

## Versuchsprotokolle

Versuch 115

### Kreiselgesetze

#### Aufgaben

3. Bestimmen der Nutationsfrequenz in Abhängigkeit der Kreiselfrequenz
4. Bestimmen der Präzessionsperiode in Abhängigkeit der Kreiselfrequenz für zwei verschiedene äußere Drehmomente
5. Bestimmen des Hauptträgheitsmomentes

#### Vorbereitung

##### Der Kreisel

Ein Kreisel ist ein starrer, sich frei drehender Körper, welcher in höchstens einem Punkt zwangsbedingt gelagert ist. Für den Kreisel gilt als charakteristische und invariante Bewegungsgröße der Drehimpuls  $L$ , welcher durch die Winkelgeschwindigkeit und das Trägheitsmoment als Körperkonstante bestimmt ist:

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{p}$$

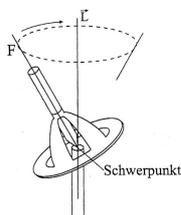
$$\dot{\vec{L}} = I \cdot \dot{\vec{\omega}} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{D}$$

Das Trägheitsmoment ist dabei die (endliche oder unendliche) Summe aller zur Drehachse um den Abstand entfernten Teilmassen des Kreisels mit:

$$I = \int r^2 dm$$

Dabei ist klar, dass sich das Trägheitsmoment mit der Änderung der Drehachse ebenso ändert. Nur bei extremalen Trägheitsmomenten ist also eine Rotation stabil: die sog. „freien Achsen“. Am stabilsten ist eine Drehung bezüglich des Hauptträgheitsmomentes.

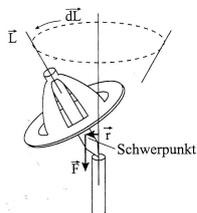
##### Nutation



Betrachtet man sich einen Kreisel, dessen Schwerpunkt mit dem unterstützten Punkt überein fällt („kräftefreier Kreisel“), so stellt man leicht fest, dass während eines Drehvorganges auf den Kreisel kein Drehmoment (durch Erdanziehung etc.) ausgewirkt wird. Wenn der Kreisel also durch einen kurzzeitigen Kraftstoß aus seiner bisherigen Drehung gestoßen wird, verändert sich der Drehimpuls nicht, obwohl er nicht mehr mit der Figurenachse übereinstimmt. D.h. der Kreisel rotiert weiterhin um seine Figurenachse und zusätzlich (die vektorielle Addition und die Drehimpulserhaltung gebieten dies) um die Drehimpulsachse. Dabei gilt:

$$f_K \sim f_N$$

##### Präzession



Anders sieht es aus, wenn der Schwerpunkt nicht derart günstig liegt. Dann wirkt stets eine Gewichtskraft auf den Kreisel, welche ein zur Rotationsebene paralleles Drehmoment einbringt. Der Drehimpulsvektor ändert sich mit der Zeit und rollt auf der Kegelbahn ab. Es gilt:

$$f_K \sim \frac{1}{f_P}$$

#### Durchführung

##### Versuchsobjekte

Kreisel, Lichtschranke mit Impulszähler, Lichtschranke mit Frequenzmesser, Handstopuhr

##### erwartete Ergebnisse

- Proportionalität zwischen Kreiselfrequenz  $f_K$  und Nutationsfrequenz  $f_N$
- Proportionalität zwischen  $f_K$  und Präzessionsperiode  $T_P$

**Versuchsprotokolle**

**mögliche systematische Fehler**

- Reibung in Luft bzw. dem unterstützten Punkt (Pfanne)
- Leichte bis starke unbemerkte Verschiebung des Schwerpunktes durch Veränderungen der Höheneinstellung (z.B. durch Erschütterungen bei hohen Kreisfrequenzen)

**Versuchsablauf**

- Aufnahme der Nutation am kräftefreien Kreisel
- Aufnahme der Präzession am schweren Kreisel

**Fehlerquellen**

$$\Delta f, \Delta T$$

**Messwerte**

Körperkonstanten des verwendeten Kreisels

$$m_K = 3,25 \pm 0,05 \text{ kg}, r_K = 26 \text{ cm}, n_{\text{Speichen}} = 18, t_{\text{ImpZ}} = 1 \text{ s}$$

Nutation

$n_{\text{ImpZ}}$	50	48	46	44	42	40	38	36	34	32	30	28	26	24	22
$f_K$ [Hz]	2,778	2,667	2,556	2,444	2,333	2,222	2,111	2	1,889	1,778	1,667	1,556	1,444	1,333	1,222
$f_N$ [Hz]	4,215	4,022	3,954	3,754	3,605	3,403	3,232	3,063	2,888	2,708	2,6	2,489	2,278	2,03	1,899
$\Delta f_K^+$ [Hz]	0,055	0,055	0,055	0,055	0,055	0,055	0,055	0,055	0,055	0,055	0,055	0,055	0,055	0,055	0,055

Präzession

**h=6mm**

$n_{\text{ImpZ}}$	33	26	22	17	12	8
$f_K$ [Hz]	1,833	1,444	1,222	0,944	0,667	0,444
$T_P$ [s]	37,3	33,6	33,3	21,8	17,6	8
$\Delta n_{\text{ImpZ}}$	2	2	1	1	1	1
$\Delta f_K^-$ [Hz]	0,111	0,111	0,056	0,056	0,056	0,056
$\Delta f_K^+$ [Hz]	0,166	0,166	0,111	0,111	0,111	0,111
$\Delta T_P$ [s]	4	4	2	2	2	2

