

Versuch 002

## Messwertaufnahme und Messwertverarbeitung mit dem PC

### Aufgaben

1. Messung und Bestimmung der Ladezeitkonstante beim Aufladen eines Kondensators.
2. Messung und Bestimmung der Entladezeitkonstante beim Entladen eines Kondensators.

### Grundlagen

Die Kirchhoffschen Gesetze in einer elektrischen Schaltung

#### 1. Kirchhoffsches Gesetz (Knotenregel)

An jedem Knoten der Schaltung ist der Zufluss und der Abfluss aller ankommenden und abfließenden Ströme gleich:

$$\sum_{i=1}^n I_n = 0$$

#### 2. Kirchhoffsches Gesetz (Maschenregel)

In einem Stromkreis mit Verzweigungen gilt für jeden elementaren, zuschließenden Kreis auf Grund der Wegunabhängigkeit des Potentials zwischen den Punkten  $P_1$  und  $P_2$ , die über die Wege  $w_1$  und  $w_2$  miteinander in Verbindung stehen:

$$\sum U_{w_1} = \sum U_{w_2}$$

Die Verbindung  $w_1$  und  $w_2$  nennt man auch Masche.

Herleitung der Ladegleichung/ Entladegleichungen am Kondensator

Für den Kondensator gilt im Allgemeinen:

$$U_c = \frac{Q}{C}, \text{ wobei } Q = \int_0^{t'} I(t) dt$$

Laut des 2. Kirchhoffschen Gesetz gilt in der gesamten Schaltung:

$$U_0 = U_R + U_C = I(t) \cdot R + \frac{1}{C} \int_0^{t'} I(t) dt$$

$$U_0 - I(t) \cdot R = \frac{1}{C} \int_0^{t'} I(t) dt$$

Diese Gleichung lösen wir durch Differenzieren nach  $t$  und erhalten:

$$-\frac{d}{dt} I(t) \cdot R = \frac{1}{C} I(t)$$

$$\frac{d}{dt} I(t) = -\frac{1}{RC} I(t)$$

wobei die Lösung der Differentialgleichung bei:

$$I(t) = I(0s) \cdot e^{-\frac{1}{RC}t} = I_0 \cdot e^{-\frac{1}{RC}t} \text{ mit } I_0 = \frac{U_0}{R} \text{ (Zustand des ungeladenen Kondensators) ist.}$$

Den Term  $r$ , der aus  $-\frac{1}{RC} = -\frac{1}{r}$  folgt, bezeichnen wir als Lade, respektive Entladekonstante.

#### Der Ladevorgang:

Es gilt auf Grund der Maschenregel aus der Schaltung 1 (siehe Versuchsdurchführung)

$$U_0 = U_R + U_C$$

Umgestellt nach  $U_C$  ergibt sich

$$U_C = U_0 - U_R$$

## Versuchsprotokolle

---

Und es folgt eingesetzt:  $U_C = U_0 - I(t) \cdot R = I_0 \cdot R \cdot e^{-\frac{t}{r}} = U_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{r}})$ .

### Der Entladevorgang:

Es gilt in der Schaltung 2, welche zum Entladen eingesetzt wird, (siehe Versuchsdurchführung) nach der Maschenregel:

$$U_C = U_R,$$

also:

$$U_C = I_0 \cdot R \cdot e^{-\frac{t}{r}} = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{r}}$$

Damit haben wir alle benötigten Formeln für den Versuch.

## Versuchsdurchführung

### Versuchsteil I: Spannungsmessung beim Aufladen

#### Versuchsobjekt:

Schaltung (siehe Skizze) mit einem Ohm'schen Widerstand [10 kΩ oder 100 kΩ] und einem im Reihe dazu geschalteten Kondensator [10 μF oder 47 μF], PC- Interface zur Spannungsmessung, PC- Programm „Origin“.

#### Schaltungsskizze:

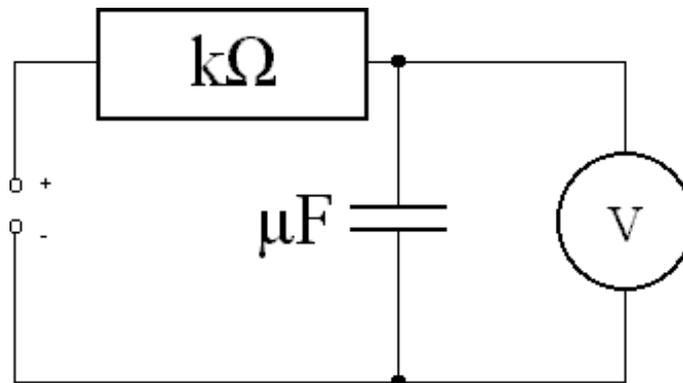


ABB. I.1: Schaltungsskizze zur Spannungsmessung beim Ladevorgang.

