

Versuch 104

Biegung

Aufgaben:

1. Messen der Durchbiegung diverser Stäbe in Abhängigkeit von der Belastung.
2. Bestimmen des Elastizitätsmoduls bezüglich des Trägers.

Grundlagen

Verformungen- und Verformungsarten

Jeder Körper, auf den eine Kraft gegen einen Teil seiner Oberfläche einwirkt, wird verformt. Dabei ergibt sich in Abhängigkeit von der Stärke der Kraft F (bzw. Zugspannung $\sigma = F/A$) die Art der Verformung.

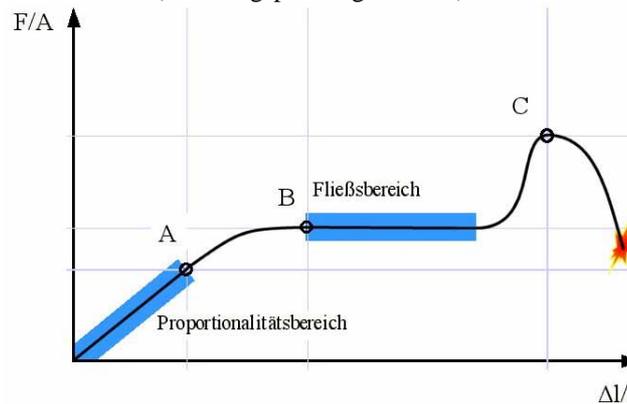


ABB I.1: schematisches Verformungsverhalten eines Körpers bei diversen Zugspannungen

Ist die Zugspannung relativ gering, ergibt sich ein proportionales Verformungsverhalten. Den Punkt A, ab dem die Proportionalität nicht länger gilt, nennt man Proportionalitätsgrenze. Ab dem Punkt B, der sogenannten Fließgrenze, beginnt der Fließbereich, in dem sich der Körper ohne weitere Kraftaufwendung reversibel weiter verformt. Bei Punkt C, der Reißfestigkeit σ_E , beginnt der Körper sich irreversibel zu verformen und es kommt zum Zerreißen.

Das Hookesche Gesetz

Innerhalb des Proportionalitätsbereiches kann man stoffspezifisch angeben:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \cdot \frac{F}{A}$$

Ersetzt man bei einer gegebenen Feder $D = \frac{l}{E \cdot A}$, so ergibt sich die bekannte Federgleichung:

$$\Delta l = D \cdot F$$

Der gebogene Balken



ABB I.2.A: Ein stinknormaler Balken besitzt eine Länge l und eine neutrale Faser,...

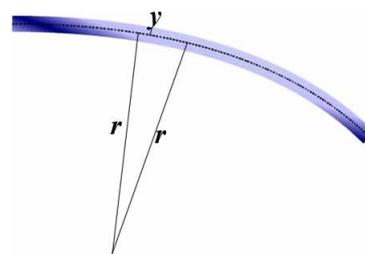


ABB I.2.B: ... welche bei einer Biegung keine Längenveränderung erfährt, während alle um y darüber- oder daruntergelegenen Fasern durch die infinitesimale Kraft dF um Δl_F ausgelenkt werden. Es gilt:

$$\Delta l_F = (l_F + \Delta l_F) - l_F = 2\Pi(r + y) - 2\Pi r = 2\Pi y$$

Versuchsprotokolle

Nun betrachten wir uns die Kraft dF einmal etwas genauer. Da diese an eine infinitesimal kleine Fläche angreift, nämlich an $dA=dydx$, lautet das Hookesche Gesetz für dF :

$$dF = \frac{y}{r} E \cdot dA$$

Gleichzeitig aber wirkt um die neutrale Faser ein Drehmoment, da oberhalb und unterhalb dessen innere Kräfte einwirken, wie bereits beschrieben. Dieses Drehmoment kann folgendermaßen beschrieben werden:

$$D = \int dF dy = \int \left(y \frac{E}{r} dA \right) dy = \frac{E}{r} \int \int y dy dA = \frac{E}{r} \int \frac{1}{2} y^2 dA = \frac{E}{2r} \Theta$$

Θ ist also ein Flächenintegral über y^2 , was so viel bedeutet, dass die Durchbiegung nicht nur von dem Elastizitätstensor, sondern ebenso von der Form der Querschnittsfläche abhängig ist. Dem folgt, dass ein Träger umso stabiler ist, je weiter die infinitesimalen Massen von der neutralen Faser entfernt liegen (z.B.: Hohlknochen, Doppel- T- Träger, Kreuzträger, Schienen).

