

Versuch 005

## Dünne Linsen und Spiegel

### Aufgaben

1. Charakterisieren der drei gegebenen Linsen mittels Bildweiten-, Bessel- und Autokollimationsverfahren.
2. Bestätigen der Linsengleichung.
3. Bestimmen des Krümmungsradius und des Brennpunktes eines Brennsiegels.

### Grundlagen

#### Strahlenoptik

Die Strahlenoptik ist eine auf die Antike zurückgehende Vorstellung von der Beschaffenheit des Lichtes und geht davon aus, dass sich Licht als Strahl oder einen Bündel Lichtstrahlen auffassen lässt. Obwohl dieses Modell aus heutiger Sicht reichlich überholt und ungenau erscheint und zur Beschreibung des Lichtes völlig unzureichend ist, kann man mit Hilfe der Strahlenoptik die Eigenschaften Brechung und Reflexion für die Praxis einfach und handlich hinreichend genau beschreiben (siehe Bemerkungen zu Linsen und Linsengleichung).

Allerdings sind die Erklärungen der delikateren Eigenschaften des Lichtes; Beugung, Interferenz, Dopplereffekt, Photoeffekt und Krümmung erst den Theorien der Welle, des Quants oder der Relativität vorbehalten.

#### Dünne Linsen... dicke Linsen...

Ohne erklären zu können, warum Licht sich an Linsen bricht, beschreibt die Strahlenoptik das Verhalten von Licht an einer gleichförmigen Linse (ohne Zylinder oder Unebenheiten im Schliff). Man konstruiert von einem Punkt eines Gegenstandes den parallelen Strahl zur optischen Achse, sowie den Mittelpunktstrahl durch die Mitte der Linse. Der Parallelstrahl wird auf Grund der Brechung an der Linse zu einem Brennpunktstrahl. In dem Schnittpunkt des Brennpunktstrahles und des Parallelstrahls wird der Gegenstandspunkt scharf abgebildet. Da das Grundgesetz der Optik lautet: Der Lichtweg ist umkehrbar, kann man vom Bild mittels der gleichen Konstruktion auf den Gegenstand zurück schlussfolgern.

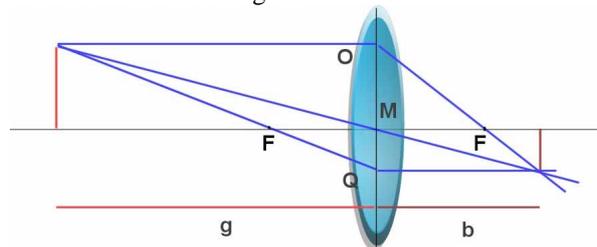


ABB. I.1: Brechungskonstruktion nach der Strahlenoptik an einer Sammellinse

Bei dicken Linsen kann man ohne Weiteres so nicht verfahren. Die Wellenlehre gibt darüber Auskunft, dass sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit bei Medienwechsel sich ändert. Dadurch ändert sich die Wellenlänge und es kommt durch Interferenz zu einer Krümmung der Wellenfronten, also zu einer Richtungsänderung. Bei dünnen Linsen (z.B. Fresnellinsen) wird der Strahlengang in der Linse vernachlässigt. Bei dicken Linsen aber wird die innere Strecke zu groß, so dass man mit zwei Linsenebenen arbeitet bzw. die Linse ersatzweise in zwei gleiche, dünne Linsen aufspaltet.

#### Die Linsengleichung

Wir betrachten uns einmal für eine dünne Linse die in der Strahlenkonstruktion wichtigen Lichtstrahlen Parallelstrahl, Brennstrahl und Mittelpunktstrahl. Der Schnittpunkt der Parallel- und Brennstrahlen sei O respektive Q und der Mittelpunkt der Linse M, welcher in der Linsenebene liegt und vom Mittelpunktstrahl berührt wird. Es gilt auf Grund der Strahlensätze:

$$\frac{\overline{MQ}}{f} = \frac{\overline{OQ}}{g} = \frac{\overline{OQ}}{b}$$

$$\frac{\overline{OM}}{b} = \frac{\overline{MQ}}{g}$$

$$\overline{OM} = \frac{b}{g} \overline{MQ}$$

## Versuchsprotokolle

Unter Hinzunahme der Tatsache, dass  $\overline{OM} + \overline{MQ} = \overline{OQ}$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} \overline{MQ} + \frac{b}{g} \overline{MQ} &= \overline{OQ} \\ \overline{MQ} \cdot \left(1 + \frac{b}{g}\right) &= \overline{OQ} \\ \frac{\overline{MQ}}{f} &= \frac{\overline{MQ}}{b} \cdot \left(1 + \frac{b}{g}\right) \\ \frac{1}{f} &= \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \end{aligned}$$