#### Mögliche systematische Fehler:

Durch die Spannungsmessung wird der Kondensator kontinuierlich entladen. Weiterhin hat auch der Kondensator einen elektrischen Widerstand, welcher sich in der Spannungsmessung bemerkbar macht. Eine weitere Fehlerquelle ist die Schaltung selbst, da ein Schalter zwischen den Zuständen Laden und Entladen (also Schaltung 1 und 2) die Zeiten des Kontaktschließens gegenüber einem geschickten Umsteckens erheblich verkürzt und so die Messungsergebnisse verbessert hätte.

#### Zu erwartendes Ergebnis:

$$r_{Mess} \approx r = RC$$

und eine Spannungskurve der Funktion

$$y = f(x) = A \cdot (1 - e^{-bx}), \text{ wobei } A \approx U_0 \text{ und } B \approx \frac{1}{r}$$

#### Versuchsablauf:

- Vorbereitung für je 3 Messwertaufnahmen je Bausteinkombination
- Starten der Messwertaufnahme am PC,
- Schließen des Stromkreises I der Schaltung
- Messwerttabelle in „Origin“ exportieren
- Bearbeiten und nichtlinear an die Parameter anfitten lassen

## Versuchsprotokolle

### Versuchsteil II: Spannungsmessung beim Entladen

**Versuchsobjekt:**

→ siehe Versuchsteil I

**Schaltungsskizze:**

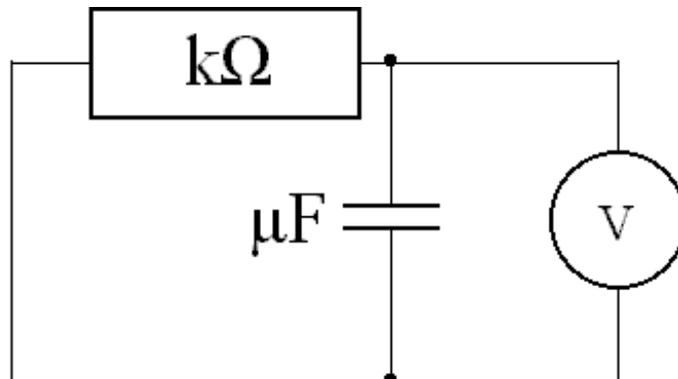


ABB. I.2: Schaltungsskizze zur Spannungsmessung beim Entladen.

**Mögliche systematische Fehler:**

→ siehe Versuchsteil I

**Zu erwartendes Ergebnis:**

$$r_{Mess} \approx r = RC$$

und eine Spannungskurve der Funktion

$$y = f(x) = A \cdot e^{-bx}, \text{ wobei } A \approx U_0 \text{ und } B \approx \frac{1}{r}$$

Ferner muss auf Grund der Tatsache  $r = RC = r_{Lade} = r_{Entlade}$

$$r_{Mess(\text{Versuchsteil I})} \approx r_{Mess(\text{Versuchsteil II})}$$

**Fehlerabschätzung:**

Da die Messung als solche völlig elektronisch durchgeführt wurde, können wir die Messungenauigkeiten, welche allein durch das Verfahren hervorgerufen wurden (z.B. die Messunschärfe auf  $\pm 1$  Bit bei 32 Bitmessungen, sowie die konstanten Messabstände von 0,1 s bei min. 33 MHz Bustakt) auf Grund ihrer Geringe relativ zu den Fehlern, welche durch die Messwertnachbearbeitung zustande kamen, vernachlässigen.

Was ich jedoch als Abschätzung noch betrachte, ist, dass ich annehme, dass jedes Bauteil eine Toleranz von  $\pm 0,05\%$  in seiner charakteristischen Messgröße besitzt.

Bei der Messwertnachbearbeitung mussten wir auf Grund schon beschriebener Umstände bis zu einer halben Sekunde die Kurve „verkürzen“. Dies hat sofortige und extrem relevante Auswirkungen auf  $A$ , somit auf  $b$  und schließlich auf  $r$ .

