

La Géométrie Hyperbolique

UJF Grenoble - Hiver 2010/2011

Manuscrit Personnel

Stilianos Louca

11 janvier 2011

Table des matières

1	Préface	6
1.1	Qu'est-ce ce?	6
2	Géométrie hyperbolique sur le demi-plan supérieur	6
2.1	Introduction	6
2.1.1	Definition : Chemins	6
2.1.2	Definition : Le plan hyperbolique	6
2.1.3	Composition des chemins	6
2.1.4	Lemme : Distance sur le demi-plan supérieur	6
2.1.5	Definition : $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$	7
2.1.6	Definition : Le groupe modulaire	7
2.1.7	Definition : $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$	7
2.1.8	Lemme : $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$ et $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$	8
2.2	Préliminaires sur le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$	8
2.2.1	Lemme : Action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{H}, \overline{\mathcal{H}}$ et $\overline{\mathbb{C}}$	8
2.2.2	Lemme : Stabilisateur de i	9
2.2.3	Lemme : Préservation de la distance par $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$	9
2.2.4	Definition : Demi-cercle droite	9
2.2.5	Lemme : Action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ sur les demi-cercles droites	9
2.2.6	Corollaire sur l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ sur \mathcal{H}	10
2.2.7	Lemme : Distance de points	10
2.2.8	Lemme : Représentation de la distance de Poincaré	11
2.2.9	Théorème sur la topologie de $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$	12
2.2.10	Definition : Isométries sur \mathcal{H}	12
2.2.11	Lemme : Existence de projections fixent i et ∞	12
2.2.12	Quelques propriétés de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ comme groupe	13
2.3	Réflexions par géodésiques	13
2.3.1	Lemme : Préservation des cotés par les projections	13
2.3.2	Definition : Réflexion	13
2.3.3	Lemme : Caractérisation de la réflexion principale	14
2.3.4	Corollaire : Existence et unicité des réflexions	14
2.4	La structure de $\mathrm{Isom}(\mathcal{H})$	14
2.4.1	Lemme : Unicité des transformations projectives	14
2.4.2	Corollaire sur l'unicité des transformations projectives	15
2.4.3	Théorème sur le groupe des isométries sur \mathcal{H}	15
2.4.4	Lemme : Préservation ou inversion d'orientation par les isométries	15
2.4.5	Polygone hyperbolique	16
2.4.6	Lemme : Équivalence des triangles idéaux	16
2.4.7	Théorème de Gauss-Bonnet	17
2.4.8	Identités trigonométriques sur \mathcal{H}	17

2.5	Le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$	17
2.5.1	Définition : Birapport	17
2.5.2	Lemme : Préservation du birapport par $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$	17
2.5.3	Théorème : Distance de Poincaré et birapport	18
2.5.4	Lemme : Caractérisation des demi-cercles droites	18
2.5.5	Lemme : Action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ sur les géodésiques	18
3	Le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$	19
3.1	La topologie de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$	19
3.1.1	Topologie sur $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$	19
3.1.2	Définition : La fonction trace sur $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$	19
3.1.3	Lemme sur le stabilisateur de i	20
3.2	Classification des isométries	20
3.2.1	Théorème : Classification des éléments	20
3.2.2	Définition : Axe d'un hyperbolique	21
3.2.3	Lemme : Trace et type des transformations projectives	21
3.2.4	Lemme : Stabilisateur parabolique de ∞	21
3.2.5	Lemme : Classes de conjugaison dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$	21
3.2.6	Théorème : Structure de groupes hyperboliques, elliptiques, paraboliques	22
3.2.7	Lemme : Action des hyperboliques sur leurs axes	23
3.2.8	Lemme : Action des elliptiques sur les cercles	23
3.2.9	Lemme sur groupes engendrés par $\mathrm{St}(i)$	23
3.2.10	Lemme sur la cardinalité des orbites	24
3.2.11	Lemme sur la compacité de sous-groupes de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$	24
3.2.12	Corollaire sur la compacité des sous-groupes de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$	24
3.3	La classe d'homéomorphie de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$	25
3.3.1	Théorème : Paramètres libres de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$	25
3.3.2	Définition : Espace tangent de \mathcal{H}	26
3.3.3	Lemme : Action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ sur $T\mathcal{H}$	26
3.3.4	Théorème : Structure de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$	27
3.3.5	Corollaire : Le groupe fondamental de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$	27
3.4	Demi-tours	27
3.4.1	Définition : Angle d'un elliptique	27
3.4.2	Lemme : Caractérisation des demi-tours	28
3.4.3	Lemme : Relation entre demi-tours et réflexions	29
3.4.4	Lemme : Génération des hyperboliques par les demi-tours et les réflexions	29
3.4.5	Lemme : Les elliptiques dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$	30
3.5	L'ensemble de Farey	30
3.5.1	Définition : Géodésiques de Farey	30
3.5.2	Théorème : Action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ sur l'ensemble de Farey	30
3.5.3	Corollaire : Représentation de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$	31
3.6	Le disque de Poincaré	31
3.6.1	Définition : Le disque de Poincaré	31
3.6.2	Relation au demi-plan supérieur	32
3.6.3	Isométries sur le modèle du disque	33
4	Sous-groupes discrets de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$	34
4.1	Groupes Fuchsien	34
4.1.1	Définition : Action de groupes continue	34
4.1.2	Définition : Sous-groupe fuchsien	34
4.1.3	Définition : Action discontinue	34
4.1.4	Lemme : Caractérisation d'orbites	35
4.1.5	Définition : Famille localement finie	35
4.1.6	Lemme : Caractérisation de l'action discontinue	35
4.1.7	Corollaire sur actions discontinues et l'espace quotient	36
4.1.8	Corollaire sur actions discontinues et proprement discontinues	37
4.1.9	Lemme sur actions discontinues sans torsion	37
4.1.10	Lemme : Condition suffisante pour groupes discrets	37

4.1.11	Théorème : Caractérisation des groupes fuchsien	38
4.1.12	Definition : Ensemble limite d'un groupe	38
4.1.13	Lemme sur elliptiques dans groupes fuchsien	39
4.2	Groupes élémentaires	39
4.2.1	Definition : Groupe élémentaire	39
4.2.2	Théorème sur groupes totalement elliptiques	40
4.2.3	Théorème sur groupes fuchsien élémentaires	40
4.2.4	Lemme de conjugaison	41
4.2.5	Théorème de Jørgensen	41
4.2.6	Definition : Produit scalaire et norme sur $\mathbb{K}^{n \times n}$	41
4.2.7	Conséquence du théorème de Jørgensen	42
4.2.8	Lemme sur sous-groupes sans hyperboliques	42
4.2.9	Théorème sur groupes non-élémentaires	43
4.2.10	Théorème sur groupes sans éléments elliptiques	43
4.2.11	Théorème : Caractérisation des groupes non-élémentaires discrets	43
4.2.12	Lemme sur groupes engendrés par paraboliques et hyperboliques	43
5	Domaines fondamentaux	45
5.1	Domaines fondamentaux	45
5.1.1	Definition : Domaine fondamental	45
5.1.2	Lemme : Condition nécessaire pour l'existence d'un domaine fondamental	46
5.1.3	Definition : Domaine fondamental localement fini	46
5.1.4	Lemme sur l'application quotient	47
5.1.5	Lemme sur la projection de domaines fondamentaux	47
5.1.6	Théorème sur domaines fondamentaux localement finis	47
5.1.7	Corollaire sur la compacité de X/G	48
5.1.8	Théorème : Génération des groupes	49
5.1.9	Lemme : Existence de non-fixes	49
5.1.10	Théorème : Le domaine fondamental de Dirichlet	49
5.1.11	Lemme de Shimizu	49
5.2	Cycles d'arêtes	50
5.2.1	Definition : Cycle d'arête	50
5.2.2	Théorème fondamental de Poincaré sur polyèdres	51
5.2.3	Théorème de Poincaré <i>non-compact</i>	51
5.2.4	Definition : Empilement	52
5.2.5	Exemple d'un empilement	52
5.2.6	Lemme : Empilements et groupes discrets	53
5.2.7	Théorème sur groupes engendrés et empilements	53
5.2.8	Exemple : Le polyèdre de Schottky	53
5.3	Domaines fondamentaux non-compactes	54
5.3.1	Definition : Cusp	54
5.3.2	Definition : Horocycle	54
5.3.3	Lemme : Transformation des horodisques	55
5.3.4	Lemme sur horodisques et paraboliques	55
5.3.5	Corollaire sur orbites de paraboliques	56
5.3.6	Lemme de Shimizu sur l'existence de horodisques	56
5.3.7	Lemme : Existence de horodisques éludants	56
5.3.8	Théorème : Condition nécessaire pour la compacité du quotient	57
6	Structures hyperboliques sur des surfaces	58
6.1	Définition et généralités	58
6.1.1	Definition : Chemin rectifiable	58
6.1.2	Definition : Espace métrique SLP	58
6.1.3	Definition : Surface hyperbolique	58
6.1.4	Definition : Homéomorphisme local	59
6.1.5	Lemme sur isométries de \mathcal{H} dans espaces SLP	59
6.1.6	Théorème : Isométries locales comme Lipschitziennes	59
6.1.7	Lemme : Transfère de surfaces hyperboliques	60

