}} \\ &= 2\Pi \frac{\sqrt{I_S}}{\sqrt{mgs + 2kr^2} + \sqrt{mgs}} \end{aligned}$$

Versuchsprotokolle

Der Kopplungsgrad

Als Maß für den Einfluss der Kopplung ist schlicht und ergreifend definiert als:

$$\chi := \frac{kr^2}{kr^2 + mgs}$$

$$= \frac{\tau_{z_1}^2 - \tau_{z_2}^2}{\tau_{z_1}^2 + \tau_{z_2}^2}$$

Das bedeutet, dass sich eine Abhängigkeit des Kopplungsgrad und der Schwingungszeiten von r ergibt. Folgendermaßen sehen dann die Graphiken aus:

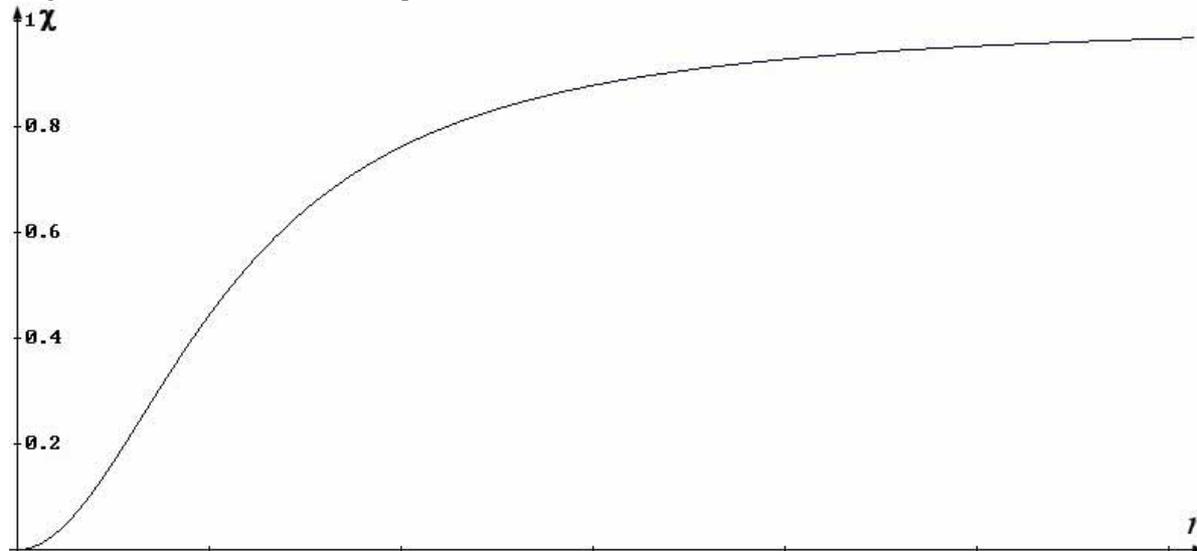


ABB. I.4.A: Graphische Abhängigkeit des Kopplungsgrades vom Kopplungsabstand r . Mit zunehmenden Abstand strebt der Kopplungsgrad von unten gegen 1,...