Für das Laden gilt:

$$\begin{aligned} y &= f(x) = A \cdot (1 - e^{-bx}) \\ 1 - e^{-bx} &= \frac{y}{A} \\ -bx &= \ln\left(1 - \frac{y}{A}\right) \\ b &= \frac{\ln\left(\frac{A}{A-y}\right)}{x} \end{aligned}$$

Für das Entladen gilt:

$$\begin{aligned} y &= f(x) = A \cdot e^{-bx} \\ e^{-bx} &= \frac{y}{A} \\ -bx &= \ln\left(\frac{y}{A}\right) \\ b &= \frac{\ln\left(\frac{A}{y}\right)}{x} \end{aligned}$$

wobei:  $y = U_C$ ,  $x = t$ ,  $A = U_0$ ,  $b = \frac{1}{r} = \frac{1}{RC}$

**Versuchsprotokolle**

Also gilt weiterhin:

Für das Laden gilt:

$$\frac{1}{r} = \frac{\ln\left(\frac{U_0}{U_0 - U_c}\right)}{t} = \frac{1}{RC}$$

$$\Delta r = \left| \frac{\partial r}{\partial R} \right| \cdot \Delta R + \left| \frac{\partial r}{\partial C} \right| \cdot \Delta C + \left| \frac{\partial r}{\partial U_0} \right| \cdot \Delta U_0$$

$$\Delta r = C \cdot \Delta R + R \cdot \Delta C + \frac{U_c \cdot t}{U_0 \cdot (U_0 - U_c) \cdot \ln^2\left(\frac{U_0}{U_0 - U_c}\right)} \cdot \Delta U_0$$

mit:

$$\Delta U_0 = \Delta A = A \cdot (1 - e^{-b \cdot \Delta x}) = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{\Delta}{RC}}\right)$$

Für das Entladen gilt:

$$\frac{1}{r} = \frac{\ln\left(\frac{U_0}{U_c}\right)}{t} = \frac{1}{RC}$$

$$\Delta r = \left| \frac{\partial r}{\partial R} \right| \cdot \Delta C + \left| \frac{\partial r}{\partial C} \right| \cdot \Delta R + \left| \frac{\partial r}{\partial U_0} \right| \cdot \Delta U_0$$

$$\Delta r = C \cdot \Delta R + R \cdot \Delta C + \frac{t}{U_0 \cdot \ln^2\left(\frac{U_c}{U_0}\right)} \cdot \Delta U_0$$

$$\Delta U_0 = \Delta A = A - A \cdot e^{-b \Delta x} = U_0 - U_0 \cdot e^{-\frac{\Delta}{RC}}$$

An dieser Stelle breche ich ab, da der absolute Fehler offensichtlich von der Zeit abhängig (und somit nicht zu jedem Zeitpunkt gleich ist). Damit ergibt sich vereinfacht folgende Ungleichung::

$$\Delta r \geq C \cdot \Delta R + R \cdot \Delta C$$

**Messwerte**

		Messreihen:			
		1	2	3	4
Theorie:	R in kΩ	10	100	100	10
	C in μF	10	10	47	47
	r <sub>theo</sub> =	0,1	1	4,7	0,47
Versuchsteil I (Aufladen)	r <sub>1A</sub> =	0,10337	0,78377	5,362793	0,579559
	r <sub>2A</sub> =	0,149386	0,89241	5,273983	0,579549
	r <sub>3A</sub> =	0,121108	1,00654	5,280668	0,661262
	Mittelwert:	0,125	0,89	5,31	0,61
	Abs. Abweichung:	0,024	0,117	0,053	0,051
	rel. Abweichung (%):	24	11,7	1,1	10,9
	Varianz	0,0005	0,0124	0,0024	0,0022
	Standartabweichung	0,0232	0,1114	0,0495	0,0472
Versuchsteil II (Entladen)	r <sub>1E</sub> =	0,1564	0,893847	5,64366	0,607881
	r <sub>2E</sub> =	0,120662	0,804402	5,635073	0,621871
	r <sub>3E</sub> =	0,133876	0,877024	5,646846	0,722904
	Mittelwert	0,137	0,858	5,642	0,651
	Abs. Abweichung:	0,019	0,054	0,007	0,072
	rel. Abweichung (%):	19	5,4	0,1	15,3
	Varianz	0,0003	0,0023	0	0,0039
	Standartabweichung	0,0181	0,0475	0,0061	0,0628
Gesamt:	Varianz	0,0004	0,0063	0,0349	0,003
	Standartabweichung	0,0198	0,0791	0,1867	0,0552
(Vergleich zur Theorie)	mittlere Abweichung bei I (%):	25	11	13	29,8
	mittlere Abweichung bei II (%):	37	14,2	20	38,5
	Mittelwert:	0,131	0,876	5,474	0,629
	mittlere Abweichung gesamt	0,031	0,124	0,774	0,159
	mittlere relative Abweichung (%):	31	12,4	16,5	33,8

Die abgezeichneten Arbeitsergebnisse finden Sie im Anhang zum Protokoll.