6.2	Géodésiques	61
6.2.1	Définition : Géodésique	61
6.2.2	Lemme : Géodésiques comme Lipschitziennes	61
6.2.3	Corollaire : Condition suffisante pour géodésiques minimisantes	61
6.2.4	Lemme sur segments de géodésiques	62
6.2.5	Coïncidence de géodésiques	62
6.2.6	Théorème de Hopf-Rinow : Prolongation de géodésiques	62
6.2.7	Définition : Points bien alignés	63
6.2.8	Théorème : Existence de géodésiques connectantes	63
6.3	Propriétés des isométries locales	63
6.3.1	Théorème d'uniformisation	63
6.3.2	Lemme : Extension d'isométries dans \mathcal{H}	64
6.3.3	Lemme sur isométries locales dans \mathcal{H}	64
6.3.4	Théorème : Relèvement de géodésiques	64
6.3.5	Lemme sur isométries locales	64
6.3.6	Lemme : Disques hyperbolisants comme feuilletés	64
6.3.7	Théorème : Isométries locales comme revêtements	64
6.3.8	Théorème : \mathcal{H} comme revêtement universel	65
6.3.9	Théorème : Transfère de la métrique par isométries locales	65
6.3.10	Théorème sur isométries locales dans \mathcal{H}	66
6.4	Géométrisation des surfaces hyperboliques	66
6.4.1	Théorème : Métrisabilité de l'espace quotient	66
6.4.2	Théorème : Complétude de l'espace quotient	67
6.4.3	Théorème de géométrisation des surfaces	68
6.4.4	Proposition sur la caractéristique d'Euler	69
A	Annexe	70
A.0.5	Lemme sur la continuité de fonctions	70
A.0.6	Lemme : Croisement de chemins	70
A.0.7	Définition : Application propre	70
A.0.8	Définition : Topologie quotient	70
A.0.9	Lemme : Transporte de métriques	71
A.0.10	Lemme : Métriques relevées	71
A.0.11	Lemme de Lebesgue sur espaces compacts	72
A.0.12	Lemme sur fonctions convexes et concaves	72
A.0.13	Définition : Fonction localement constante	72
A.0.14	Définition : Point d'accumulation	73
A.0.15	Définition : Topologie discrète	73
A.0.16	Définition : Relativement compact	73
A.0.17	Définition : Compact par points d'accumulation	74
A.0.18	Lemme sur espaces de Hausdorff localement compacts	74
A.0.19	Définition : Groupe topologique	74
A.0.20	Définition : Groupe discret	74
A.0.21	Lemme sur nuclei des groupes topologiques	75
A.0.22	Corollaire sur points isolés dans groupes topologiques	75
A.0.23	Lemme sur sous-groupes compacts	75
A.0.24	Définition : Sous-groupe compact maximal	76
A.0.25	Lemme sur sous groupes compacts maximaux	76
A.0.26	Définition : Groupe virtuellement abélien	76
A.0.27	Définition : Action imprimitive de groupe	76
A.0.28	Théorème sur actions imprimitives	76
A.0.29	Théorème : Caractérisation de la primitivité	77
A.1	Topologie algébrique et géométrie différentielle	77
A.1.1	Définition : Revêtement	77
A.1.2	Définition : Groupe des automorphismes d'un revêtement	77
A.1.3	Définition : Revêtement universel	77
A.1.4	Définition : Nombre de Betti et la caractéristique d'Euler	77

B Symboles & Abréviations
Index80

78

1 Préface

1.1 Qu'est-ce ce ?

Le suivant est un manuscrit personnel du cours de la géométrie hyperbolique, donné par Prof. P. Will à l'UJF l'année 2010/2011.

2 Géométrie hyperbolique sur le demi-plan supérieur

2.1 Introduction

2.1.1 Definition: Chemins

Soit E un espace normé et $U \subseteq E$. Alors, une application $\gamma : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow U$ de \mathcal{C}^1 par morceaux est dit **chemin continûment dérivable par morceaux** entre $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$. On note $\Gamma(U)$ l'ensemble de tous ces chemins dans U .

2.1.2 Definition: Le plan hyperbolique

On note $\mathcal{H} := \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$ le **demi-plan supérieur**¹ équipé du **tenseur métrique de Poincaré**

$$ds_{\mathcal{H}}^2|_{x+iy} := \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} .$$

Pour chemin $\gamma \in \Gamma(\mathcal{H})$ on définit la **longueur**

$$l_{\mathcal{H}}(\gamma) := \int_0^1 \left| \frac{d\gamma(t)}{dt} \right| \frac{dt}{\Im(\gamma(t))} .$$

On note $\overline{\mathcal{H}} := \mathcal{H} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $\partial\mathcal{H} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ et $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Noter que \mathcal{H}, \mathbb{C} et le disque unité ouvert $D^{\circ} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ sont homéomorphes.

2.1.3 Composition des chemins

Soient $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow X$ deux chemins dans un espace topologique X tels que $\gamma_0(1) = \gamma_1(0)$. Alors on définit leur composition $\gamma_0 \otimes \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow X$ comme le chemin

$$(\gamma_0 \otimes \gamma_1)(t) := \begin{cases} \gamma_0(2t) & : 0 \leq t \leq 1/2 \\ \gamma_1(2t - 1) & : 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} ,$$

c'est-à-dire le chemin qui traverse d'abord γ_0 et après γ_1 .

Remarque : La longueur de chemins $l_{\mathcal{H}} : \Gamma(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ commute avec la composition de chemins, c'est-à-dire

$$l_{\mathcal{H}}(\gamma_0 \otimes \gamma_1) = l_{\mathcal{H}}(\gamma_0) + l_{\mathcal{H}}(\gamma_1)$$

pour tout $\gamma_0, \gamma_1 \in \Gamma(\mathcal{H})$ avec $\gamma_0(1) = \gamma_1(0)$.

2.1.4 Lemme : Distance sur le demi-plan supérieur

Pour $z, w \in \mathbb{C}$, la **distance de Poincaré**

$$d_{\mathcal{H}}(z, w) := \inf \{l_{\mathcal{H}}(\gamma) : \gamma \in \Gamma(\mathcal{H}), \gamma(0) = z, \gamma(1) = w\}$$

définit vraiment une distance sur \mathcal{H} . On dit un chemin $\gamma \in \Gamma(\mathcal{H})$ entre z, w **géodésique** si $l_{\mathcal{H}}(\gamma) = d_{\mathcal{H}}(z, w)$.

1. Anglais : Upper half-plane.

Preuve : Soient $z, w, v \in \mathcal{H}$. Alors évidemment $d_{\mathcal{H}}$ est bien défini, $d(z, z) = 0$ et $d(z, w) = d(w, z)$. Car pour tout $\gamma_0 \in \Gamma(\mathcal{H})$ entre z et w et tout $\gamma_1 \in \Gamma(\mathcal{H})$ entre w et v le chemin $\gamma_1 \otimes \gamma_0 \in \Gamma(\mathcal{H})$ traverse de z à v , il faut $d_{\mathcal{H}}(z, v) \leq d_{\mathcal{H}}(z, w) + d_{\mathcal{H}}(w, v)$. La positivité $d(z, w) > 0 \forall z \neq w$, sera prouvé dans lemme 2.2.7. \square

2.1.5 Définition: $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$

Soit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Alors, on définit le **groupe projective linéaire spécial**² comme

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{K}) := \left\{ \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}, z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} : a, b, c, d \in \mathbb{K}, ad - bc = 1 \right\}, \quad (2.1.5.1)$$

où on définit

$$\frac{z}{0} := \infty, \quad \frac{a \cdot \infty + b}{c \cdot \infty + d} := \frac{a}{c}, \quad \infty + a = \infty$$

pour $z, c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $a, b, d \in \mathbb{C}$.

Remarques :

1. $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$ est un groupe par rapport à la composition d'applications.

2. Soit $g := \left(z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \right) \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$. Alors :

- Si $c = 0$ on a $g(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ et $g(\infty) = \infty$.
- Si $c \neq 0$ on a $g(\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}) = \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$, $g(-\frac{d}{c}) = \infty$ et $g(\infty) = \frac{a}{c}$.

Son inverse est en tout cas $g^{-1} = \left(z \mapsto \frac{dz-b}{-cz+a} \right)$.

3. Tout élément $g = \left(z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \right) \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est holomorphe sur \mathcal{H} avec la dérivée

$$g'(z) = \frac{1}{(cz+d)^2}. \quad (2.1.5.2)$$

2.1.6 Définition: Le groupe modulaire

Le **groupe modulaire** est le sous-groupe

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) := \left\{ \left(z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \right) : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\} \leq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}).$$

On peut montrer, que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ est engendré par les transformations

$$S : z \mapsto -\frac{1}{z}, \quad T : z \mapsto z + 1.$$

2.1.7 Définition: $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$

Soit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Alors, on définit le **groupe linéaire spécial** comme

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{K}) := \{ M \in \mathbb{K}^{2 \times 2} : \det(M) = 1 \}. \quad (2.1.7.1)$$

Il est un sous-groupe du groupe linéaire générale $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ par la loi de la multiplication de matrices.

2. Anglais : Projective special linear group.

2.1.8 Lemme : $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$ et $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$

Soit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. L'application $\Pi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$ donnée par

$$\Pi : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left(z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \right)$$

est un homomorphisme de groupes surjectif avec noyau $\{\pm 1\}$. Si $\Pi(M) = g$ pour quelques $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$, $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$, on dit M un **relèvement**³ de g . Par le dessus on trouve

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{K}) / \{\pm 1\} \stackrel{\Pi_*}{\cong} \mathrm{PSL}_2(\mathbb{K}) ,$$

via l'**isomorphisme canonique** $\Pi_* : M \cdot \{\pm 1\} \mapsto \Pi(M)$, c'est-à-dire, tout élément $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$ admet exactement 2 relèvements dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$.

Exemples :

(i) L'élément $(z \mapsto \lambda^2 z) \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ avec $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ se relève en

$$\pm \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix} .$$

(ii) L'élément $(z \mapsto z + \lambda) \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$ se relève en

$$\pm \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

(iii) L'élément $(z \mapsto -1/z) \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ se relève en

$$\pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

2.2 Préliminaires sur le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$

2.2.1 Lemme : Action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{H}, \bar{\mathcal{H}}$ et $\bar{\mathbb{C}}$

Le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ agit sur $\bar{\mathcal{H}}, \bar{\mathbb{C}}$ et transitivement sur $\mathcal{H}, \partial\mathcal{H}$.

Preuve : Soit $g := \left(z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \right) \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ quelconque. Alors

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{(az + b)(c\bar{z} + d)}{|cz + d|^2} = \frac{ac|z|^2 + adz + bc\bar{z} + bd}{|cz + d|^2} = \frac{ac|z|^2 + adz + (ad - 1)\bar{z} + bd}{|cz + d|^2}$$

et donc

$$\Im(g(z)) = \frac{\Im(z)}{|cz + d|^2} . \tag{2.2.1.1}$$

Ça prouve que pour tout $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ la restriction $g|_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ est une bijection. De plus, par remarque 2.1.5(2) $g|_{\partial\mathcal{H}} : \partial\mathcal{H} \rightarrow \partial\mathcal{H}$ et donc $g|_{\bar{\mathcal{H}}} : \bar{\mathcal{H}} \rightarrow \bar{\mathcal{H}}$ sont aussi bijections.

La transitivité de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ sur \mathcal{H} suit du fait que pour n'importe quels $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$, l'élément de relèvement

$$\begin{pmatrix} 1 & x - y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{y} & \frac{(x-y)}{\sqrt{y}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix}$$

envoie $(1 + i)$ à $x + iy \in \mathcal{H}$.

La transitivité de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ sur $\partial\mathcal{H}$ suit du fait que l'orbite de 0 est tout $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. □

3. Anglais : Lift.

2.2.2 Lemme : Stabilisateur de i

Le stabilisateur $\mathrm{St}(i)$ de i dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est donnée par les projections

$$\mathrm{St}(i) = \left\{ \left(z \mapsto \frac{z \cos \vartheta - \sin \vartheta}{z \sin \vartheta + \cos \vartheta} \right) : \vartheta \in [0, 2\pi] \right\} = \Pi(\mathrm{SO}(2)) .$$

Il agit transitivement sur $\partial\mathcal{H}$.

