

Versuchsprotokolle

Versuch 114

Drehpendel

Aufgaben

- Bestimmung der Trägheitsmomente einer Scheibe und einer Rundstange (horizontal) dynamisch.
- Bestimmung des Direktionsmomentes der Apparatur statisch und dynamisch.

Grundlagen

Das Drehpendel ist eine horizontal- schwingende Scheibe, in Schwingung gesetzt durch eine äußere Kraft und in Schwingung gehalten durch die eigene Trägheit und das rücktreibende Direktionsmoment der Schraubenfeder. Es ergibt sich folgende Schwingungsgleichung:

$$I\ddot{\varphi} + D\varphi = 0$$

Mit der Schwingungsdauer T_0 :

$$T_0^2 = 4\pi^2 \frac{I}{D}$$

Mittels eines Drehpendels unbekannter Charakteristika, kann man die Trägheitsmomente diverser Probekörper auf unterschiedlichen Weg bestimmen: dynamisch und statisch.

Im *dynamischen* Messprozess nimmt man die Summierbarkeit des Trägheitsmoments zur Grundlage. Nachdem man T_0 bestimmt hat, setzt man die Probekörper lose auf, so dass die Masse (mehr oder minder) punktförmig auf das Pendel einwirkt:

$$\ddot{\varphi} + \frac{D}{I + r^2 m} \varphi = 0$$

Und aus der so gewonnenen Schwingungsdauer T_r

$$T_r^2 = 4\pi^2 \frac{I + r^2 m}{D} = \left(\frac{I}{D} + \frac{r^2 m}{D} \right) \cdot 4\pi^2$$

erhält man das Direktionsmoment D

$$\begin{aligned} (T_0^2 - T_r^2) \cdot D &= r^2 m \cdot 4\pi^2 \\ D &= \frac{4\pi^2 \cdot r^2 m}{T_r^2 - T_0^2} \end{aligned}$$

und so auch das Trägheitsmoment des Schwingtisches in indirekter Weise:

$$I = D \frac{T_0^2}{4\pi^2} = T_0^2 \cdot \frac{r^2 m}{T_r^2 - T_0^2}$$

Verbindet man hingegen starr den Probekörper achsengleich mit dem Drehpendel, so ergibt sich

$$\ddot{\varphi} + \frac{D}{I + I_K} \varphi = 0$$

und aus der Schwingdauer T_K ergibt sich:

$$\begin{aligned} T_K^2 &= 4\pi^2 \frac{I + I_K}{D} = T_0^2 + I_K \frac{T_r^2 - T_0^2}{r^2 m} \\ I_K &= r^2 m \frac{T_K^2 - T_0^2}{T_r^2 - T_0^2} \end{aligned}$$

Viel einfacher dagegen ist die *statische* Bestimmung. Zuerst bestimmt man die Federdirektion direkt, d.h. man misst, wie weit die Scheibe bei anlegen einer Gewichtskraft ausgelenkt wird und schließt so auf das Direktionsmoment:

$$D = F \cdot \frac{r}{\varphi} = \frac{mgr}{\varphi}$$

Dann misst man die Schwingungsdauer der Apparatur allein und der Apparatur in fester Verbindung mit dem Probekörper bei Schwingungsachsengleichheit.

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} T_K^2 &= 4\pi^2 \frac{I + I_K}{D} \\ I_K &= \frac{T_K^2}{4\pi^2} \cdot D - I = \frac{mgr}{4\pi^2 \cdot \varphi} \cdot (T_K^2 - T_0^2) \end{aligned}$$

Fertig!

Versuchsprotokolle

Durchführung

Versuchsobjekt:

Drehtisch, mech. Stoppuhr, Versuchsobjekte (Scheibe und Stange)

mögliche systematische Fehler:

1. Reibung in der Anordnung
2. Haftreibung zwischen Drehachse und Testkörper
3. mögl. Dekalibrierung der Ausschlagsnadel während der Arbeit
4. Überdehnung der Feder in den nichtlinearen Bereich hinein

erwartetes Ergebnis:

Übereinstimmung zwischen theoretischen und praktischen Wert.

Versuchsablauf:

- Messung am blanken Drehtisch
- Untersuchung des Einflusses des Gewichte der Probekörper (lose Lagerung bei $r=0\text{cm}$)
- dynamisches Messverfahren zur Ermittlung von D
- statisches Messverfahren zur Ermittlung von D
- Messung der Schwingdauer bei festen Probekörper
- Aufnahme der Daten für theoretische Auswertung

Fehlerquellen:

$$\Delta T_x = \pm \frac{t_{\text{reakt}}}{n_{\text{Period}}}; \Delta \varphi = \pm 0,5^\circ; \Delta r = \pm 0,1\text{cm}; \Delta m = \pm 2\%$$