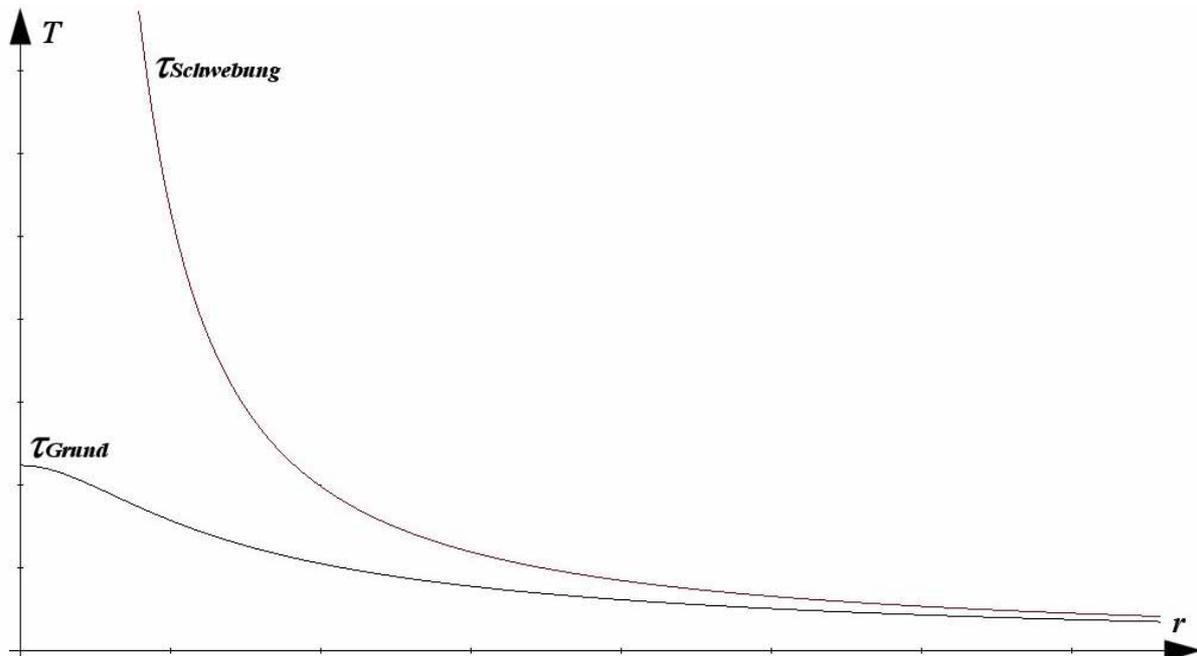


ABB. I.4.B: ... während die Schwingungsdauern stetig der 0s- Linie entgegen streben.

Quellenangabe:

Kretschmar, Mende, Wollmann „Physikalisches Praktikum“, Fachbuchverlag Leipzig 1980

Versuchsprotokolle

Durchführung

Versuchsobjekt:

Doppelpendel, mech. Feder zur Kopplung

Schaltungsskizze:

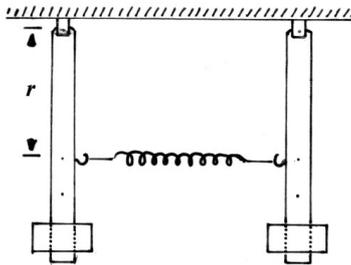


ABB II.1: Beide Pendel in Ruhelage

mögliche systematische Fehler:

1. Reibung in der Aufhängung
2. Feder ist nicht masselos und bringt deshalb ein weiteres (Gewichtskrafts-) Moment in die Pendel
3. Durch die sehr geringe Distanz der Feder werden die Ergebnisse nicht sonderlich signifikant

erwartetes Ergebnis:

Es wird ein sinusförmiges Schwingungsverhalten der Grund- und Schwebungsschwingung erwartet. Ferner sollte die Differenz zwischen Grund- und Schwebungsfrequenz mit Zunahme der Kopplungsentfernung r größer werden.

Versuchsablauf:

- Messung der Eigenfrequenzen
- Messung der Frequenzen der beiden Fundamentalschwingungen
- Messung der Schwebungs- und Grundschiwingung bei voller Schwebung

Fehlerquellen:

Zeitmessung τ

Messwerte

Eigenschwingung

$$\tau_{P_1} = \tau_{P_2} = 1,32 \pm 0,02s$$

Fundamentalschwingung

<u>Gegenläufig</u>	<u>Gleichläufig</u>
$\tau_{z_1}(r = 25,5cm) = 1,30 \pm 0,02s$	$\tau_{z_2}(r = 25,5cm) = 1,29 \pm 0,02s$
$\tau_{z_1}(r = 30,5cm) = 1,30 \pm 0,02s$	$\tau_{z_2}(r = 30,5cm) = 1,30 \pm 0,02s$
$\tau_{z_1}(r = 35,5cm) = 1,27 \pm 0,02s$	$\tau_{z_2}(r = 35,5cm) = 1,32 \pm 0,02s$
$\tau_{z_1}(r = 38,5cm) = 1,27 \pm 0,02s$	$\tau_{z_2}(r = 38,5cm) = 1,33 \pm 0,02s$