2.2.3 Lemme : Préservation de la distance par $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$

L'action de groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ sur \mathcal{H} préserve la métrique $ds_{\mathcal{H}}^2$, c'est-à-dire pour tout chemin $\gamma \in \Gamma(\mathcal{H})$ et $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ on a $l_{\mathcal{H}}(\gamma) = l_{\mathcal{H}}(g(\gamma))$. En particulier, $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ préserve la distance $d_{\mathcal{H}}$.

Preuve : Soit $\gamma \in \Gamma(\mathcal{H})$ un chemin de la représentation $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $x, y \in \Gamma(\mathbb{R})$. Soit $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ de relèvement $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors

$$\begin{aligned} l_{\mathcal{H}}(g(\gamma)) &= \int_0^1 \frac{dt}{\Im(g(\gamma(t)))} \left| \frac{dg(\gamma)}{dt} \right|_t \stackrel{(2.2.1.1)}{=} \int_0^1 \frac{|c\gamma + d|^2}{\Im(\gamma(t))} \cdot \left| \frac{dg}{dz} \right|_{\gamma(t)} \cdot \left| \frac{d\gamma}{dt} \right|_t dt \\ &= \int_0^1 \frac{|c\gamma + d|^2}{y(t)} \cdot \frac{1}{|cz + d|^2} \cdot \left| \frac{d\gamma}{dt} \right|_t dt = l_{\mathcal{H}}(\gamma) . \end{aligned}$$

□

2.2.4 Définition: Demi-cercle droite

Pour $0 < r < \infty$, $x_0 \in \mathbb{R}$ on note

$$L_r(x_0) = \{z \in \overline{\mathcal{H}} : |z - x_0| = r\} \quad , \quad L_r^o(x_0) := \{z \in \mathcal{H} : |z - x_0| = r\}$$

les **demi-cercles droites (fermé & ouvert) orthogonaux à \mathbb{R} de rayon r et centre x_0** dans $\overline{\mathcal{H}}$ et \mathcal{H} respectivement. Pour $x_0 \in \mathbb{R}$ on note

$$L_{\infty}(x_0) := \{z \in \overline{\mathcal{H}} : \Re(z) = x_0\} \quad , \quad L_{\infty}^o(x_0) := \{z \in \mathcal{H} : \Re(z) = x_0\} .$$

Si $0 < r < \infty$, on appelle les points de \mathcal{H} entre $L_r(x_0)$ et \mathbb{R} (non-inclusives) ses **points intérieurs**, les points à l'autre cote **points extérieurs**. Pour le cas $L_{\infty}(x_0)$, on utilise ses noms pour la partie à droite et à gauche. Ces deux parties sont deux ouverts de \mathcal{H} disjoints.

2.2.5 Lemme : Action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ sur les demi-cercles droites

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ quelconque et $0 < r \leq \infty$. Alors :

1. Il existe un élément $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ tel que $g(L_r(x_0)) = L_{\infty}(0)$ et $g(L_r^o(x_0)) = L_{\infty}^o(0)$.
2. En ce cas, les deux extrémités $p_1, p_2 \in \partial\mathcal{H} \cap L_r(x_0)$ du demi-cercle $L_r(x_0)$ sont toujours envoyés à 0 et ∞ .
3. De plus, si $z \in L_r^o(x_0)$ est quelconque, on peut choisir g tel que $g : (p_1, z, p_2) \mapsto (0, i, \infty)$.

Preuve :

1. **Cas $r = \infty$:** L'élément $g_0 := (z \mapsto z - x_0)$ satisfait les conditions.

Cas $r = 1, x_0 = 0$: $g_1 := \left(z \mapsto \frac{z+1}{-z+1}\right)$ satisfait les conditions. En particulier $g_1(-1) = 0$ et $g_1(1) = \infty$.

Cas $0 < r < \infty, x_0 = 0$: $g_2 := g_1 \circ (z \mapsto z/r)$ satisfait les conditions.

Cas $0 < r < \infty$: $g_3 := g_2 \circ (z \mapsto z - x_0)$ satisfait les conditions.

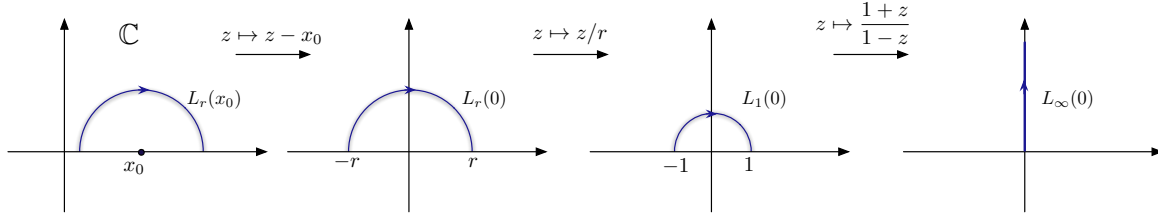


FIGURE 1: Sur la preuve de lemme 2.2.5.

2. Car $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ préserve $\partial\mathcal{H} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, les extrémités du demi-cercle sont toujours envoyés sur $\partial\mathcal{H} \cap L_\infty(0)$, c'est-à-dire à 0 et ∞ .
3. L'ordre de l'association $\{0, \infty\} \rightarrow \{p_1, p_2\}$ peut être reversé par multiplication à gauche par $(z \mapsto -1/z)$. Si de plus $z \in L_r^o(x_0) \subseteq \mathcal{H}$, alors $g(z) \in i\mathbb{R}_{>0}$. Par multiplication à gauche avec un $(z \mapsto \lambda^2 z)$ où $\lambda > 0$, on peut obtenir que $g(z) = i$.

□

2.2.6 Corollaire sur l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ sur \mathcal{H}

Pour tout $z_1 \neq z_2 \in \mathcal{H}$ il existe un $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ tel que $g(z_1), g(z_2) \in i\mathbb{R}_{>0}$ et $\Im(g(z_1)) < \Im(g(z_2))$.

Preuve : Évidemment, si $z_1, z_2 \in i\mathbb{R}_{>0}$ le problème est trivial car $(z \mapsto -1/z)$ peut être utilisé pour changer le signe de $[\Im(g(z_2)) - \Im(g(z_1))]$. Donc, il suffit trouver un $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ qui envoie z_1, z_2 sur $i\mathbb{R}_{>0}$. Parce qu'il existe toujours un demi-cercle droite $L_r^o(x_0)$ contenant z_1, z_2 (peut-être avec $r = \infty$), on peut appliquer lemme 2.2.5.

□

2.2.7 Lemme : Distance de points

Soient $z_1, z_2 \in \mathcal{H}$ n'importe quels et $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ tel que $g(z_1), g(z_2) \in i\mathbb{R}_{>0}$ (vois 2.2.6). Alors, la distance de Poincaré entre eux (vois 2.1.4) est donnée par

$$d_{\mathcal{H}}(z_1, z_2) = \left| \ln \frac{g(z_1)}{g(z_2)} \right|. \tag{2.2.7.1}$$

Elle est réalisée par, et seulement par, le demi-cercle droite contenant les deux points. En particulier, les demi-cercles droites sont les géodésiques entre les points lesquels ils contiennent.

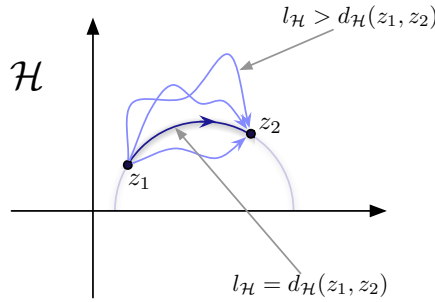


FIGURE 2: Sur la distance des points $z_1, z_2 \in \mathcal{H}$, réalisé par le demi-cercle droite les contenant.

Preuve : D'après 2.2.3 l'action du groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ préserve la distance $d_{\mathcal{H}}$ entre points. Donc, il suffit de trouver la distance de deux points $ia, ib \in i\mathbb{R}_{>0}$. On suppose $0 < a < b < \infty$ et considère le chemin $\gamma \in \Gamma(\mathcal{H})$ reliant ia, ib donné par $\gamma(t) := iat + it(b-a)$, $t \in [0, 1]$. Car

$$l_{\mathcal{H}}(\gamma) = \int_0^1 \left| \frac{d\gamma}{dt} \right|_t \frac{dt}{\Im(\gamma(t))} = \ln \left[\frac{b}{a} \right]$$

il faut $d_{\mathcal{H}}(ia, ib) \leq \ln \frac{b}{a}$. D'autre part, si $\gamma \in \Gamma(\mathcal{H})$ est un chemin reliant ia et ib de la forme $\gamma = x+iy$, $x, y \in \Gamma(\mathbb{R})$, alors

$$l_{\mathcal{H}}(\gamma) = \int_0^1 \frac{1}{y(t)} \sqrt{\left[\frac{dx}{dt} \right]^2 + \left[\frac{dy}{dt} \right]^2} dt \geq \int_0^1 \frac{dt}{y(t)} \left| \frac{dy}{dt} \right| = \int_a^b \frac{dy}{y} = \ln \left[\frac{b}{a} \right]. \quad (2.2.7.2)$$

Ça montre que $d_{\mathcal{H}}(ia, ib) \geq \ln \frac{b}{a}$ et donc $d_{\mathcal{H}}(ia, ib) = \ln \frac{b}{a}$.

D'après 2.2.3 l'action de groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ préserve la longueur des chemins dans \mathcal{H} . Par 2.2.5 les demi-cercles droites dans \mathcal{H} peuvent être envoyé sur $i\mathbb{R}_{>0}$. Par la preuve du lemme, la distance entre points sur $i\mathbb{R}_{>0}$ est réalisé par le chemin directe sur $i\mathbb{R}_{>0}$. Ça implique que les demi-cercles droites sont des géodésiques entre les points lesquels ils contient. Note que à cause de la continuité de γ reliant ia et ib , si γ est dehors $i\mathbb{R}_{>0}$, c'est-à-dire $\gamma([0, 1]) \not\subseteq i\mathbb{R}_{>0}$, il faut $\frac{dx}{dt} \neq 0$ sur une sous-partie de $[0, 1]$ de mesure non-trivial. Donc, l'inégalité (2.2.7.2) est propre et γ ne réalise pas la distance $d_{\mathcal{H}}(ia, ib)$. En conséquence, chemins dehors les demi-cercles droites ne sont pas géodésiques. □

Conséquence : Par 2.2.3 tout élément $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ envoie géodésiques sur géodésiques. Par 2.2.7 ces sont exactement les demi-cercles droites dans \mathcal{H} , c'est-à-dire $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ agit sur l'ensemble des demi-cercles droites. Par 2.2.5 cette action est transitive.