Messwerte

Apparaturkonstanten

$$m_{\text{Stange}} = 609,6 \pm 0,1\text{g}$$

$$m_{\text{Scheibe}} = 842,0 \pm 0,1\text{g}$$

$$r_{\text{Drehtisch}} = 13,1 \pm 0,1\text{cm}$$

$$r_{\text{Stange}} = 609,6 \pm 0,1\text{g}$$

$$r_{\text{Scheibe}} = 842,0 \pm 0,1\text{g}$$

Drehtisch allein

Winkel [°]	t [s]	n_{Perioden}
40	11,1	5
50	11,1	5
60	11	5
70	11,1	5
80	11	5

Probekörper, lose aufgesetzt

$r=$ [cm]	0		6		10		12	
	t [s]	n_{Perioden}	t [s]	n_{Perioden}	t [s]	n_{Perioden}	t [s]	n_{Perioden}
Stange	10,9	5	12,5	5	15,0	5	16,6	5
	10,9	5	12,5	5	15,0	5	16,5	5
	11,0	5	12,6	5	15,1	5	16,6	5
Scheibe	6,8	3	8,8	3	10,6	3	12,0	3
	6,7	3	9,0	3	10,8	3	11,8	3
	12,7	5	8,9	3	10,9	3	12,0	3

Versuchsprotokolle

Probekörper, fest aufgesetzt

Stange		Scheibe	
t [s]	$n_{Perioden}$	t [s]	$n_{Perioden}$
32,2	10	30,3	10
32,5	10	30,3	10
32,4	10	30,3	10

Direktionsmessung

m [g]	5	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Winkel [°]	6	12	27	41	55	71	84	98	112	126	137

Auswertung

Berechnung des Direktionsmomentes

dynamisch

$$D = \frac{4\pi^2 \cdot r^2 m}{T_r^2 - T_0^2}; \Delta D = D \cdot \left(2 \frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta m}{m} + 2 \frac{T_r \Delta T_r + T_0 \Delta T_0}{T_r^2 - T_0^2} \right)$$

$$D_{d\text{ Stange}} = (0,057 \pm 0,006) \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

$$D_{d\text{ Scheibe}} = (0,044 \pm 0,006) \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

statisch

$$D = \frac{mgr}{\varphi}; \Delta D = D \cdot \left(\frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta \varphi}{\varphi} \right)$$

$$D_s = (0,055 \pm 0,002) \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

Berechnung des Trägheitsmomentes der Apparatur

$$I = D \frac{T_0^2}{4\pi^2}; \Delta I = I \cdot \left(\frac{\Delta D}{D} + \frac{\Delta T_0}{T_0} \right)$$

$$I_{d\text{ Stange}} = (7,06 \pm 1,08) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{d\text{ Scheibe}} = (5,43 \pm 0,95) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_s = (6,78 \pm 0,55) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Berechnung des Trägheitsmomentes der Probekörper

dynamisch

$$I_K = r^2 m_K \frac{T_K^2 - T_0^2}{T_r^2 - T_0^2}; \Delta I_K = I_K \cdot \left(\frac{2\Delta r}{r} + \frac{\Delta m_K}{m_K} + 2 \frac{T_K \Delta T_K + T_0 \Delta T_0}{T_K^2 - T_0^2} + 2 \frac{T_r \Delta T_r + T_0 \Delta T_0}{T_r^2 - T_0^2} \right)$$

$$I_{K^d\text{ Stange}} = (8,054 \pm 1,653) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{K^d\text{ Scheibe}} = (4,757 \pm 0,931) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Versuchsprotokolle

statisch

$$I_K = \frac{mgr}{4\pi^2 \cdot \varphi} \cdot (T_K^2 - T_0^2); \Delta I_K = I_K \left(\frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta \varphi}{\varphi} + 2 \frac{T_K \Delta T_K + T_0 \Delta T_0}{T_K^2 - T_0^2} \right)$$

$$I_{K_{\text{Stange}}} = (7,772 \pm 0,853) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{K_{\text{Scheibe}}} = (5,932 \pm 0,080) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

theoretisch

$$I_{K_{\text{Stange}}} = \frac{m}{3} r^2; \Delta I_{K_{\text{Stange}}} = I_{K_{\text{Stange}}} \cdot \left(\frac{\Delta m}{m} + \frac{2\Delta r}{r} \right)$$

$$I_{K_{\text{Scheibe}}} = \frac{m}{2} r^2; \Delta I_{K_{\text{Scheibe}}} = I_{K_{\text{Scheibe}}} \cdot \left(\frac{\Delta m}{m} + \frac{2\Delta r}{r} \right)$$

$$I_{K_{\text{Stange}}} = (7,886 \pm 0,081) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{K_{\text{Scheibe}}} = (7,060 \pm 0,110) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Ergebnisse