**Versuchsprotokolle**

Fehlerfortpflanzung und Toleranzen:

	$\Delta r \geq C \cdot \Delta R + R \cdot \Delta C$ $\Delta C = \pm 0,05 \% \cdot C$ $\Delta R = \pm 0,05 \% \cdot R$	Messreihen:			
		1	2	3	4
Theorie:	R in kΩ	10	100	100	10
	C in μF	10	10	47	47
Toleranz:	Δr ≤	0,1 s	1 s	4.7 s	0,47 s

**Auswertung**

Bevor ich zur graphischen Auswertung komme, möchte ich die Messergebnisse, denen der Kurvenverlauf zu Grunde liegt tabellarisch aufführen:

	A <sub>Aufladen</sub>	B <sub>Aufladen</sub>	A <sub>Abladen</sub>	B <sub>Abladen</sub>
Formel:	$y = f(x) = A \cdot (1 - e^{-Bx})$		$y = f(x) = A \cdot e^{-Bx}$	
MR 1: C= 10 kΩ R= 10 μF	9,94774 (1. Messpaar)	9,67399	9,2302 (2. Messpaar)	8,2876
MR 2: C= 100 kΩ R= 10 μF	9,14126 (1. Messpaar)	1,27588	9,53915 (1. Messpaar)	1,11876
MR 3: C= 100 kΩ R= 47 μF	9,12306 (3. Messpaar)	0,18937	9,84094 (1. Messpaar)	0,17719
MR 4: C= 10 kΩ R= 47 μF	9,89444 (1. Messpaar)	1,72548	9,393818 (1. Messpaar)	1,64506

2. Spannungsmessung: 10 kΩ und 10 μF beim Entladen

1. Spannungsmessung: 10 kΩ und 10 μF beim Aufladen

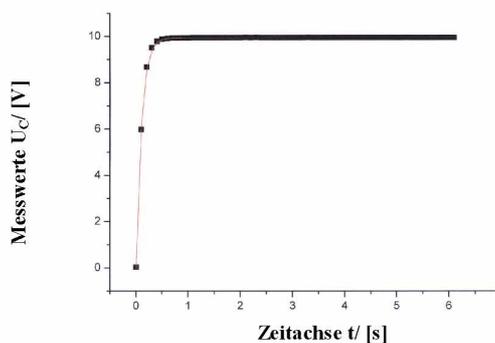
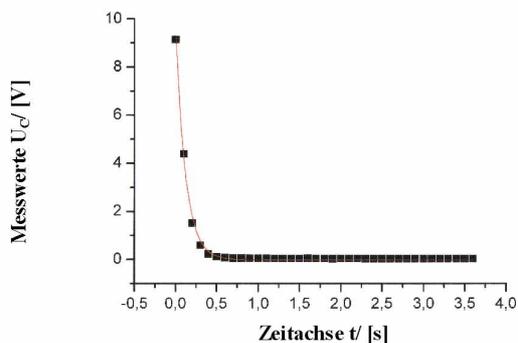


ABB. II.1 und ABB. II.2: U/t- Diagramm der 1. Messreihe zu Auf- und Entladen.

1. Spannungsmessung: 100 kΩ und 10 μF beim Entladen

1. Spannungsmessung: 100 kΩ und 10 μF beim Aufladen

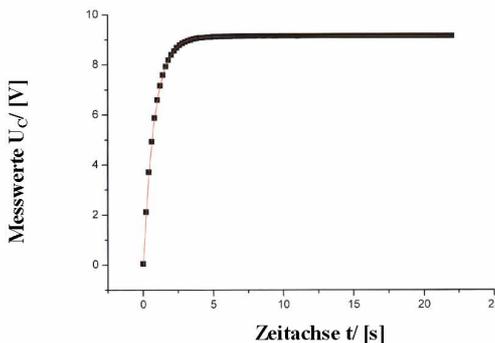
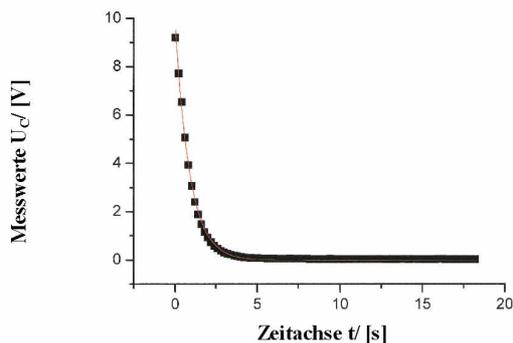


ABB. II.3 und ABB. II.4: U/t- Diagramm der 2. Messreihe zu Auf- und Entladen.