2.2.8 Lemme : Représentation de la distance de Poincaré

Soient $z_1, z_2 \in \mathcal{H}$ quelconques. Alors, leur distance de Poincaré $d_{\mathcal{H}}(z_1, z_2)$ est donnée par

$$d_{\mathcal{H}}(z_1, z_2) = \ln \left[\frac{|z_1 - z_2^*| + |z_1 - z_2|}{|z_1 - z_2^*| - |z_1 - z_2|} \right] \quad (2.2.8.1)$$

et

$$\cosh(d_{\mathcal{H}}(z_1, z_2)) = 1 + \frac{|z_1 - z_2|^2}{2 \Im(z_1) \cdot \Im(z_2)}. \quad (2.2.8.2)$$

Idée de preuve : Utiliser 2.2.5 et 2.2.7.

2.2.9 Théorème sur la topologie de $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$

La topologie définie sur \mathcal{H} par $d_{\mathcal{H}}$, est la même que la topologie *euclidienne* induit par la métrique $d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2|$. En fait, les boules par rapport à d sont exactement les boules par rapport à $d_{\mathcal{H}}$, mais pas nécessairement de même rayon et centre.

Preuve : Par (2.2.8.2) on a la représentation de la métrique

$$d_{\mathcal{H}}(z_1, z_2) = \varphi [d(f_1(z_1, z_2), f_2(z_2, z_2))]$$

où

$$\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow [1, \infty), \quad \varphi(t) := \arccos(1 + t^2)$$

est un homéomorphisme par rapport à la métrique euclidienne d satisfaisant $\varphi(0) = 0$ et

$$f_k : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \quad , \quad f_k(z_1, z_2) := \frac{z_k}{\sqrt{\Im(z_1) \cdot \Im(z_2)}} \quad , \quad k = 1, 2$$

sont continues par rapport à d . Soient $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$, $z \in \mathcal{H}$ quelconques. Si $z_n \xrightarrow[d]{n \rightarrow \infty} z$, alors $f_k(z_n, z) \xrightarrow[d]{n \rightarrow \infty} f(z, z)$ et donc $d(f_1(z_n, z), f_2(z_n, z)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Car $\varphi(0) = 0$ on trouve $z_n \xrightarrow[d_{\mathcal{H}}]{n \rightarrow \infty} z$.

Si inversement $z_n \xrightarrow[d_{\mathcal{H}}]{n \rightarrow \infty} z$, il faut par continuité de l'inverse φ^{-1} que $d(f_1(z_n, z), f_2(z_n, z)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, c'est-à-dire

$$\frac{|z_n - z|}{\sqrt{\Im(z_n)}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad . \quad (2.2.9.1)$$

A cause de (2.2.9.1) la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, qui en fait implique $z_n \xrightarrow[d]{n \rightarrow \infty} 0$. Donc, les deux topologies sont équivalentes.

Soient $z_0 \in \mathcal{H}$, $r > 0$ quelconques. Alors, en utilisant (2.2.8.2) c'est simple de montrer que pour tout $z \in \mathcal{H}$ on a $d_{\mathcal{H}}(z, z_0) \leq r$ ssi $d(z, \tilde{z}_0) \leq \tilde{r}$ où

$$\tilde{z}_0 := \Re(z_0) + i \cdot \Im(z_0) \cdot \cosh(r) \quad , \quad \tilde{r} := \Im(z_0) \cdot \sinh(r) \quad .$$

□

2.2.10 Définition: Isométries sur \mathcal{H}

On note $\mathrm{Isom}(\mathcal{H})$ le groupe des isométries sur $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$, c'est-à-dire l'ensemble des bijections $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ préservant la distance $d_{\mathcal{H}}$.

Remarques :

- (i) Le groupe $\mathrm{Isom}(\mathcal{H})$ agit sur les géodésiques de \mathcal{H} , c'est-à-dire les demi-cercles droites.
- (ii) Tout $g \in \mathrm{Isom}(\mathcal{H})$ est un auto-homéomorphisme de \mathcal{H} .

2.2.11 Lemme : Existence de projections fixent i et ∞

Soit $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ quelconque. Alors, il existe un unique couple $(g_1, g_2) \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})^2$ tel que

$$g_1(i) = i \quad , \quad g_2(\infty) = \infty \quad , \quad g = g_2 \circ g_1 \quad .$$

En particulier

$$\boxed{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{St}(\infty) \circ \mathrm{St}(i) \quad .} \quad (2.2.11.1)$$

Preuve : Il existe un unique élément $g_2 = \left(z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \right) \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ tel que $g_2(\infty) = \infty$ et $g_2(i) = g(i)$. Il possède le relèvement

$$\begin{pmatrix} \sqrt{y} & \frac{x}{\sqrt{y}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix} \tag{2.2.11.2}$$

où $g(i) = x + iy$. Alors, $g_1 := g_2^{-1} \circ g$ fixe i et satisfait $g_2 \circ g_1 = g$. L'unicité de (g_1, g_2) est évident par le dessus. \square

2.2.12 Quelques propriétés de $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ comme groupe

Le groupe $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ est :

1. Parfait, c'est-à-dire tout élément de $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ est un commutateur.
2. Simple, c'est-à-dire ne contient pas de sous-groupes normales sauf $\{0\}$ et $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ lui même.

2.3 Réflexions par géodésiques

2.3.1 Lemme : Préservation des cotés par les projections

Soit L un demi-cercle droite dans \mathcal{H} et $g \in \text{Isom}(\mathcal{H})$. Alors, exactement une des deux affirmations suivantes est vrai :

1. g envoie les points intérieurs (extérieurs) de L sur les points intérieurs (extérieurs) de $g(L)$.
2. g envoie les points intérieurs (extérieurs) de L sur les points extérieurs (intérieurs) de $g(L)$.

Preuve : Il suffit de montrer, que si $z, w \in \mathcal{H}$ sont dans la même côté de L , leurs images $g(z), g(w)$ sont dans la même côté de $g(L)$. Mais ça c'est vrai, car on peut choisir un chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{H}$ reliant z, w tel que γ n'intersecte pas L . Donc, car g est continue et injective, le chemin $g(\gamma)$ n'intersecte pas l'image $g(L)$, donc $g(z), g(w)$ sont au même côté de $g(L)$. \square

2.3.2 Définition: Réflexion

Soit L une géodésique dans \mathcal{H} . Alors, une **réflexion** par L est une isométrie $g \in \text{Isom}(\mathcal{H})$ qui préserve L point par point et échange ses points intérieurs et extérieurs. La **réflexion principale** $\sigma \in \text{Isom}(\mathcal{H})$ est la réflexion par la demi-droite $i\mathbb{R}_{>0}$ donnée par $\sigma : z \mapsto -z^*$.

Remarque : Par 2.3.4 toute géodésique L possède une unique réflexion σ_L dans $\text{Isom}(\mathcal{H})$. Par conséquence $\sigma_L^3 = \sigma_L$, c'est-à-dire toute réflexion est d'ordre 2.

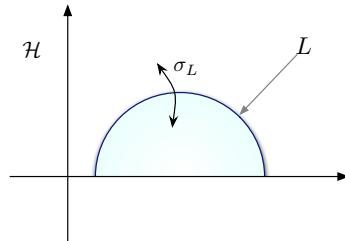


FIGURE 3: Changement des côtés du demi-cercle-droite L par σ_L .

2.3.3 Lemme : Caractérisation de la réflexion principale

Soit $g \in \text{Isom}(\mathcal{H})$ telle que g fixe $i\mathbb{R}_{>0}$ point par point. Alors $g \in \{\text{Id}, \sigma\}$.

Preuve : Car g est une isométrie, pour tout $z \in \mathcal{H}$ et $it \in i\mathbb{R}_{>0}$ il faut $d_{\mathcal{H}}(g(z), it) = d_{\mathcal{H}}(z, it)$. Plus précisément par (2.2.8.2) :

$$\frac{|g(z) - it|^2}{t \cdot \Im(g(z))} = \frac{|z - it|^2}{t \cdot \Im(z)} ,$$

d'où on obtient $\Im(z) = \Im(g(z))$ et $\Re^2(z) = \Re^2(g(z))$. Autrement dit : $g \in \{\text{Id}, \sigma\}$. □

2.3.4 Corollaire : Existence et unicité des réflexions

Soit $L \subseteq \mathcal{H}$ une géodésique n'importe laquelle. Alors :

1. Il existe une unique réflexion $\sigma_L \in \text{Isom}(\mathcal{H})$ par L .
2. Si $f \in \text{Isom}(\mathcal{H})$ fixe L point par point, alors $f \in \{\text{Id}, \sigma_L\}$.
3. Si $f \in \text{Isom}(\mathcal{H})$ préserve L , alors f commute avec σ_L .
4. Les réflexions par géodésiques forment une classe de conjugaison dans $\text{Isom}(\mathcal{H})$.

Preuve :

1. Soit $\sigma \in \mathcal{H}(\text{Isom})$ la réflexion principale. Par 2.2.5 on peut choisir une $g \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ telle que $L = g(i\mathbb{R}_{>0})$. Alors, la conjuguée $\sigma_L := g\sigma g^{-1}$ préserve le demi-cercle droite L point par point et échange par 2.3.1 ses points intérieurs et extérieurs. Inversement, si $f \in \text{Isom}(\mathcal{H})$ fixe L point par point, alors $g^{-1}fg$ fixe $i\mathbb{R}_{>0}$ point par point, donc par 2.3.3 $g^{-1}fg \in \{\sigma, \text{Id}\}$, c'est-à-dire $f \in \{\sigma_L, \text{Id}\}$. En particulier, σ_L est la seule réflexion par L .
2. Montré dans (2).
3. Si $f \in \text{Isom}(\mathcal{H})$ préserve L , alors $f\sigma_L f^{-1}$ fixe L point par point. Par (2) il faut $f\sigma_L f^{-1} \in \{\sigma_L, \text{Id}\}$, donc $f\sigma_L f^{-1} = \sigma_L$.
4. Si σ_L est la réflexion de la géodésique L et $f \in \text{Isom}(\mathcal{H})$, alors $f\sigma_L f^{-1}$ est la réflexion de la géodésique $f(L)$. Inversement, si $\sigma_{L'}$ est la réflexion de la géodésique L' , choisit $f \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ telle que $f(L) = L'$. Alors $\sigma_{L'} = f\sigma_L f^{-1}$. □

2.4 La structure de $\text{Isom}(\mathcal{H})$

2.4.1 Lemme : Unicité des transformations projectives

Soit $g \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ telle que g envoie $i\mathbb{R}_{>0}$ sur $i\mathbb{R}_{>0}$. Alors, g a une des deux représentations

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\frac{1}{\lambda} & 0 \end{pmatrix}$$

avec $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si de plus g fixe un point $it \in i\mathbb{R}_{>0}$, alors soit g est l'identité ou de type $g : z \mapsto -t^2/z$.