### Linsenkombinationen

Werden zwei Linsen hintereinander montiert, so dass sie gegenseitig innerhalb ihrer Brennpunkte liegen, so gilt:

$$\frac{1}{f_{Ges}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

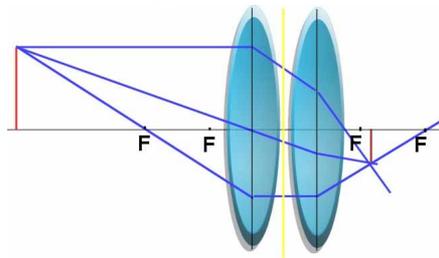


ABB. I.2: Zwei Linsen werden innerhalb ihrer Brennpunkte kombiniert. Es ergibt sich eine neue Brennweite  $f_{Ges}$  und eine neue Linsenebene

### Bestimmen der Brennweite: Messen von Gegenstands- und Bildweite

Das Verfahren ist ganz und gar simpel: Man misst bei einer scharfen Abbildung die Gegenstandsweite  $g$  und die Bildweite  $b$ , setzt sie in die Linsengleichung und errechnet dadurch die Brennweite  $f$ . Bei Streulinsen nutzt man die Möglichkeit des Kombinierens von Linsen. Mit einer Sammellinse kleinerer Brennweite in Verbindung mit einer Streulinse erhält man ein reelles Bild und kann durch die Formel  $\frac{1}{f_z} = \frac{1}{f_s} - \frac{1}{f_{Ges}}$  berechnet werden.

Nachteil bei dieser Methode ist allerdings, dass man nicht genau weiß, wo genau die Linsenebene liegt.  $f$  kann also nur annähernd bestimmt werden.

### Bestimmen der Brennweite: Besselverfahren

Dieses Problem wird beim Besselverfahren umgangen: Ist die Apparatur so justiert, dass der Gegenstand scharf abgebildet wird, so misst man nur die Wegstrecke  $e$ , um die man die Linse verschieben muss, bis der Gegenstand wieder scharf abgebildet wird. Es gelten laut Skizze folgende Beziehungen:

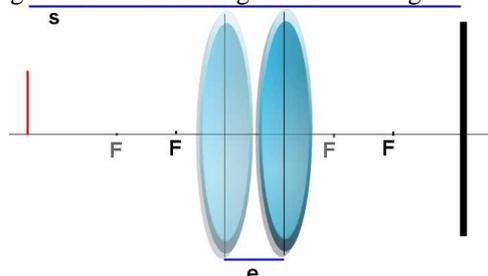


ABB. I.3: Schematisierung für das Besselverfahren

$$\begin{aligned} g_1 + b_1 &= s, g_2 + b_2 = s \Rightarrow g_1 + b_1 = g_2 + b_2 \\ \frac{1}{f} &= \frac{1}{g_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{g_2} + \frac{1}{b_2} \Rightarrow (g_1 + b_1) \cdot g_2 b_2 = (g_2 + b_2) \cdot g_1 b_1 \\ &\Rightarrow g_1 = b_2, b_1 = g_2 \Rightarrow \text{symmetrisch} \end{aligned}$$

**Versuchsprotokolle**

Also ist die Anordnung der Linsenstellungen symmetrisch. Nun kann man aus der Entfernung von Gegenstand und Schirm  $g + b = s$  und der Wegstrecke  $e$  die Brennweite  $f$  berechnen zu:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g_1 + e} + \frac{1}{g_2} = \frac{g_1 + g_2}{g_1 \cdot g_2} = \frac{\frac{s-e}{2} + \frac{s+e}{2}}{\frac{s-e}{2} \cdot \frac{s+e}{2}} = \frac{4s}{s^2 - e^2}$$

$$f = \frac{1}{4} \left( s - \frac{e^2}{s} \right)$$

**Bestimmen der Brennweite: Autokollimationsverfahren**

Stellt man hinter die zu prüfende Linse einen Planspiegel, so ergibt sich optisch eine Linsenkombination mit zwei gleichen Linsen der Brennweite  $f$ . Aus der Linsengleichung folgt, dass das Abbild scharf wird, denn der Gegenstand im Brennpunkt steht. Beweis:

**Linsenfehler**

Nicht aus der Strahlenoptik, sondern aus der Wellenlehre folgt, dass für verschiedenfarbiges Licht die Brechung unterschiedlich ist (Dispersion). Damit folgt auch für eine Linse, dass es für jede Spektralfarbe des eingehenden Lichtes voneinander (wenn auch geringfügig) verschieden (chromatischer Fehler).

**Hohlspiegel**

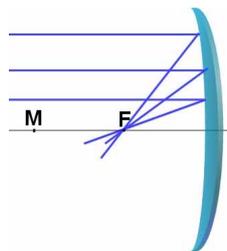


ABB I.4: Brennpunkt am Hohlspiegel

Nach dem Reflektionsgesetz gilt:  $\alpha = \alpha'$ , d.h. der eintreffende Lotwinkel ist gleich dem Lotwinkel des austretenden Strahls. Daraus folgt (laut Skizze), dass sich alle Parallelstrahlen in einem festen Brennpunkt treffen, welcher sich auf der Hälfte des Krümmungsradius befindet.

$$f = \frac{1}{2} R$$

Aus der Forderung, dass der Lichtweg umkehrbar sein muss und so auch das Bild wieder zum Gegenstand werden kann und sich auf den ursprünglichen Versuchskörper abbildet, folgt, dass ein scharfes Bild im Krümmungsmittelpunkt, also bei  $2f$  zu erwarten ist.

***Versuchsdurchführung***

**Versuchsteil I: Charakterisierung der Linsen**

**Versuchsobjekt:**

Lichtquelle mit Gegenstandsobjekt (Pfeil), optische Bank, Schirm, Linse, Spiegel

**Versuchsskizze:**

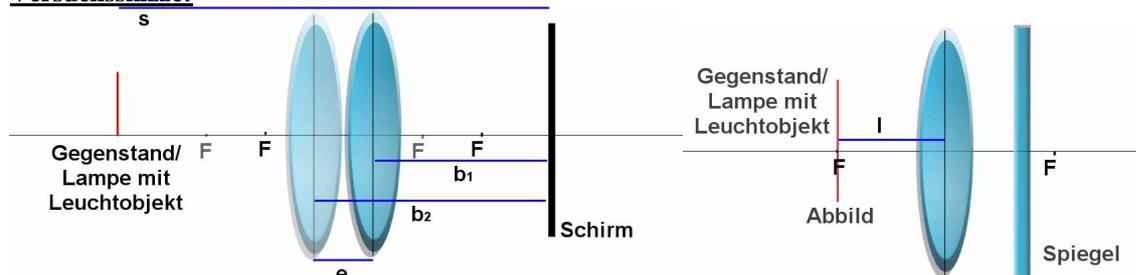


ABB. II.1: Aufbau der optischen Bank für das Besselverfahren; ABB. II.2: ... und für die Autokollimation.

## Versuchsprotokolle

---

### Mögliche systematischen Fehler:

Die Maßplatte der optischen Bank war gewissermaßen leicht durchbogen und schräg. Das führt zwangsläufig zu Ungenauigkeiten in der Skalierung und damit zu ungenauer Bestimmung der Brennweite.

### Zu erwartendes Ergebnis:

Die Herstellerangaben sind zu bestätigen.