## Versuchsprotokolle

### 1. Spannungsmessung: 100 k $\Omega$ und 47 $\mu$ F beim Entladen    3. Spannungsmessung: 100 k $\Omega$ und 47 $\mu$ F beim Aufladen

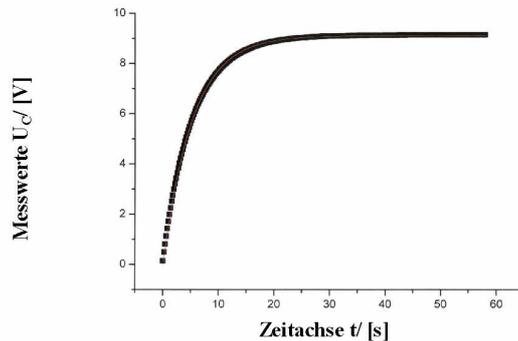
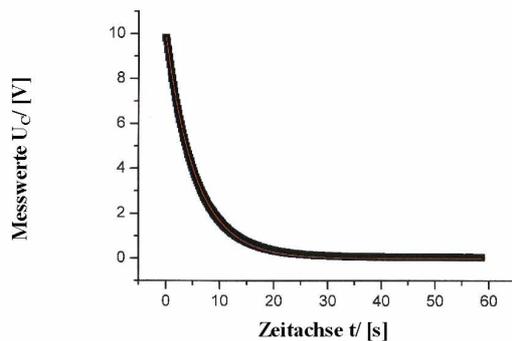
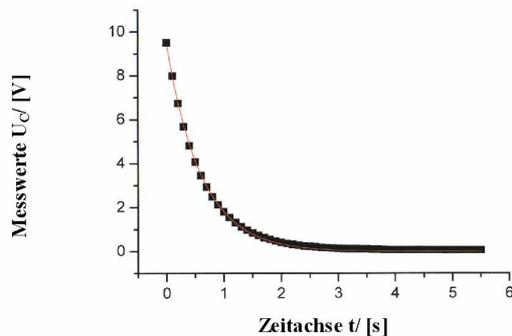


ABB. II.5 und ABB. II.6: U/t- Diagramm der 3. Messreihe zu Auf- und Entladen .

### 1. Spannungsmessung: 10 k $\Omega$ und 47 $\mu$ F beim Entladen



### 1. Spannungsmessung: 10 k $\Omega$ und 47 $\mu$ F beim Aufladen

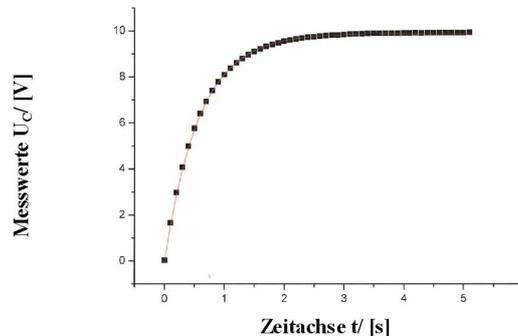


ABB. II.7 und ABB. II.8: U/t- Diagramm der 4. Messreihe zu Auf- und Entladen.

## Diskussion

Als Quintessenz dieses Versuches möchte ich voraus nehmen, dass trotz aller Bequemlichkeiten, die eine Messung per Computer mit sich bringt (schneller, genauer, einfacher) die Auswertung des Versuches erheblich verschwierigen, da durch die Messwertnachbearbeitung und dem anschließenden Fit- Prozess z.T. nicht abschätzbare Fehler hinzutreten (in unserem Fall durch die „Kurvenbeschneidung“).

Die theoretischen Voraussagen wurden in guter Näherung bestätigt, die Kurvenverläufe der Messwerte bestätigen dies. Abweichungen zwischen den ermittelten Ergebnissen und den theoretischen Vorhersagen liegen innerhalb der selbst gesteckten unteren Toleranzgrenzen.

Probleme und Anmerkungen zur Verbesserungen:

Die Schaltung und die Messung würden erheblich verbessert, wenn ein Schalter mit zwei aktiven Zuständen zur Kombination von Schaltung I und II (vgl. ABB. I.1 und I.2) eingefügt würde. Dadurch würde erstens der Bedienkomfort erheblich gesteigert sowie die „blinde“ Entladezeit beim Entladeprozess extrem verkürzt und damit potentielle Fehler minimiert.

Der Versuch verlief reibungsfrei. Es wurden keine gravierenden Umweltveränderungen (z.B. Temperaturschwankungen) wahr genommen.

Die abgezeichneten Messergebnisse befinden sich als Anhang im Anschluss an das Protokoll.

Jena, 10.11.2001