Schwebungs- und Grundschiwingung

<u>Grundschiwingung</u>	<u>Schwebungsschiwingung</u>
$\tau_S(r = 25,5cm) = 137,1 \pm 1s$	$\tau_G(r = 25,5cm) = 1,31 \pm 0,02s$
$\tau_S(r = 30,5cm) = 95,2 \pm 0,5s$	$\tau_G(r = 30,5cm) = 1,30 \pm 0,02s$
$\tau_S(r = 35,5cm) = 72,9 \pm 0,3s$	$\tau_G(r = 35,5cm) = 1,30 \pm 0,02s$
$\tau_S(r = 38,5cm) = 62,5 \pm 0,1s$	$\tau_G(r = 38,5cm) = 1,26 \pm 0,04s$

Auswertung

Formeln

$$\chi = \frac{\tau_s^2 - \tau_G^2}{\tau_s^2 + \tau_G^2}$$

$$\Delta\chi = \left| \frac{\partial\chi}{\partial\tau_s} \Delta\tau_s \right| + \left| \frac{\partial\chi}{\partial\tau_G} \Delta\tau_G \right|$$

$$= \frac{4\tau_s\tau_G^2}{(\tau_s^2 + \tau_G^2)^2} \Delta\tau_s + \frac{4\tau_s^2\tau_G}{(\tau_s^2 + \tau_G^2)^2} \Delta\tau_G$$

$$= \frac{4\tau_s\tau_G(\Delta\tau_s\tau_G + \tau_s\Delta\tau_G)}{(\tau_s^2 + \tau_G^2)^2}$$

Rechnung

r [cm]	T_s [s]	τ_G [s]	χ
25,5	137,1±1,0	1,31±0,02	0,9998±0,1298
30,5	95,1±0,5	1,30±0,02	0,9996±0,1253
35,5	72,9±0,3	1,30±0,02	0,9993±0,1132
38,5	62,5±0,1	1,26±0,02	0,9991±0,1132

Ergebnisse

Rechenergebnisse

r [cm]	τ_{z1} [s]	τ_{z2} [s]	T_s [s]	τ_G [s]	χ
25,5	1,30±0,02	1,29±0,02	137,1±1,0	1,31±0,02	≈ 1,00±0,13
30,5	1,30±0,02	1,30±0,02	95,1±0,5	1,30±0,02	
35,5	1,27±0,02	1,32±0,02	72,9±0,3	1,30±0,02	
38,5	1,27±0,02	1,33±0,02	62,5±0,1	1,26±0,02	

Graphische Auswertung

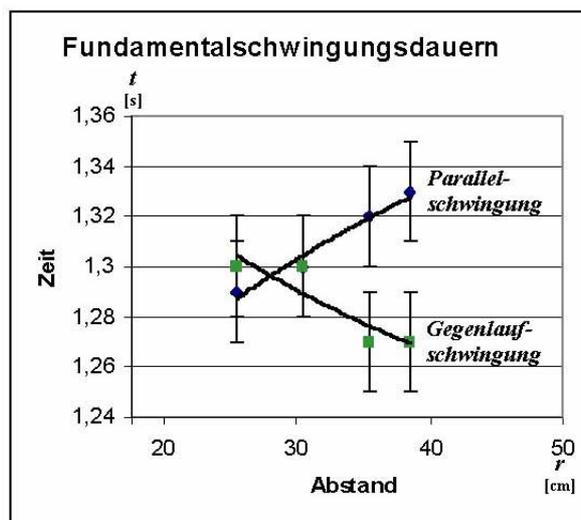


ABB. II.2.A: Verläufe der Fundamentalschwingungsdauern über dem Abstand von Kopplung und Drehachse. Erkennbar ist, dass τ_{z2} offensichtlich nicht der Erwartung einer Konstanz folgt und größer wird. (Siehe: Diskussion)