<u>dynamisch</u>	<u>statisch</u>	<u>theoretisch</u>
Direktion:		
$D_{d_{\text{Stange}}} = (0,057 \pm 0,006) \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$	$D_s = (0,055 \pm 0,002) \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$	%
$D_{d_{\text{Scheibe}}} = (0,044 \pm 0,006) \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$		
Trägheitsmoment (Apparatur):		
$I_{d_{\text{Stange}}} = (7,06 \pm 1,08) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	$I_s = (6,78 \pm 0,55) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	%
$I_{d_{\text{Scheibe}}} = (5,43 \pm 0,95) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$		
Trägheitsmoment (Probekörper):		
$I_{K_{\text{Stange}}} = (8,054 \pm 1,653) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	$I_{K_{\text{Stange}}} = (7,772 \pm 0,853) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	$I_{K_{\text{Stange}}} = (7,886 \pm 0,081) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$I_{K_{\text{Scheibe}}} = (4,757 \pm 0,931) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	$I_{K_{\text{Scheibe}}} = (5,932 \pm 0,080) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	$I_{K_{\text{Scheibe}}} = (7,060 \pm 0,110) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

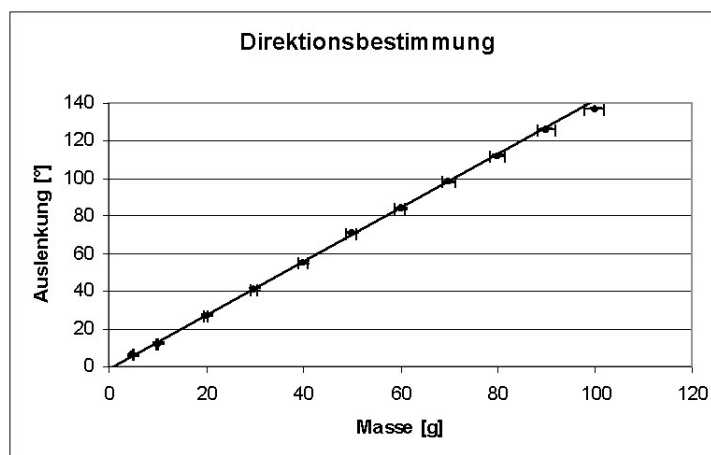


ABB.: Statische Direktionsbestimmung. Auffällig ist, dass die Tendenz der Messwerte zunehmend aus dem linearen Bereich zu „wandern“ scheinen.

Versuchsprotokolle

Diskussion

Die Gegenüberstellung der Ergebnisse zeigt, dass die erreichten Werte aus dem dynamischen und statischen Messverfahren in den gleichen Größenordnungen und Wertebereich liegen. Auffällig aber ist, dass die statische Messmethode im Hinblick auf den absoluten Fehler und auf die Abweichungen von den theoretischen Werten das deutlich bessere Ergebnisse liefert. Die Hoffnung, durch das umständlichere dynamische Messverfahren genauere Werte zu erhalten, wurde also nicht erfüllt.

Weiterhin ist die große (systematische) Abweichung der Ergebnisse der Scheibe gegenüber der Theorie nach unten zu diskutieren. Offensichtlich spielen Reibungsprozesse, hervorgerufen durch das große Eigengewicht der Scheibe (vgl. Messwerte bei loser Aufhängung, $r=0\text{cm}$ mit der blanken Messapparatur) eine entscheidende Rolle. Diese vergrößern die Schwingdauer, was ein kleineres Ergebnis zur Folge hat. Verständlicherweise pflanzt sich dieser Fehler systematisch bei der dynamischen Messmethode stärker fort, als bei der direkten Direktionsbestimmung.

Was ebenfalls auffiel ist der Umstand, dass beim Übergang von Gleit in Haftreibung es zu einer eklatanten Schwingdauerverzerrung kommt (dunkel markierter Messwert). Da dies bei jeder Periode mindestens (wenn auch für einen kurzen Zeitmoment) auftritt, sind auch hier systematische Fehlerquellen zu finden.

Gleichfalls systematisch geht auch die Überdehnung der Feder ein, welche erst mehrperiodische Messungen ermöglichte. Was auf der einen Seite aber zur Kompensation des subjektiven Messfehlers dienlich war, bringt andererseits aber wieder einen systematischen Fehler mit sich, da angenommen werden muss, dass bei einer Auslenkung von 180° die Gültigkeit des Hookschen Gesetzes fraglich ist, da bereits die Tendenz bei 135° vom erwarteten Anstieg abweicht (siehe Abbildung).

Trotz dieser Schwierigkeiten bewerte ich diesen Versuch als Erfolg, da unter Beachtung dieser Fehlerquellen man zu der Überzeugung kommen kann, dass die beiden Messverfahren ihre Existenzberechtigung besitzen.

Die abgezeichneten Messwerte sind im Anhang zu finden,

Jena, 28.04.2002

Versuchsprotokolle