Preuve : Soit g avec la représentation $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. La supposition $\Re(g(it)) = 0 \quad \forall it \in i\mathbb{R}_{>0}$ permette seulement les deux cas

$$(c = b = 0, a, d \neq 0) \quad \text{ou} \quad (a = d = 0, b, c \neq 0) .$$

La deuxième affirmation est évident. □

2.4.2 Corollaire sur l'unicité des transformations projectives

Soient $z_1, z_2, w_1, w_2 \in \mathcal{H}$ tels que $d_{\mathcal{H}}(z_1, z_2) = d_{\mathcal{H}}(w_1, w_2) > 0$. Alors, il existe un unique $g \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ qui envoie $(z_1, z_2) \rightarrow (w_1, w_2)$.

Preuve d'existence : Soient $L_z, L_w \in \overline{\mathcal{H}}$ les demi-cercles droites connectant z_1 & z_2 et w_1 & w_2 respectivement. Soient $z_3 \in L_z \cap \partial\mathcal{H}$ et $w_3 \in L_w \cap \partial\mathcal{H}$ les extrémités des L_z et L_w vers la direction $z_1 \rightarrow z_2$ et $w_1 \rightarrow w_2$ respectivement. Alors, par 2.2.5 il existe un $g \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ qui envoie $(L_z, z_1, z_3) \rightarrow (L_w, w_1, w_3)$. Par préservation d'orientation il faut que $g(z_2)$ est sur L_w entre w_1 et w_3 . Par l'isométrie de g il faut $g(z_2) = w_2$.

Preuve d'unicité : Suppose que $g, f \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ satisfont l'assertion, c'est-à-dire g et f envoient

$$(L_z, z_1, z_2) \mapsto (L_w, w_1, w_2) \quad .$$

Soit $h \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ tel que h envoie L_z à $i\mathbb{R}_{>0}$. Alors $h \circ g^{-1} \circ f \circ h^{-1}$ préserve $i\mathbb{R}_{>0}$ et possède dans $i\mathbb{R}_{>0}$ deux points fixes inégales. Par 2.4.1 cela implique $f = g$. □

2.4.3 Théorème sur le groupe des isométries sur \mathcal{H}

Le groupe $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ est un sous-groupe normale de $\text{Isom}(\mathcal{H})$ d'indice 2 tel que

$$\text{Isom}(\mathcal{H}) = \text{PSL}_2(\mathbb{R}) \circ \langle \sigma \rangle \quad . \quad (2.4.3.1)$$

Note que $\langle \sigma \rangle$ n'est pas normal dans $\text{Isom}(\mathcal{H})$.

Preuve : Soit $g \in \text{Isom}(\mathcal{H})$ et $L := L(i\mathbb{R}_{>0})$. On sait que L est un demi-cercle droite car g préserve la distance de Poincaré $d_{\mathcal{H}}$. Par 2.2.5 il existe un $f_1 \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ qui envoie L sur $i\mathbb{R}_{>0}$, ça veut dire $f_1 \circ g$ préserve $i\mathbb{R}_{>0}$. Choisis $f_2 \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ du type $f_2 : z \mapsto \lambda z$ tel que $f_2 \circ (f_1 \circ g)(i) = i$. On choisit $f_3 \in \{\text{Id}, (z \mapsto -1/z)\}$ telle que $f_3 \circ (f_2 \circ f_1 \circ g)$ fixe $i\mathbb{R}_{>0}$ point par point⁴.

Alors, on a trouvé une $f \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ telle que $f \circ g$ fixe $i\mathbb{R}_{>0}$ point par point. Par lemme 2.3.3 il faut $f \circ g \in \{\text{Id}, \sigma\}$. Autrement dit, $g \in \text{PSL}_2(\mathbb{R}) \circ \{\text{Id}, \sigma\}$. □

Remarques :

- (i) Le groupe $\text{Isom}(\mathcal{H})$ consiste des isométries holomorphes et antiholomorphes, qui préservent les *angles* dans \mathcal{H} .
- (ii) Le groupe $\text{SL}_2(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ soit munit de la topologie induit par la topologie de \mathbb{R}^4 . Alors, le groupe quotient $\text{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm 1\}$, munit de la topologie quotient, transmet sa topologie en façon naturelle sur $\text{PSL}_2(\mathbb{R}) \cong \text{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm 1\}$. La bijection $\text{Isom}^+(\mathcal{H}) := \text{PSL}_2(\mathbb{R}) \mapsto \sigma \text{PSL}_2(\mathbb{R}) =: \text{Isom}^-(\mathcal{H})$ transporte cette topologie sur $\sigma \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ et donc tout $\text{Isom}(\mathcal{H})$. En cette topologie, $\text{Isom}(\mathcal{H})$ consiste des deux composantes connexes $\text{Isom}^{\pm}(\mathcal{H})$. Les éléments de la composante $\text{Isom}^+(\mathcal{H})$ sont exactement les éléments holomorphes, c'est-à-dire qui préservent l'orientation sur \mathcal{H} (vois 2.4.4).

2.4.4 Lemme : Préservation ou inversion d'orientation par les isométries

Soient $a, b, c \in \overline{\mathcal{H}}$ trois points deux à deux inégales et $g \in \text{Isom}(\mathcal{H})$. Alors :

1. Si $g \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$, le triplet $(g(a), g(b), g(c))$ possède la même orientation que (a, b, c) .
2. Si $g \in \text{Isom} \setminus \text{PSL}_2(\mathbb{R})$, le triplet $(g(a), g(b), g(c))$ possède l'orientation opposite que (a, b, c) .

⁴ Se rappeler que la distance de deux points $ia, ib \in i\mathbb{R}_{>0}$ est donnée par $d_{\mathcal{H}}(ia, ib) = \left| \ln \frac{a}{b} \right|$. Donc, toute $g \in \text{Isom}(\mathcal{H})$ qui préserve $i\mathbb{R}_{>0}$ et fixe i , satisfait $g(it) \in \{it, -1/(it)\}$ pour tout $t > 0$. Plus précisément, il faut que soit $g(it) = it \forall t > 0$ ou $g(it) = -1/(it) \forall t > 0$.

Preuve :

1. Par remarque 2.1.5(3) $g : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ est holomorphe. On sait que fonctions holomorphes préservent l'orientation des angles infinies, par exemple eux des géodésiques croissantes à sommets de triangles.
2. Par 2.4.3 on sait que g à la représentation $g = \sigma \circ f$ pour quelqu'un $f \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$. On sait de plus que σ change l'orientation des triangles. D'après (1), ça prouve l'affirmation. □

2.4.5 Polygone hyperbolique

Un **polygone hyperbolique** dans \mathcal{H} est un ensemble fermé, dont le bord dans \mathcal{H} est union finie de segments géodésiques entre points dans $\overline{\mathcal{H}}$. En particulier, un **triangle hyperbolique** est un polygone hyperbolique consistant de segments géodésiques entre 3 points (peut être inclusive ∞). Il s'appelle **idéale** si deux sommets sont inégaux et réelles et le troisième sommet égal ∞ (voir figure 4).

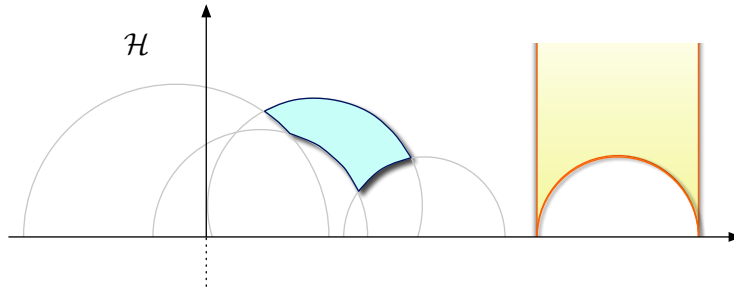


FIGURE 4: Exemple d'un polygone hyperbolique (à gauche) et un triangle idéal (à droite) dans \mathcal{H} .

Remarque : La somme des angles d'un triangle hyperbolique non-trivial dans \mathcal{H} est plus petite que π .

2.4.6 Lemme : Équivalence des triangles idéaux

Soient (a, b, c) les sommets d'un triangle idéal dans \mathcal{H} , tel que le triplet (a, b, c) est orienté positivement. Alors, il existe un unique $g \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ tel que $g(a) = \infty, g(b) = -1$ et $g(c) = 0$.

Preuve d'unicité : Si $f, g \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ vérifient la condition, alors $\varphi := f \circ g^{-1}$ fixe les points $\infty, 0, -1$. Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une représentation de φ dans $\text{SL}_2(\mathbb{R})$. Par remarque 2.1.5(2) ça implique $c = 0$ et donc $a = \frac{1}{d}$. Le fait $\varphi(0) = 0$ implique $b = 0$ et car $\varphi(-1) = -1$, il faut $a = d = \pm 1$, donc $\varphi = \text{Id}$.

Preuve d'existence : Par 2.2.5 il existe un $g_1 \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ tel que $g_1(a) = \infty$ et $g_1(c) = 0$. Sûrement $g_1(b) \in \mathbb{R}$, et par préservation d'orientation 2.4.4(1) il faut $b < 0$. Choisit alors $g_2 \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ de la forme $g_2 = (z \mapsto \lambda^2 t)$ tel que $g_2(g_1(b)) = -1$. Alors, $g_2 \circ g_1$ satisfait les conditions. □

Conséquence : Pour tous triangles idéaux et positivement orientés, il existe une unique $g \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ qui envoie l'un triangle à l'autre. Autrement dit, le groupe $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ agit transitivement, librement sur les triangles idéaux positivement orientés. Par 2.4.3 et 2.4.4, tout $\text{Isom}(\mathcal{H})$ agit donc transitivement, librement sur les triangles idéaux orientés.

2.4.7 Théorème de Gauss-Bonnet

Soit $\Delta \subseteq \mathcal{H}$ un triangle hyperbolique, des angles (α, β, γ) . Alors, son aire hyperbolique⁵ est donné par $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$.