Für die Durchbiegungsstrecke s gilt demzufolge:

$$s = \frac{l^3 \cdot F}{3 \cdot E \cdot \Theta}$$

Der durchgebogene Balken

Generell lässt sich das Problem des durchgebogenen Balkens auf das eines gebogenen zurückführen. Da „*actio gleich reactio*“ gilt, muss die Gewichtskraft von den zwei Auflagepunkten aufgebracht werden. Und da F_{Gew} in der Mitte zwischen den beiden Punkten angreift, so müssen die Gegenkräfte nach dem Hebelgesetz gleich groß sein.

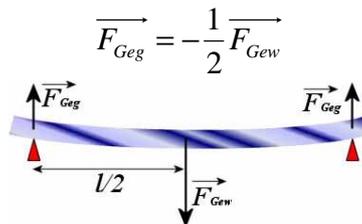


ABB I.3: Der durchgebogene Balken und die darauf einwirkenden Kräfte. Das Problem lässt sich durch diese Art von Betrachtung auf das bisher Bekannte, den einseitig eingespannten Balken, zurückführen.

Jetzt könnte man das Gebilde auf Grund dessen auch als ein einseitig eingespannter Hebel mit der angreifenden Kraft F_{Geg} und der Länge $l/2$ auffassen. Also:

$$s = \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^3 \cdot F}{3 \cdot E \cdot \Theta} = \frac{l^3 \cdot F}{16 \cdot 3 \cdot E \cdot \Theta} = \frac{l^3 \cdot F}{48 \cdot E \cdot \Theta}$$

$$E = \frac{l^3 \cdot F}{48 \cdot s \cdot \Theta} = \frac{l^3}{48 \cdot \Theta} \cdot \frac{F}{s}$$

Elastizitätsmodule diverser Stoffe

Auszug aus: Kane & Laby

Stoff	E in GPas	Stoff	E in GPas	Stoff	E in GPas	Stoff	E in GPas
Aluminium	70,3	Weicheisen	211,4	Titan	115,7	Messing*	100,6
Bismut	31,9	Gusseisen	152,3	Wolfram	411,0	Stahl	211,9
Cadmium	49,9	Niob	104,9	Vanadium	127,6	~ (3/4% C)	210,4
Chrom	279,1	Platin	168,0	Zink	108,4	~ (3/4% C, hart)	201,4
Kupfer	129,8	Silber	82,7	Nickel (weich)	199,5	~ (Werkzeug)	211,6
Gold	78,0	Tantal	185,7	Nickel (hart)	219,2	~ (Werkzeug, hart)	203,2
Blei	16,1	Zinn	49,9	Magnesium	44,7	Edelstahl	215,3

*Legierung aus: 70% Zn, 30% Cu

Quellenangabe:

FSU: „Physikalisches Grundpraktikum“, Kane & Laby: „Table of phy. And chem. Constants“

Versuchsprotokolle

Durchführung

Versuchsobjekte:

Auflageanordnung, Messmikroskop, Gewichtsauflängung, Gewichte, 3 verschiedene Träger

mögliche systematische Fehler:

Die Gewichtsauflängung befindet sich nicht korrekt in der Mitte, wodurch die Annahme in der Herleitung, dass $F_{Geg} = F_{Gew}/2$ und $l = l_{Ges}/2$ seien, nicht mehr korrekt ist und die Formel gilt nicht mehr für diese Problemstellung.