### Versuchsablauf:

- Aufbau der optischen Bank für das Besselverfahren
- Messen von  $s$ ,  $b_1$  und  $b_2$
- Aufbau der optischen Bank für die Autokollimation
- Messen von  $l$

### Fehlerrechnung:

für die  $b$ - $g$ - Messung gilt:

$$\Delta f = \left| \frac{df}{dg} \right| \Delta g + \left| \frac{df}{db} \right| \Delta b = \frac{b^2}{(g+b)^2} \Delta g + \frac{g^2}{(g+b)^2} \Delta b$$

für die Messung nach Bessel:

$$\Delta f = \left| \frac{df}{ds} \right| \Delta s + \left| \frac{df}{de} \right| \Delta e = \left( 1 + \frac{e^2}{s^2} \right) \frac{\Delta s}{4} + \frac{e}{2s} \Delta e$$

für das Autokollimationsverfahren gilt:

$$\Delta f = \Delta l$$

für die Streulinse ( $f_z$ ) gilt weiterhin:

$$\Delta f_z = \left| \frac{df_z}{df_s} \right| \Delta f_s + \left| \frac{df_z}{df_{Ges}} \right| \Delta f_{Ges} = \left| \frac{f_{Ges}^2}{(f_s + f_{Ges})^2} \right| \Delta f_s + \left| \frac{f_s^2}{(f_s + f_{Ges})^2} \right| \Delta f_{Ges}$$

## Versuchsteil II: Bestimmung des Brennpunktes des Hohlspiegels

### Versuchsobjekt:

Lichtquelle mit Gegenstandsobjekt (Pfeil), optische Bank, Hohlspiegel

### Versuchsskizze:

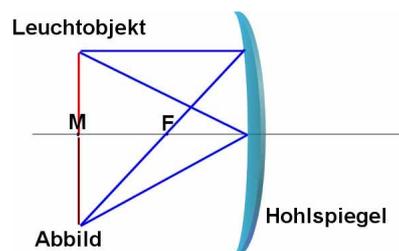


ABB. II.3: Autokollimation am Hohlspiegel.

### Mögliche systematischen Fehler:

Die Maßplatte der optischen Bank war gewissermaßen leicht durchbogen und schräg. Das führt zwangsläufig zu Ungenauigkeiten in der Skalierung und damit zu ungenauer Bestimmung der Brennweite.

### Versuchsablauf:

- Aufbau der optischen Bank für die Autokollimation
- Messen von  $l$

### Fehlerrechnung:

$$\Delta f = \frac{1}{2} \Delta l$$

## Versuchsprotokolle

---

### Messwerte

#### Versuchsteil I: Charakterisierung der Linsen

##### Linse 1:

*b-g- und Besselmessung:*

s in cm	$b_1$ in cm	$g_1$ in cm	$b_2$ in cm	$g_2$ in cm
59,9	14,9	45	45,1	14,8
74,4	60,6	13,8	14	60,4
140	127,5	12,5	12,2	127,8
165	12,7	152,3	152,7	12,3
45	25,3	19,7	21,3	23,7

*Autokollimation:*

$l_1$ in cm	$l_2$ in cm	$l_3$ in cm
11,3	11,2	11,2

*Herstellerangabe:*

$$f=1/9\text{m}$$

##### Linse 2:

*b-g- und Besselmessung:*

s in cm	$b_1$ in cm	$g_1$ in cm	$b_2$ in cm	$g_2$ in cm
185	30,5	154,5	156,6	28,4
150	118,9	31,1	32,4	117,6
100	43,9	56,1	51,3	48,7

*Autokollimation:*

$l_1$ in cm	$l_2$ in cm	$l_3$ in cm	$l_4$ in cm	$l_5$ in cm
24,8	24,6	24,5	24,4	24,5

*Herstellerangabe:*

$$f=1/4\text{m}$$

##### Linse 3:

*b-g- und Besselmessung:*

s in cm	$b_1$ in cm	$g_1$ in cm	$b_2$ in cm	$g_2$ in cm
155	131	24	25,9	129,1
100	68	32	31,6	68,4
185	159,5	25,5	25,3	159,7

*Autokollimation:*

$l_1$ in cm	$l_2$ in cm	$l_3$ in cm
21,2	20,6	21,2

*Herstellerangabe:*

$$f_z=-2/9\text{m}$$

$$f_s=1/9\text{m}$$

#### Versuchsteil II: Bestimmung des Brennpunktes des Hohlspiegels

$l_1$ in cm	$l_2$ in cm	$l_3$ in cm
100,3	100,7	100,2

### Auswertung

Da die Messwertskala nicht an der Lichtquelle begann, sondern erst bei 10 cm, so rechne ich zu dem eigentlichen Ablesefehler noch den Ablesefehler an der Lichtquelle hinzu.