Versuchsprotokolle

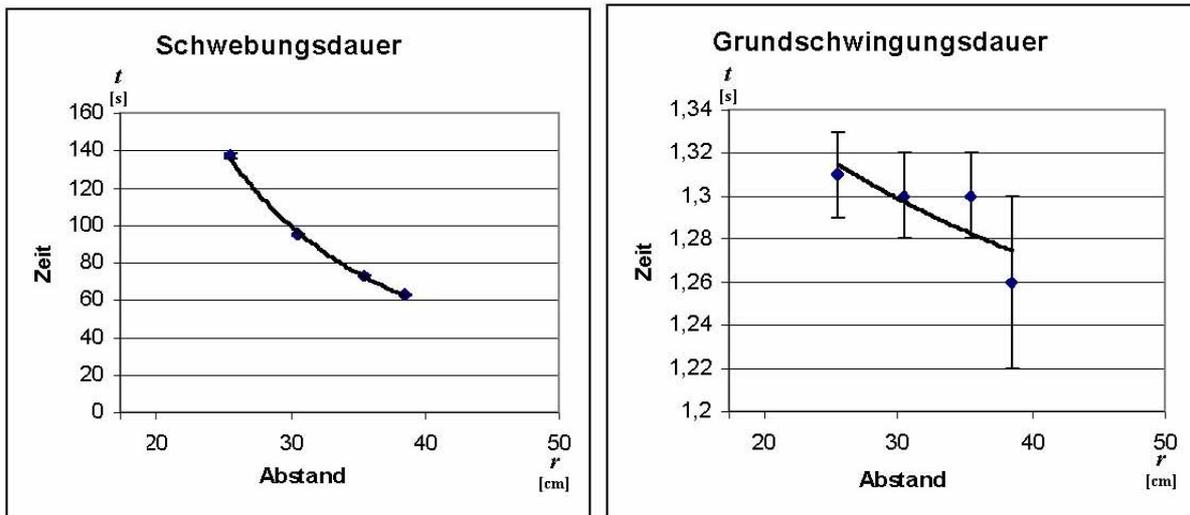


ABB. II.2.B und II.2.C: Die Schwebungs- und Grundschwingungsdauern fallen, wie in der theoretischen Vorbetrachtung vorausgesagt, ab.

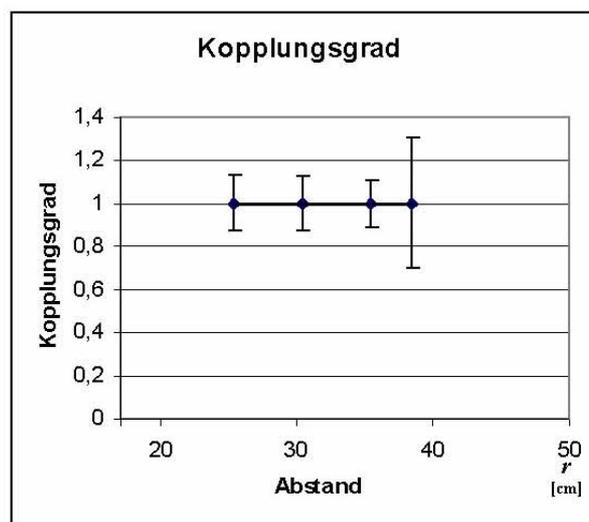


ABB. II.2.D: Der Kopplungsgrad aber ist in jeder Hinsicht ein Kandidat für die Rubrik Diskussion: er hat bereits, die Voraussausage bestätigend den Wert 1 angenommen. Die tendenzielle Schwankung, wie sie die durch die blanken Rechenergebnisse suggeriert wird, ist gegenüber den sich fortpflanzenden Messungenauigkeiten so klein, dass sie ihre Aussage verliert.

Diskussion

Zum Versuch allgemein

Normalerweise ist das Doppelpendel ein wunderbar einfacher und stimmungsvoller Schwingversuch: Der Aufbau ist bereits gegeben, die Theorie ist knapp und verständlich und die Fehlerquellen sind an einem Finger abgezählt. Es steht und fällt alles mit der richtigen Dimensionierung. Um so gravierender ist es natürlich, wenn diese nicht ausgewogen ist, wie scheinbar in diesem Falle. Ich untersuche zunächst erst einmal alle beobachteten erwünschten und unerwünschten Effekte, welche der Theorie zuwiderlaufen:

Erfolge, Probleme und deren Ursachen

Probleme bei den Fundamentalschwingungen

Ich gehe den Versuch einmal in chronologischer Abfolge durch. Es wäre also beispielsweise zu erwarten, dass bei den Fundamentalschwingungen die Schwingungsdauer der gegenläufigen Schwingung mit zunehmenden Kopplungsabstand abfallend der Abszisse entgegenstrebt, während die Parallelschwingung konstant bleibt. Während die Graphik ABB. II.2.A zeigt, dass erstere Aussage gezeigt werden konnte, bleiben die Schwingungsdauern der parallelen Schwingung nicht konstant, sondern laufen nach „oben“ aus. Das kann nur bedeuten, dass eine weitere Kraft (oder mehrere) ein zusätzliches Moment auf das Pendel bringt. Diese ist auch schon schnell gefunden: es ist die Gewichtskraft der Koppelfeder und deren Aufhängung. Je weiter diese nach

Versuchsprotokolle

unten ausgelenkt wird, desto größer wird das Verhältnis Trägheitsmoment zu Schwerpunktsabstand. Und daraus folgt ebenso die systematisch Vergrößerung der Schwingungsdauer.

Dieses Phänomen tritt natürlich ebenso systematisch in der Messung der gegenläufigen Schwingungsdauer aus und verursacht, dass auch hier das Kurvenverhalten (in diesem Falle) wesentlich flacher verläuft, als theoretisch vorherzusehen war.

Verschlimmert wird diese Misere dadurch, dass die Direktion der Feder sehr gering ist. So ist die unerwünschte Schwerkraft, die die Feder verursacht relativ groß zur erwünschten rücktreibenden Koppelkraft- und die dadurch verursachten Störeffekte treten umso deutlicher ans Tageslicht.

Probleme am sympathischen Pendel bei voller Schwebung

Ähnliches gilt natürlich auch für die Messung der Schwebungs- und Grundschiwungsdauer. Jedoch wirkt sich dies hier in der Graphischen Auswertung nicht so drastisch aus, wie im vorangehenden Versuchsteil, aber als systematischer Fehler ist er auch hier vertreten. Auch wenn nur (- der geringen Direktion sei Dank-) kurze Ausschnitte aus den zu erwartenden Kurven zu erhalten waren, so entsprechen diese Intervalle den Voraussagen: Beide fallen konvex ab. Außerdem sind die Werte der Schwebungsdauern wesentlich größer und ihr Graph wesentlich gekrümmter, als bei der Grundschiwung. Auffallend ist auch, dass die Fehlerintervalle der Grundschiwungen gegen über denen der Schwebungsschiwungen in der Graphik relativ groß erscheinen. Das liegt an der großen zeitlichen Differenz, die beide Zeiten noch in diesem Bereich aufspannen.

Der Kopplungsgrad

Umso mehr verwundert es dann doch, dass dies sich nicht im Kopplungsgrad widerspiegelt. Trotz eben der großen Differenz liegt dieser bereits „stabil“ bei 1. Dies löst sich aber bei einem näheren Blick auf die Ausgangsformel auf.

$$\chi = \frac{kr^2}{kr^2 + mgs}$$

Man sieht an ihr deutlich, dass eine Änderung der Massenträgheitsmomente (welche den beschriebenen systematischen Fehler verursachen) unerheblich ist und die dazu relativ geringfügigere Schwerpunktsverlagerung von der r^2 - Beziehung der Kopplungskraft recht gut überlagert wird.

Fazit

Obwohl die Ergebnisse als solche objektiv richtig sind und die Theorie offensichtlich bestätigen, war es nur möglich, Messung mit einem großen systematischen Fehler durchzuführen. Des Weiteren konnten nur „Kurvenschnipsel“ ermittelt werden, welche lediglich einen Teil des gesamten theoretischen Kurvenverlaufs darstellen.

Als Fazit zu diesem Versuch möchte ich feststellen, dass die richtige Dimensionierung von Pendel und Feder bei diesem Versuch eine sehr gewichtige Rolle spielt für eine signifikante Auswertung. Falls dieser Versuch wiederholt werden würde, wäre es sehr sinnvoll, eine Feder mit höherer Direktion zu benutzen, um den systematischen Fehler relativ klein zu halten.

Ansonsten sind die Ergebnisse aussagekräftig und gut, die abgezeichneten Messwerte sind im Anhang zum Protokoll zu finden.

Jena, 14.04.2002