Versuchsablauf:

- Bestimmen der Vergrößerung des Mikroskops
- Messen der Durchbiegung des Trägers bei diversen Gewichten
- Berechnen des Elastizitätsmoduls

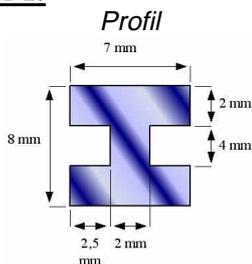
Fehlerrechnung:

$$\Delta V_{Mik} = \left| \frac{\partial V_{Mik}}{\partial s_{Urb}} \right| \Delta s_{Urb} + \left| \frac{\partial V_{Mik}}{\partial s_{Abb}} \right| \Delta s_{Abb} = V_{Mik} \cdot \left(\frac{\Delta s_{Urb}}{s_{Urb}} + \frac{\Delta s_{Abb}}{s_{Abb}} \right)$$

$$\Delta E = \left| \frac{\partial E}{\partial l} \right| \Delta l + \left| \frac{\partial E}{\partial \Theta} \right| \Delta \Theta + \left| \frac{\partial E}{\partial F} \right| \Delta F + \left| \frac{\partial E}{\partial s} \right| \Delta s = E \cdot \left(3 \cdot \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta \Theta}{\Theta} + \frac{\Delta F}{F} + \frac{\Delta s}{s} \right)$$

Messwerte

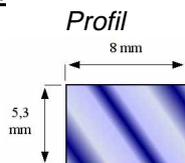
Träger 1:



Messwerte

m in g	s_{Abb} in mm
0 ± 0	71 ± 1
$10 \pm 0,01$	71 ± 1
$20 \pm 0,02$	$70,5 \pm 1$
$50 \pm 0,05$	69 ± 1
$75 \pm 0,075$	$68,5 \pm 1$
$100 \pm 0,1$	68 ± 1
$200 \pm 0,2$	64 ± 1
$500 \pm 0,5$	52 ± 1
$750 \pm 0,75$	43 ± 1
1000 ± 1	34 ± 1

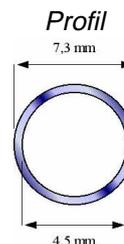
Träger 2:



Messwerte

m in g	s_{Abb} in mm
0 ± 0	96 ± 1
$10 \pm 0,01$	95 ± 1
$20 \pm 0,02$	94 ± 1
$50 \pm 0,05$	91 ± 1
$75 \pm 0,075$	88 ± 1
$100 \pm 0,1$	85 ± 1
$200 \pm 0,2$	75 ± 1
$500 \pm 0,5$	41 ± 1
$750 \pm 0,75$	15 ± 1

Träger 3:



Messwerte

m in g	s_{Abb} in mm
0 ± 0	40 ± 1
$10 \pm 0,01$	$38,5 \pm 1$
$20 \pm 0,02$	37 ± 1
$50 \pm 0,05$	$33,5 \pm 1$
$75 \pm 0,075$	31 ± 1
$100 \pm 0,1$	28 ± 1
$200 \pm 0,2$	16 ± 1

Auswertung

Konstanten

$l = 625 \text{ mm}$

$g = 9,81 \frac{m}{s^2} = 9810 \frac{mm}{s^2}$

$V = \frac{s_{Abb}}{s_{Urb}} = \frac{100 \text{ mm}}{4,8 \text{ mm}} = 20,83$

Versuchsprotokolle

Profilberechnung

Träger 1:

$$\Theta = \frac{(7 \cdot 8^3 + 2 \cdot 2,5 \cdot 4^3) \text{mm}^4}{12}$$

$$= 272 \text{mm}^4$$

$$\Delta\Theta = \sum_{i=\{a,b,h,d\}} \left| \frac{\partial\Theta}{\partial i} \right| \Delta i = 6,4 \text{mm}^4$$

Träger 2:

$$\Theta = \frac{(8 \cdot 5,3^3) \text{mm}^4}{12}$$

$$= 99,25 \text{mm}^4$$

$$\Delta\Theta = \sum_{i=\{b,h\}} \left| \frac{\partial\Theta}{\partial i} \right| \Delta i = 2,49 \text{mm}^4$$

Träger 3:

$$\Theta = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2429,76 \text{mm}^4}{16}$$

$$= 119,27 \text{mm}^4$$

$$\Delta\Theta = \sum_{i=\{R,r\}} \left| \frac{\partial\Theta}{\partial i} \right| \Delta i = 4,71 \text{mm}^4$$