**Versuchsprotokolle**

**Versuchsteil I: Charakterisierung von Linsen**

für die b-g- Messung gilt:

$$f = \frac{bg}{b+g}$$

$$\Delta f = \left| \frac{df}{dg} \right| \Delta g + \left| \frac{df}{db} \right| \Delta b = \frac{b^2}{(g+b)^2} \Delta g + \frac{g^2}{(g+b)^2} \Delta b$$

	<b><u>1. Linse</u></b>	<b><u>2. Linse</u></b>	<b><u>3. Linse (komb. Mit Linse 1)</u></b>
Ablesefehler:	± 1 mm	± 1 mm	± 1 mm
Objektive Schärfe bei:	± 3 mm	± 5 mm	± 2 mm

$\Delta g$  und  $\Delta b$  sind beide vom Ablese- und vom Unschärfefehler betroffen.  $\Delta g = \Delta b$ .

für die Messung nach Bessel:

$$f = \frac{1}{4} \left( s - \frac{e^2}{s} \right)$$

wobei:  $e = |b_1 - b_2|$

$$\Delta f = \left| \frac{df}{ds} \right| \Delta s + \left| \frac{df}{de} \right| \Delta e = \left( 1 + \frac{e^2}{s^2} \right) \frac{\Delta s}{4} + \frac{e}{2s} \Delta e$$

	<b><u>1. Linse</u></b>	<b><u>2. Linse</u></b>	<b><u>3. Linse (komb. Mit Linse 1)</u></b>
Ablesefehler:	± 1 mm	± 1 mm	± 1 mm
Objektive Schärfe bei:	± 3 mm	± 5 mm	± 2 mm

$\Delta e$  ist vom Ablese- und vom Schärfefehler betroffen, während  $\Delta s$  ist ein reiner einem Ablesefehler.

für das Autokollimationsverfahren gilt:

$$f = l$$

$$\Delta f = \Delta l$$

	<b><u>1. Linse</u></b>	<b><u>2. Linse</u></b>	<b><u>3. Linse (komb. Mit Linse 1)</u></b>
Ablesefehler:	± 1 mm	± 1 mm	± 1 mm
Objektive Schärfe bei:	± 1 mm	± 2 mm	± 3 mm

$\Delta l$  ist sowohl vom Ablese- als auch vom Schärfefehler betroffen.

**Versuchsteil II: Bestimmung der Brennweite des Hohlspiegels**

$$f = \frac{1}{2} l$$

$$\Delta f = \frac{1}{2} \Delta l$$

Ablesefehler:	± 1 mm
Objektive Schärfe bei:	± 2,5 mm

$\Delta l = 3,5 \text{ mm}$

**Ergebnisse**

**Versuchsteil I: Charakterisierung der Linsen**

**Linse 1:**

*b-g- und Besselmessung:*

s in cm	b <sub>1</sub> in cm	g <sub>1</sub> in cm	b <sub>2</sub> in cm	g <sub>2</sub> in cm	e in cm	f <sub>1</sub> in cm	f <sub>2</sub> in cm	f <sub>Bessel</sub> in cm
59,9	14,9	45	45,1	14,8	30,2	11,19 ± 0,25	11,14 ± 0,25	11,17 ± 0,13
74,4	60,6	13,8	14	60,4	46,6	11,24 ± 0,28	11,37 ± 0,28	11,30 ± 0,16
140	127,5	12,5	12,2	127,8	115,3	11,38 ± 0,33	11,14 ± 0,34	11,26 ± 0,21
165	12,7	152,3	152,7	12,3	140	11,72 ± 0,34	11,38 ± 0,34	11,55 ± 0,21
45	25,3	19,7	21,3	23,7	4	11,08 ± 0,20	11,22 ± 0,20	11,16 ± 0,05

**Versuchsprotokolle**

*Autokollimation:*

$l_1$ in cm	$l_2$ in cm	$l_3$ in cm	$\varnothing l$ in cm	$f$ in cm
11,3	11,2	11,2	11,23	$11,23 \pm 0,2$