2.4.8 Identités trigonométriques sur \mathcal{H}

Soit $\Delta \subseteq \mathcal{H}$ un triangle hyperbolique, des angles (α, β, γ) et longueurs d'arêtes (a, b, c) . Alors :

$$\cosh(a) = \cosh(b) \cdot \cosh(c) - \sinh(b) \cdot \sinh(c) \cdot \cos(\alpha) \quad ,$$

$$\frac{\sinh(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sinh(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\sinh(c)}{\sin(\gamma)} \quad .$$

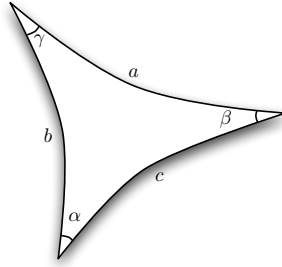


FIGURE 5: Sur les identités trigonométriques dans \mathcal{H} .

2.5 Le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$

2.5.1 Définition: Birapport

Pour $z_1, \dots, z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$ on appelle

$$\beta(z_1, \dots, z_4) := \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_4 - z_1)} \quad .$$

le **birapport**⁶ (ou **rapport anharmonique**) du 4-uple $(z_1, \dots, z_4) \in \overline{\mathbb{C}}^4$.

Remarque : Pour $z_1, \dots, z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$ on a :

- (i) $\beta(z_2, z_1, z_4, z_3) = \beta(z_1, z_2, z_3, z_4)$.
- (ii) $\beta(z_3, z_4, z_1, z_2) = \beta(z_1, z_2, z_3, z_4)$.
- (iii) $\beta(z_2, z_3, z_4, z_1) = 1/\beta(z_1, z_2, z_3, z_4)$.

2.5.2 Lemme : Préservation du birapport par $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$

L'action du groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ sur $\overline{\mathbb{C}}$ préserve le birapport des 4-uplets de $\overline{\mathbb{C}}^4$.

5. C'est-à-dire par rapport à la mesure $\frac{d\lambda}{\Im(\cdot)^2}$, où λ est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{C}^2 .

6. Anglais : Cross-ratio ou anharmonic ratio ou double ratio.

2.5.3 Théorème : Distance de Poincaré et birapport

Soient $z_1 \neq z_2 \in \mathcal{H}$ n'importe quels et w_1, w_2 les extrémités de la géodésique L qui les relie sur $\partial\mathcal{H}$, de sorte que $z_1 \in (w_1, z_2)$. Alors, leur distance de Poincaré est donnée par

$$d_{\mathcal{H}}(z_1, z_2) = \ln [\beta(z_2, w_1, z_1, w_2)] .$$

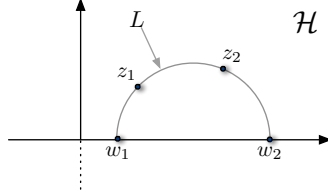


FIGURE 6: Sur théorème 2.5.3.

Preuve : Par 2.2.5 il existe un $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ qui envoie le demi-cercle L sur $L_\infty(0)$. En fait, le 4-uplet (z_2, w_1, z_1, w_2) peut être envoyé à $(ib, 0, ia, \infty)$ avec $a < b$. Car $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ préserve le birapport, on trouve

$$\ln [\beta(z_2, w_1, z_1, w_2)] = \ln [\beta(ib, 0, ia, \infty)] = \ln \frac{b}{a} = d_{\mathcal{H}}(z_1, z_2) .$$

□

2.5.4 Lemme : Caractérisation des demi-cercles droites

Deux à deux inégales $z_1, \dots, z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$ se trouvent sur un cercle droite à \mathbb{R} ssi $\beta(z_1, \dots, z_4) \in \mathbb{R}$.

2.5.5 Lemme : Action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ sur les géodésiques

L'action de groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ sur $\overline{\mathbb{C}}$ préserve la structure des cercles droites.

Preuve : Suit de 2.5.2 et 2.5.4.

□

3 Le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$

3.1 La topologie de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$

3.1.1 Topologie sur $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$

Soit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. On considère le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K}) \hookrightarrow \mathbb{K}^4$ munit de la topologie de \mathbb{K}^4 , c'est-à-dire la topologie induit par la métrique

$$d_{\mathbb{R}^4} \left[\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \right] := \sqrt{|a_1 - a_2|^2 + |b_1 - b_2|^2 + |c_1 - c_2|^2 + |d_1 - d_2|^2} .$$

Évidemment, la composition $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et l'inversion de matrices de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sont continus et $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est donc une groupe topologique. Le groupe quotient $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})/\{\pm 1\}$ est munit de la topologie quotient qui se transfère sur $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$ via l'isomorphisme

$$\Pi_* : \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})/\{\pm 1\} \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{K}) \quad , \quad \Pi_*(g \circ \{\pm 1\}) := \Pi(g)$$

où $\Pi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est l'épimorphisme défini dans 2.1.8. En fait, cette topologie sur $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est la plus-grande topologie telle que $\Pi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$ est continue : Une sous-partie $U \subseteq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$ est dit **ouverte** si $\Pi^{-1}(U)$ est ouverte dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$.

Par A.0.10 l'application $d : \mathrm{PSL}_2(\mathbb{K}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ donnée par

$$d(g_1, g_2) := d_{\mathbb{R}^4} [\Pi^{-1}(\{g_1\}), \Pi^{-1}(\{g_2\})] := \inf_{\substack{h_1 \in \Pi^{-1}(g_1) \\ h_2 \in \Pi^{-1}(g_2)}} d_{\mathbb{R}^4}(h_1, h_2) \quad (3.1.1.1)$$

est une métrique sur $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$. Par théorème 6.4.1, elle induit la même topologie sur $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$ comme déjà définie⁷. Par théorème 6.4.2, elle fait de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$ un espace métrique complet⁸.

Conclusion : $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$ est un groupe topologique de Hausdorff. Comme espace topologique elle est propre, complètement-métrisable et à base dénombrable.

3.1.2 Définition: La fonction trace sur $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$

On considère la trace $\mathrm{tr} : \mathrm{SL}_2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\mathrm{tr} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := a + d .$$

Alors, $\mathrm{tr}(\cdot)$ et son carré $\mathrm{tr}^2(\cdot)$ sont continues sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$. De plus, l'application

$$\mathrm{tr}^2 : \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})/\{\pm 1\} \rightarrow \mathbb{K} \quad , \quad \mathrm{tr}^2(g \circ \{\pm 1\}) := \mathrm{tr}^2(g)$$

est bien définie, continue et se transporte par l'isomorphisme $\Pi_* : \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})/\{\pm 1\} \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$ induit par $\Pi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$ naturellement sur $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$. La fonction résultante

$$\mathrm{tr}^2 : \mathrm{PSL}_2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{C} \quad , \quad \left(z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \right) \mapsto a + d$$

est continue sur $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$. De même, l'application

$$\mathrm{tr}[\cdot, \cdot] : [\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm 1\}] \times [\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm 1\}] \rightarrow \mathbb{K}$$

$$\mathrm{tr}[f \circ \{\pm 1\}, g \circ \{\pm 1\}] := \mathrm{tr}[f, g] := \mathrm{tr}(fgf^{-1}g^{-1})$$

est bien définie et se transporte naturellement sur $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Note que pour calculer $\mathrm{tr}[f, g]$ où $f, g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, on relève avant commuter.

7. Noter que le groupe $\{\pm 1\}$ agit via multiplication sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ discontinûment via isométries.

8. Noter que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ est complet.

3.1.3 Lemme sur le stabilisateur de i

Le stabilisateur $\mathrm{St}(i)$ de i dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est isomorphe-homéomorphe à S^1 et compact maximal dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Preuve : Si $p : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm 1\}$ est l'homomorphisme quotient et $\Pi_* : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm 1\} \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ l'isomorphisme canonique, alors par 2.2.2 on déduit $\mathrm{St}(i) = \Pi_*(p(\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})))$. On sait que $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est compacte maximal dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, donc par A.0.25 $p(\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}))$ est compacte maximal dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm 1\}$. Car Π_* est homéomorphe et isomorphe, on déduit que $\mathrm{St}(i)$ est compacte maximal dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

De plus, l'application

$$e^{i\vartheta} \mapsto \left(z \mapsto \frac{z \cos(\vartheta/2) - \sin(\vartheta/2)}{z \sin(\vartheta/2) + \cos(\vartheta/2)} \right), \quad \vartheta \in [0, 2\pi)$$

est un isomorphisme homéomorphe $S^1 \rightarrow \mathrm{St}(i)$. □

3.2 Classification des isométries

3.2.1 Théorème : Classification des éléments

Soit $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \setminus \{\mathrm{Id}\}$. On regarde l'action de g sur $\overline{\mathcal{H}}$. Alors, une et une seule des assertions suivantes est vérifiée :

1. g possède exactement un point fixé dans \mathcal{H} et aucun dans $\partial\mathcal{H}$: Il est dit **elliptique**.
2. g possède exactement un point fixé dans $\partial\mathcal{H} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ et aucun dans \mathcal{H} : Il est dit **parabolique**.
3. g possède exactement deux points fixés sur $\partial\mathcal{H}$ et aucun dans \mathcal{H} : Il est dit **hyperbolique**.

Preuve : Soit $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \setminus \{\mathrm{Id}\}$ de la représentation $g : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$.

Cas $c = 0$: Par remarque 2.1.5(2) g fixe ∞ . De plus, si $z \in \mathbb{C}$ et un autre point fixé il faut $(d-a)z = b$. Car $g \neq \mathrm{Id}$, il faut $(b, a-d) \neq (0, 0)$, donc $z \in \mathbb{R}$ (si existent).

Cas $c \neq 0$: Par remarque 2.1.5(2), g ne fixe ni ∞ ni $-d/c$. Donc, si $z \in \overline{\mathcal{H}}$ est un point fixé de g , alors

$$\frac{az+b}{cz+d} = z \Leftrightarrow cz^2 + z(d-a) - b = 0.$$

L'équation ci-dessus possède soit deux solutions réelles, une solution réelle ou deux solutions complexes, dont l'un n'est pas dans $\overline{\mathcal{H}}$. □

Remarques

- (i) Si $g, f \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ et p est un point fixe de g , alors $f(p)$ est un point fixe de fgf^{-1} .
- (ii) Pour tout $g, f \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, les types (elliptique, parabolique, hyperbolique) de fgf^{-1} et g sont égales. Autrement dit, tous éléments de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ dans une classe de conjugaison sont de même type. On parle donc souvent de classes *elliptiques*, *paraboliques*, *hyperboliques*.
- (iii) Les éléments hyperboliques de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ qui fixent les mêmes points $z_1, z_2 \in \partial\mathcal{H}$, forment avec l'identité un sous-groupe, noté $\mathrm{St}(z_1, z_2)$.
- (iv) Les éléments elliptiques de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ qui fixent le même point $z \in \mathcal{H}$, forment avec l'identité le sous-groupe $\mathrm{St}(z)$.
- (v) Les éléments paraboliques de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ qui fixent le même point $z \in \partial\mathcal{H}$, forment avec l'identité un sous-groupe, noté $\mathrm{St}_{\mathrm{par}}(z)$. Pour le voir, suppose par conjugaison que ce point est ∞ .
- (vi) On peut montrer que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est engendré par ses éléments paraboliques. Mieux : Tout élément de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est produit d'au plus trois paraboliques.