Werteberechnung

$$E = \frac{l^3}{48 \cdot \Theta} \cdot \frac{F}{s}$$

Da s als eine trägerspezifische, lineare Funktion in Abhängigkeit von der einwirkenden Kraft angesehen werden kann, solange die Kraft nicht die Proportionalitätsgrenze überschreitet, kann man auch mittels Anstiegsgleichung für E formulieren:

$$E = \frac{l^3}{48 \cdot \Theta} \cdot \frac{F_2 - F_1}{s_2 - s_1} \text{ mit}$$

$$s = s_{Urb} = \frac{s_{Abb}}{V_{Mik}} \text{ und}$$

$$F = m \cdot g$$

Auf Grund der optischen Eigenschaften eines einfachen Mikroskops (Bild Drehung) verläuft der gemessene Auslenkungsanstieg negativ zum tatsächlichen. Somit ergibt sich:

$$E = \frac{l^3 \cdot g \cdot V_{Mik}}{48 \cdot \Theta} \cdot \frac{m_2 - m_1}{s_{Abb_1} - s_{Abb_2}}$$

Träger 1:

$$E = \frac{l^3 \cdot g \cdot V_{Mik}}{48 \cdot \Theta} \cdot \frac{1000 \text{g}}{37 \text{mm}}$$

$$= 1,03273 \cdot 10^{11} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2 \cdot \text{m}^2}$$

$$= 103,273 \text{GPas}$$

Träger 2:

$$E = \frac{l^3 \cdot g \cdot V_{Mik}}{48 \cdot \Theta} \cdot \frac{750 \text{g}}{81 \text{mm}}$$

$$= 9,6562 \cdot 10^{10} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2 \cdot \text{m}^2}$$

$$= 96,562 \text{GPas}$$

Träger 3:

$$E = \frac{l^3 \cdot g \cdot V_{Mik}}{48 \cdot \Theta} \cdot \frac{200 \text{g}}{24 \text{mm}}$$

$$= 7,2618 \cdot 10^{10} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2 \cdot \text{m}^2}$$

$$= 72,618 \text{GPas}$$

Fehlerabschätzung

Es gilt:

$$\Delta E = E \cdot \left(3 \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta V_{Mik}}{V_{Mik}} + \frac{\Delta\Theta}{\Theta} + 2 \frac{\Delta m}{m} + \frac{2 \cdot \Delta s_{Abb}}{s_{Abb_1} - s_{Abb_2}} \right), \text{ wobei}$$

$$\frac{\Delta m}{m} = 0,001 = \frac{1}{1000} \text{ (lt. Versuchsinformation),}$$

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1 \text{mm} + 1 \text{mm}}{625} = \frac{2}{625} \text{ (1 mm Maßabweichung, 1 mm Diagonalfehler) und}$$

$$\frac{\Delta V_{Mik}}{V_{Mik}} = \frac{\Delta s_{Abb}}{s_{Abb}} = \frac{1,5}{100} \text{ (Mikroskopfehler auf Grund des lockeren Okulars und der Messparallaxe)}$$

Träger 1:

$$\Delta E = E \cdot 0,1042$$

$$= 10,759 \text{GPas}$$

Träger 2:

$$E = E \cdot 0,0764$$

$$= 7,375 \text{GPas}$$

Träger 3:

$$\Delta E = E \cdot 0,1495$$

$$= 10,853 \text{GPas}$$

Versuchsprotokolle

Ergebnisse

Träger 1:

$$E = (103,3 \pm 10,8) \text{GPas}$$

Träger 2:

$$E = (96,6 \pm 7,4) \text{GPas}$$

Träger 3:

$$E = (72,6 \pm 10,8) \text{GPas}$$

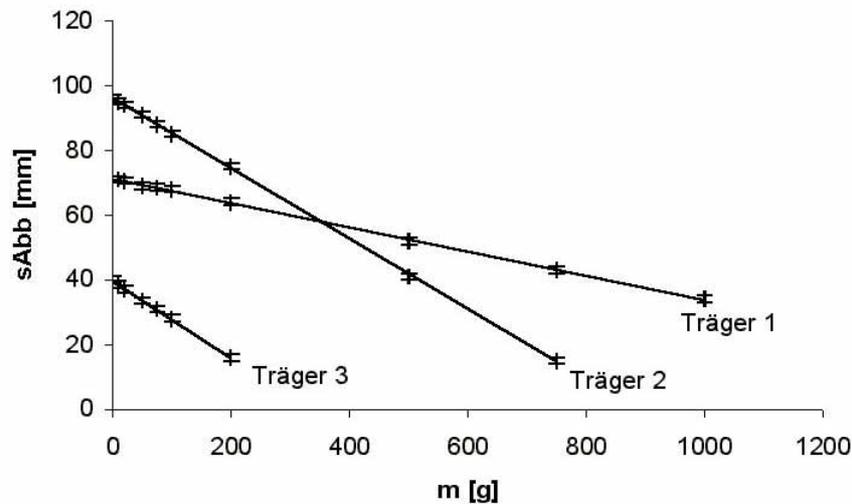


ABB II.1: Die gemessenen Auslenkungen in Abhängigkeit von der aufgelegten Masse. Durch die optischen Eigenschaften des Mikroskops sind die gemessenen Anstiege in negativer Richtung zur Wirklichkeit.

Diskussion

Die Ergebnisse fallen sehr zufriedenstellend aus, die Elastizitäten konnten mit einer der Aufgabenstellung genügenden Genauigkeit angegeben werden (siehe unten).

Schwachpunkt der Ergebnisse ist die Messung für Träger 3, welche auf Grund des geringen Messintervalls einen verhältnismäßig großes Fehlerintervall hat. Doch auf der Basis einer graphischen Auswertung kann man davon ausgehen, dass auch der ermittelte Wert weit genauer als die Abschätzung dessen Größtfehlers ist, da die Messpunkte der erwarteten Proportionalität entsprechen und signifikant nahe (wenn nicht sogar auf) der Regressionsgeraden liegen. Bei einer Wiederholung des Experiments lege ich also hier nahe, das Mikroskop derart zu zustieren, dass das Fadenkreuz möglichst weit unten auf der Skala erscheint, wie es bei der Bemessung von Träger eins geschehen ist.

Ein weiteres Ziel des Experiments war es, die ermittelten Werte mit physiküblichen Tabellenwerten zu vergleichen, also Rückschlüsse auf den verwendeten Stoff ziehen. Dies ist mir im Fall von unbekanntem Metallen zu heikel, da jede mögliche Elastizität allein durch ein unterschiedliches Mischverhältnis der verwendeten Legierung bzw. den chem. Bestandteilen und Zusätzen (siehe: Tabellenwerte aus der Vorbetrachtung für Stahl) erreicht werden könnte. Folglich gehe ich nur soweit, eine Vermutung auszusprechen, alles andere wäre pure Spekulation. Für eine solche jedoch ist es durchaus legitim, wenn ein Größtfehlerintervall von 15% vorliegt. Die Ergebnisse also legen die Vermutung nahe, dass Träger 1 und 2 aus Messing ($E \approx 100 \text{ GPas}$, Träger 3 aus Aluminium gefertigt ist).

Ein zusätzliches „Nebenprodukt“ dieses Versuches ist ebenfalls, dass wir die Proportionalitätsgrenze nach unten abschätzen können. Wie ABB II zeigt, bleiben sämtliche Messergebnisse innerhalb des Proportionalitätsbereiches. Bei einem Gewicht der Messgeräte (Messhaken und Gewichtskorb) von insgesamt 163g ist die Bereichsgrenze oberhalb von 1163g (Träger 1), 913g (Träger 2) und 363g (Träger 3) zu finden. Weitere Experimente mit diesen Trägern können dieses Wissen nutzen und können auf die Prüfung nach Reversibilität des Biegevorganges an diesem Versuch verzichten.

Der Versuch wurde bei Raumtemperatur vorgenommen. Die abgezeichnete Messwerte sind auf der nächsten Seite zu finden.

Ein gutes neues Jahr wünschend,
Jena, 02.01.2002