*Herstellerangabe:*

$f = 1/9m = 11,1 \text{ cm}$

**Linse 2:**

*b-g- und Besselmessung:*

s in cm	$b_1$ in cm	$g_1$ in cm	$b_2$ in cm	$g_2$ in cm	e in cm	$f_1$ in cm	$f_2$ in cm	$f_{Bessel}$ in cm
185	30,5	154,5	156,6	28,4	126,1	$25,47 \pm 0,43$	$24,04 \pm 0,44$	$24,76 \pm 0,24$
150	118,9	31,1	32,4	117,6	86,5	$24,65 \pm 0,40$	$25,40 \pm 0,40$	$25,03 \pm 0,21$
100	43,9	56,1	51,3	48,7	7,4	$24,63 \pm 0,30$	$24,98 \pm 0,30$	$24,86 \pm 0,05$

*Autokollimation:*

$l_1$ in cm	$l_2$ in cm	$l_3$ in cm	$l_4$ in cm	$l_5$ in cm	$\varnothing l$ in cm	$f$ in cm
24,8	24,6	24,5	24,4	24,5	24,56	$24,56 \pm 0,2$

*Herstellerangabe:*

$f = 1/4m = 25 \text{ cm}$

**Linse 3:**

*b-g- und Besselmessung:*

s in cm	$b_1$ in cm	$g_1$ in cm	$b_2$ in cm	$g_2$ in cm	e in cm	$f_1$ in cm	$f_2$ in cm	$f_{Bessel}$ in cm
155	131	24	25,9	129,1	105,1	$20,28 \pm 0,22$	$21,57 \pm 0,22$	$20,93 \pm 0,14$
100	68	32	31,6	68,4	36,4	$21,75 \pm 0,17$	$21,61 \pm 0,17$	$21,69 \pm 0,08$
185	159,5	25,5	25,3	159,7	134,2	$21,99 \pm 0,23$	$21,84 \pm 0,23$	$21,91 \pm 0,15$

*Autokollimation:*

$l_1$ in cm	$l_2$ in cm	$l_3$ in cm	$\varnothing l$ in cm	$f$ in cm
21,2	20,6	21,2	21,0	$21,0 \pm 0,4$

Wähle aus Versuch „Linse 1“ den Wert der ersten Besselmessung und den  $f_1$ - Wert der dritten Messreihe, da diese den Herstellerwert am Besten „einschließen“:  $f_s = 11,17 \pm 0,13 \text{ cm}$ ,  $f_{Ges} = 21,99 \pm 0,23 \text{ cm}$ .

$$\frac{1}{f_z} = \frac{1}{f_{Ges}} - \frac{1}{f_s} = \frac{1}{21,99 \text{ cm}} - \frac{1}{11,17 \text{ cm}}; \Delta f_z = \frac{f_s^2 \cdot \Delta f_{Ges} + f_{Ges}^2 \cdot \Delta f_s}{(f_s + f_{Ges})^2} = \frac{28,70 \text{ cm}^3 + 62,86 \text{ cm}^3}{(33,16 \text{ cm})^2}$$

$$\underline{\underline{f_z = -22,70 \pm 0,08 \text{ cm}}}$$

*Herstellerangabe:*

$f_z = -2/9m = -22,2 \text{ cm}$

$f_s = 1/9m = (11,17 \pm 0,13) \text{ cm}$

**Versuchsteil II: Bestimmung des Brennpunktes des Hohlspiegels**

$l_1$ in cm	$l_2$ in cm	$l_3$ in cm	$\varnothing l$ in cm	$f$ in cm
100,3	100,7	100,2	100,4	$100,4 \pm 0,35$

**Diskussion**

Die Herstellerangaben konnten wir bis auf einen halben cm genau bestimmen. Die Abweichungen bei Linse 2 sind mit dem zylindrischen Schliff zu erklären, der uns die Messung unheimlich erschwerte, da das Bild nie scharf, sondern lediglich geringst möglich unscharf einzustellen war. Bei Linse 3 liegt die Messgenauigkeit wohl in der Linsencombination und in der Tatsache, dass wir mit der Linsenebene der Linse 3, nicht aber mit der resultierenden Linsenebene (Ebene des Linsensystems) gearbeitet und gerechnet haben.

Möglicher weise ist bei Linse 3 eine systematische Korrektur wir nachträglich die resultierende Linsenebene bestimmt und die Ergebnisse korreliert. Apropos Ergebnisse: Die abgezeichneten Messdaten sind wie immer im Anhang zu finden.

Jena, 01.12.01