3.2.2 Définition: Axe d'un hyperbolique

Soit $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ hyperbolique de points fixes $p, q \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Alors, le demi-cercle droite connectant les points⁹ p, q est appelé l'axe de g .

3.2.3 Lemme : Trace et type des transformations projectives

Soit $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \setminus \{\mathrm{Id}\}$ quelconque. Alors :

1. g est elliptique ssi $\mathrm{tr}^2(g) < 4$.
2. g est parabolique ssi $\mathrm{tr}^2(g) = 4$.
3. g est hyperbolique ssi $\mathrm{tr}^2(g) > 4$.

Preuve :

Cas $c = 0$: Par la preuve de 3.2.1, on a la chaîne d'équivalences :

$$\begin{aligned} g \text{ est hyperbolique} &\Leftrightarrow d \neq a \\ &\Leftrightarrow |a| \neq 1 \\ &\Leftrightarrow (a + d)^2 > 4 \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $ad = 1$. Si g n'est pas hyperbolique, c'est-à-dire $a = d$, alors g est parabolique et de plus $\mathrm{tr}^2(g) = 4$. Le cas elliptique n'est pas présent. D'après 3.2.1, ça montre tous les trois affirmations.

Cas $c \neq 0$: Alors, par la preuve de 3.2.1 les points fixes de g sont eux dans \mathbb{C} qui satisfont l'équation

$$cz^2 + z(d - a) - b = 0 \quad .$$

Les cas elliptique, parabolique, hyperbolique correspond aux valeurs $< 0, = 0, > 0$ de sa discriminant

$$\Delta := (d - a)^2 + 4bc = \mathrm{tr}^2(g) - 4 \quad .$$

□

3.2.4 Lemme : Stabilisateur parabolique de ∞

Le groupe $\mathrm{St}_{\mathrm{par}}(\infty)$ des éléments paraboliques (plus l'identité) qui fixent ∞ est de la forme

$$\mathrm{St}_{\mathrm{par}}(\infty) = \{(z \mapsto z + b) : b \in \mathbb{R}\}$$

et est isomorphe-homéomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.

Preuve : Soit $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ tel que g est parabolique (ou l'identité) de point fixé ∞ . Alors par 2.1.5(2) il est de la forme $(z \mapsto a^2z + ab)$. D'après 3.2.3(2) on déduit que g est en fait de la forme $(z \mapsto z + b)$ où $b \in \mathbb{R}$. Inversement, tout g de la forme $(z \mapsto z + b)$ est dans $\mathrm{St}_{\mathrm{par}}(\infty)$.

□

3.2.5 Lemme : Classes de conjugaison dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$

Soit $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \setminus \{\mathrm{Id}\}$. Alors :

1. g est hyperbolique ssi g est conjuguée dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ à $(z \mapsto \lambda^2 z)$ pour un $0 < \lambda \neq 1$.
2. g est parabolique ssi g est conjuguée dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ à $(z \mapsto z + 1)$ ou $(z \mapsto z - 1)$.
3. g est elliptique ssi g est conjuguée dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ à $\left(z \mapsto \frac{z \cos \vartheta - \sin \vartheta}{z \sin \vartheta + \cos \vartheta}\right)$ pour un $\vartheta \in \mathbb{R}$.

9. Si $p = \infty$, alors on prendre $L_\infty(q)$.

Preuve :

1. Évidemment tout $(z \mapsto \lambda^2 z)$, $0 < \lambda \neq 1$ et donc toute sa classe de conjugaison est hyperbolique. Soit d'autre part $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ hyperbolique avec l'axe L . Soit $f \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ une projection telle que $f(L) = i\mathbb{R}_{>0}$. Alors, fgf^{-1} préserve $i\mathbb{R}_{>0}$ et ses fixes sont 0 et ∞ . Par 2.4.1, une telle isométrie s'écrit $z \mapsto \lambda^2 z$.
2. De même comme ci-dessus, les classes des $(z \mapsto z \pm 1)$ sont paraboliques. Soit inversement $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ parabolique avec point fixe p . Par 2.2.1 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ agit transitivement sur $\partial\mathcal{H}$, donc on peut choisir un $f \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ tel que $f(p) = \infty$. Alors fgf^{-1} fixe ∞ et par remarque 3.2.1(ii) est lui-même parabolique. D'après 3.2.4 on déduit que fgf^{-1} est de la forme $(z \mapsto z + b)$ où $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Par conjugaison de fgf^{-1} avec $f' := (z \mapsto z/\sqrt{|b|})$ on arrive à la forme $f'fgf^{-1}f'^{-1} = (z \mapsto z + \mathrm{sgn}(b))$.
3. Par 2.2.2, tout $(z \mapsto \frac{z \cos \vartheta - \sin \vartheta}{z \sin \vartheta + \cos \vartheta})$ fixe i , d'où on déduit que sa classe est hyperbolique. Inversement, soit $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ elliptique de point fixe $p \in \mathcal{H}$. Par 2.2.1 le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ agit transitivement sur \mathcal{H} , donc on peut choisir un $f \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ tel que $f(p) = i$, c'est-à-dire fgf^{-1} fixe i . Par 2.2.2, il possède la forme $(z \mapsto \frac{z \cos \vartheta - \sin \vartheta}{z \sin \vartheta + \cos \vartheta})$ pour un $\vartheta \in \mathbb{R}$.

□

Conséquences :

- (i) Il y a deux classes de conjugaison paraboliques, à savoir les classes des $(z \mapsto z \pm 1)$.
- (ii) Si $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est parabolique de point fixe $p \in \partial\mathcal{H}$, alors par conjugaison on voit que, pour tout $z \in \mathcal{H}$ on a $g^n z \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p$.
- (iii) Si $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est hyperbolique, alors il existe deux points $p_1, p_2 \in \partial\mathcal{H}$ tels que pour tout $z \in \mathcal{H}$ on a $g^n z \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p_1$ et $g^{-n} z \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p_2$. Ces points sont exactement les points fixes de g .

3.2.6 Théorème : Structure de groupes hyperboliques, elliptiques, paraboliques

1. L'ensemble des éléments hyperboliques de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ d'une axe donnée, forme avec l'identité un sous-groupe abélien, isomorphe-homéomorphe à $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$.
2. L'ensemble des éléments elliptiques de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ d'un point fixé forme avec l'identité un sous-groupe abélien, isomorphe-homéomorphe au groupe (S^1, \cdot) , et compacte maximal dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.
3. L'ensemble des éléments paraboliques de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ d'un point fixé forme avec l'identité un sous-groupe abélien, isomorphe-homéomorphe au groupe $(\mathbb{R}, +)$.

Preuve :

1. Soit L un demi-cercle droite et $p_1, p_2 \in L \cap \partial\mathcal{H}$ ses extrémités. L'ensemble $\mathrm{St}(p_1, p_2)$ des éléments de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ qui fixent p_1, p_2 forme un sous-groupe. Par la preuve de 3.2.5(3), tous $g \in \mathrm{St}(p_1, p_2)$ peuvent être conjugués par le même conjuguant $f \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ à la forme $(z \mapsto \lambda^2 z)$, c'est-à-dire l'automorphisme intérieur ad_f envoie tout $\mathrm{St}(p_1, p_2)$ dans le sous-groupe abélien

$$G := \{(z \mapsto \lambda^2 z) : \lambda > 0\} \leq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \quad ,$$

qui est lui-même isomorphe-homéomorphe à $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$. Car en fait $\mathrm{ad}_f : \mathrm{St}(p_1, p_2) \rightarrow G$ est surjectif, on déduit que $\mathrm{St}(p_1, p_2)$ est un sous-groupe abélien, isomorphe à G et donc à $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$.

2. Soit $p \in \mathcal{H}$ quelconque. L'ensemble \mathcal{H}_p des éléments de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ de point fixe p , forme un sous-groupe. De même comme ci-dessus en (1), par la preuve de 3.2.5(3) il existe un $f \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ tel que l'automorphisme intérieur ad_f envoie \mathcal{H}_p sur le stabilisateur $\mathrm{St}(i)$ de i dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Par 3.1.3 $\mathrm{St}(i)$ est isomorphe-homéomorphe à S^1 et compacte maximale dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Donc, \mathcal{H}_p est également.
3. Par 3.2.4 on sait $\mathrm{St}_{\mathrm{par}}(\infty)$ est isomorphe-homéomorphe à $(\mathbb{R}, +)$. Soit $p \in \partial\mathcal{H}$ fixé. Choisis un $f \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ tel que $f(p) = \infty$, alors l'isomorphisme-homéomorphisme ad_f envoie $\mathrm{St}_{\mathrm{par}}(p)$ à $\mathrm{St}_{\mathrm{par}}(\infty)$.

□

3.2.7 Lemme : Action des hyperboliques sur leurs axes

Soit $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ hyperbolique avec l'axe L . Alors :

1. L'axe L et tous ses deux côtés ouvertes (c'est-à-dire intérieure et extérieure) sont préservées par g .
2. La valeur $l_g := \inf_{z \in \mathcal{H}} d_{\mathcal{H}}(z, g(z))$, appelée *distance de translation* de g , est atteint (seulement) en tout point de L .
3. On a la relation $\mathrm{tr}^2(g) = 2 \cosh(l_g) + 2$.