**h=11mm**

$n_{\text{ImpZ}}$	32	26	21	18	14	8
$f_K$ [Hz]	1,778	1,444	1,167	1	0,778	0,444
$T_P$ [s]	27,2	20,6	17,2	14	11,4	6,5
$\Delta n_{\text{ImpZ}}$	3	3	1	1	1	1
$\Delta f_K^-$ [Hz]	0,167	0,167	0,056	0,056	0,056	0,056
$\Delta f_K^+$ [Hz]	0,222	0,222	0,111	0,111	0,111	0,111
$\Delta T_P$ [s]	4	2	2	2	2	2

**Auswertung**

$$m_K = 3,25 \pm 0,05 \text{ kg}, r_K = 26 \text{ cm}, n_{\text{Speichen}} = 18, t_{\text{ImpZ}} = 1 \text{ s}$$

Erhaltene Werte aus der Regression (siehe ABB. II.1 und ABB. II.2)

$$y(x) = A(x) + B,$$

**Versuchsprotokolle**

wobei B aus physikalischem Grund immer 0 sein muss (bei keiner Drehung kann es keine Präzession und keine Nutation existieren!). Damit ergibt sich für die Fehlerechnung:

$$A \approx \frac{y}{x} \Rightarrow \Delta A = A \cdot \left( \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta x}{x} \right)$$

Daraus folgt:

$$A_N = 1,5354 \pm 0,0691$$

$$A_{P_{h=6mm}} = (21,891 \pm 4,330) s^2$$

$$A_{P_{h=11mm}} = (14,735 \pm 4,007) s^2$$

Mit:

$\frac{f_N}{f_K} = \frac{I_A}{I_S} = A_N$ <p>folgt</p> $I_S = \frac{I_A}{A_N}, \Delta I_S = I_S \left( \frac{\Delta I_A}{I_A} + \frac{\Delta A_N}{A_N} \right)$ $I_{S_{h=6mm}} = (0,0690 \pm 0,0233) kg \cdot m^2$ $I_{S_{h=11mm}} = (0,0851 \pm 0,0321) kg \cdot m^2$	$I_A = mgh \frac{1}{\omega_P \omega_K}$ <p>folgt</p> $I_A = \frac{mgh}{4\pi^2} A_P, \Delta I_A = I_A \left( \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta A_P}{A_P} \right)$ $I_{A_{h=6mm}} = (0,1060 \pm 0,0310) kg \cdot m^2$ $I_{A_{h=11mm}} = (0,1308 \pm 0,0435) kg \cdot m^2$
--	--

Unabhängige Abschätzungen:

$$I_A \geq \frac{1}{2} m_K \cdot r_K^2 = (0,10985 \pm 0,00169) kg \cdot m^2$$

$$I_S = mgh \frac{T^2}{4\pi^2} = (0,07995 \pm 0,03151) kg \cdot m^2$$

**Darstellung**

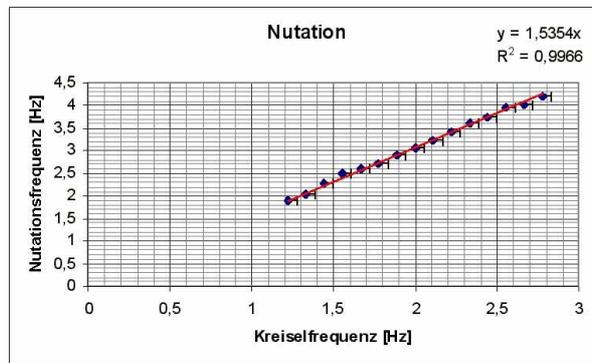


ABB II.1: Nutationsfrequenz über der Kreiselfrequenz aufgetragen

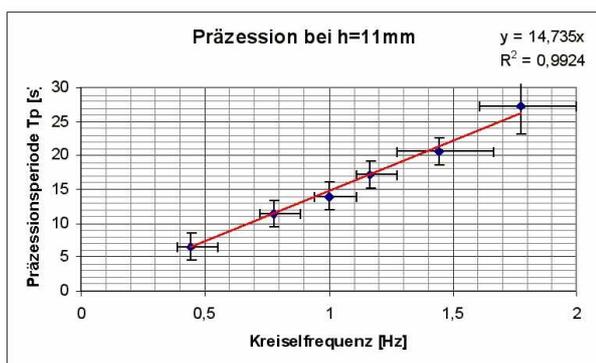
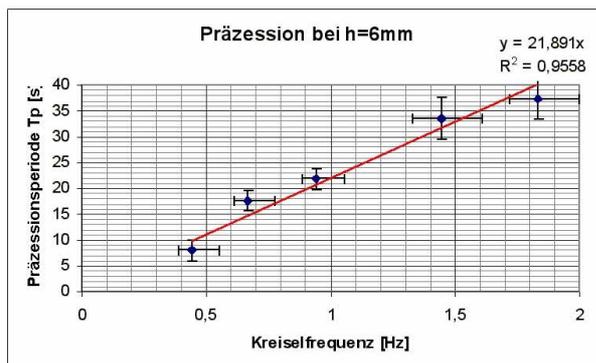


ABB II.2A,B: Präzessionsdauer über der Kreiselfrequenz für die Fälle h=6 mm und h=11 mm aufgetragen

**Versuchsprotokolle**

---

***Diskussion***

Die ermittelten Ergebnisse stimmen innerhalb deren Messungenauigkeiten sowohl untereinander, als auch mit deren Abschätzungen überein. Damit ist der Versuch als erfolgreich zu bewerten. Ergo: Die Größe der Drehmomente ist beim symmetrischen Kreisel unabhängig von der Lage des Schwerpunktes.

Die abgezeichneten Messwerte sind im Anhang zu finden.

Jena, 09.12.2002