Preuve :

1. Car g agit sur les demi-cercles droites, qui eux mêmes sont déterminés par leur extrémités, son axe est un ensemble stable sous l'action de g . Soient $p_1, p_2 \in L \cap \partial\mathcal{H}$ les deux point fixes de g . Par 2.2.5 on peut choisir $f \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ tel que $f : (L, p_1, p_2) \mapsto (i\mathbb{R}_{>0}, 0, \infty)$. Donc, $\tilde{g} := f g f^{-1}$ est un hyperbolique qui fixe 0 et ∞ , donc possède la forme $\tilde{g} : z \mapsto \lambda^2 z$ avec $0 < \lambda \neq 1$. Évidemment, \tilde{g} préserve les côtés de $i\mathbb{R}_{>0}$. Par 2.3.1, g fait également.
2. Par conjugaison on peut supposer que g fixe 0 et ∞ , c'est-à-dire est de la forme $g : z \mapsto \lambda^2 z$ pour un $0 < \lambda \neq 1$. En particulier $L = i\mathbb{R}_{>0}$. Alors, pour tout $it \in i\mathbb{R}_{>0}$ on a

$$d_{\mathcal{H}}(it, g(it)) = \left| \ln \frac{g(it)}{it} \right| = |\ln \lambda^2| \quad .$$

En particulier $d_{\mathcal{H}}(z, g(z))$ est égal pour tout $z \in i\mathbb{R}_{>0}$. On le note l_g . D'autre part, pour $w \in \mathcal{H}$ quelconque, on a par formule (2.2.8.2)

$$\cosh [d_{\mathcal{H}}(w, g(w))] = 1 + \frac{1}{2} \frac{|w - \lambda^2 w|^2}{\Im(w) \cdot \Im(\lambda^2 w)} = 1 + \frac{1}{2} \frac{|w|^2}{|\Im w|^2} \cdot \frac{\overbrace{(1 - \lambda^2)^2}^{>0}}{\lambda^2} \geq \frac{1}{2} \left[\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} \right] = \cosh(l_g) \quad ,$$

avec égalité si et seulement si $\Re(w) = 0$, c'est-à-dire $w \in L$. Donc, l_g est vraiment égal à $\inf_{w \in \mathcal{H}} d_{\mathcal{H}}(w, g(w))$ et réalisé seulement pour $w \in L$.

3. On considère toujours le cas $g : z \mapsto \lambda^2 z$. Alors

$$\mathrm{tr}^2(g) = \left[\lambda + \frac{1}{\lambda} \right]^2 = \lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} + 2 = 2 \cosh(l_g) + 2$$

comme affirmé. □

3.2.8 Lemme : Action des elliptiques sur les cercles

Soient $z_0, z \in \mathcal{H}$ quelconques, fixés. Alors, le stabilisateur $\mathrm{St}(z_0)$ agit transitivement, librement sur le cercle centré en z_0 de rayon $d_{\mathcal{H}}(z_0, z)$. En particulier¹⁰,

$$\mathrm{Orb}_{\mathrm{St}(z_0)}(z) = \{w \in \mathcal{H} : d(w, z_0) = d(z, z_0)\} =: B_{d(z_0, z)}(z_0) \quad .$$

Preuve : Comme $\mathrm{St}(z_0)$ agit via isométries sur $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$, c'est claire que $\mathrm{Orb}_{\mathrm{St}(z_0)}(z) \subseteq B_{d(z_0, z)}(z_0)$. Soit d'autre part $w \in B_{d(z_0, z)}(z_0)$. Alors, il existe par 2.4.2 un unique $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ qui envoie $(z_0, z) \mapsto (z_0, w)$. Évidemment $g \in \mathrm{St}(z_0)$. □

3.2.9 Lemme sur groupes engendrés par $\mathrm{St}(i)$

Soit $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{St}(i)$. Alors, le groupe $\langle g, \mathrm{St}(i) \rangle$ engendré par g et $\mathrm{St}(i)$ contient un élément parabolique ou hyperbolique. En fait, pour tout $x \in \partial\mathcal{H}$ on peut trouver un élément parabolique ou hyperbolique dans $\langle g, \mathrm{St}(i) \rangle$ qui fixe x .

¹⁰. Voir 5.3.4 pour une affirmation similaire sur paraboliques.

Preuve : Si g est parabolique ou hyperbolique on a fini car $\mathrm{St}(i)$ agit transitivement sur $\partial\mathcal{H}$. Supposons donc que g est elliptique. Alors, $g(\infty) \neq \infty$, c'est-à-dire $g(\infty) = \cot(\alpha)$ pour un $\alpha \in (0, \pi)$. Pour $\vartheta \in S^1$ posons

$$\varphi_\vartheta := \left(z \mapsto \frac{z \cos \vartheta - \sin \vartheta}{z \sin \vartheta + \cos \vartheta} \right) \in \mathrm{St}(i) .$$

Alors

$$\varphi_{-\alpha} g(\infty) = \varphi_{-\alpha}(\cot \alpha) = \infty ,$$

c'est-à-dire $\varphi_{-\alpha} \circ g$ fixe ∞ . Comme $g \notin \mathrm{St}(i)$ c'est claire que $\varphi_{-\alpha} \circ g \neq \mathrm{Id}$. On déduit que $\varphi_{-\alpha} \circ g$ est parabolique ou hyperbolique avec point fixe ∞ . De plus, car $\mathrm{St}(i)$ agit transitivement sur $\partial\mathcal{H}$, on peut trouver un $\vartheta \in S^1$ tel que $\varphi_\vartheta(\infty) = x$. Alors, la projection conjuguée

$$\varphi_\vartheta \circ (\varphi_{-\alpha} \circ g) \circ \varphi_\vartheta^{-1}$$

fixe x .

□

Conséquence : Car le groupe $\langle g, \mathrm{St}(i) \rangle$ contient un parabolique ou elliptique, par 3.2.12 elle n'est pas relativement compact. Cela implique que $\mathrm{St}(i)$ est compact maximale dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, ce qui vérifie l'assertion 3.1.3.

3.2.10 Lemme sur la cardinalité des orbites

Une projection $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \setminus \{\mathrm{Id}\}$ est d'ordre infini ssi pour tout $z \in \mathcal{H}$ pas point fixe de g , l'orbite $\mathrm{Orb}_{\langle g \rangle}(z)$ est infinie.

Preuve : Direction " \Leftarrow " est trivial. Soit inversement g d'ordre infini et $z \in \mathcal{H}$ tel que $g(z) \neq z$. Supposons que l'orbite $\mathrm{Orb}_{\langle g \rangle}(z)$ est finie, alors $g^n z = g^m z$ pour quelques $n \neq m$, c'est-à-dire g^{n-m} possède dans \mathcal{H} un point fixe plus que g . Ça implique $g^{n-m} = \mathrm{Id}$, une contradiction!

□

3.2.11 Lemme sur la compacité de sous-groupes de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$

Soit $G \leq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ un sous-groupe (relativement) compact et $z \in \mathcal{H}$. Alors, toute orbite $\mathrm{Orb}_G(z)$ de z par G est (relativement) compacte dans \mathcal{H} .

Preuve : Considérons l'application continue $\zeta : \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{H}$ définie par $\zeta : g \mapsto g(z)$, $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Si G est compact, l'image $\zeta(G) = \mathrm{Orb}_G(z)$ est également. Si G est relativement compact, alors $\zeta(G) \subseteq \zeta(\mathrm{cl}(G))$, c'est-à-dire $\zeta(G)$ est contenu dans une compacte et donc lui même relativement compact.

□

3.2.12 Corollaire sur la compacité des sous-groupes de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$

Si $G \leq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est un sous-groupe qui contient un hyperbolique ou un parabolique, il n'est pas relativement compact (et donc pas compact). Par conséquence, tout hyperbolique ou parabolique n'est pas d'ordre fini.

Preuve par l'absurde : Supposons que $G \leq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est relativement compact et contient un parabolique g . Par 3.2.5(2) on peut supposer que g est de la forme $(z \mapsto z \pm 1)$, car pour tout $f \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ le groupe $\mathrm{ad}_f(G)$ est aussi relativement compact et $\mathrm{ad}_f(g)$ parabolique. Alors, pour tout $z \in \mathcal{H}$ la suite $g^n z = z \pm n$, $n \in \mathbb{N}$ n'est pas bornée. Par 3.2.11 cela donne une contradiction.

Si d'autre part g est hyperbolique, alors de même façon on peut supposer que g est de la forme $(z \mapsto \lambda^2 z)$ avec $0 < \lambda \neq 1$. Si $\lambda > 1$ alors l'orbite $(g^n z)_{n=1}^\infty = (\lambda^{2n} z)_{n=1}^\infty$ n'est pas bornée et on trouve une contradiction. Si $\lambda < 1$, alors $(g^{-n} z)_{n=1}^\infty$ n'est pas bornée et on trouve encore une contradiction.

□

3.3 La classe d'homéomorphie de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$

3.3.1 Théorème : Paramètres libres de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$

Soient $z, w \in \mathcal{H}$ n'importe quelle et $\varphi \in S^1$. Alors, il existe un unique $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ tel que

$$g(z) = w \quad , \quad \arg(g'|_z) = \varphi \quad .$$

Preuve d'existence : On peut toujours trouver des projections $g_1, g_2 \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ tels que $g_1(z) = i$ et $g_2(i) = w$. Alors, pour tout $g \in \mathrm{St}(i)$ on a

$$g_2 \circ g \circ g_1(z) = w \quad . \quad (3.3.1.1)$$

La dérivée de (3.3.1.1) à z est donnée par

$$g_2'|_i \cdot g'|_i \cdot g_1'|_z \quad . \quad (3.3.1.2)$$

Donc, par choix de $\arg[g'|_i]$ convenant, on peut ajuster l'argument de (3.3.1.2) comme souhaité.

Autrement dit, il suffit de montrer qu'il existe pour tout $\varphi \in S^1$ un $g \in \mathrm{St}(i)$ tel que $\arg(g'|_z) = \varphi$. On sait que pour $g = \left(z \mapsto \frac{z \cos \vartheta - \sin \vartheta}{z \sin \vartheta + \cos \vartheta} \right) \in \mathrm{St}(i)$ on a

$$g'|_z = \frac{1}{(z \sin \vartheta + \cos \vartheta)^2} \quad ,$$

c'est-à-dire $\arg(g'|_z) = -2 \arg(z \sin \vartheta + \cos \vartheta)$. L'application $\rho : [0, \pi] \rightarrow [0, 2\pi]$ donnée par

$$\rho(\vartheta) := 2 \arg(z \sin \vartheta + \cos \vartheta)$$

est continué et satisfait $\rho(0) = 0$, $\rho(\pi) = 2\pi$. Alors, pour tout $\varphi \in S^1$ il existe un $\vartheta \in [0, \pi]$ tel que $\rho(\vartheta) = \varphi$, c'est-à-dire un $g \in \mathrm{St}(i)$ satisfaisant $\arg[g'|_z] = \varphi$.

Preuve d'unicité : Suppose $g_1, g_2 \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ tels que g_1, g_2 satisfont l'affirmation. Car $|g'_k(z)| = \Im(w)/\Im(z)$, les conditions impliquent en fait $g'_1(z) = g'_2(z)$. Soient $\begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}$, $k \in \{1, 2\}$ les relèvements de g_1, g_2 . Alors, condition $g_1(z) = g_2(z)$ implique

$$\frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} \quad (3.3.1.3)$$

et $g'_1(z) = g'_2(z)$ se traduit par 2.1.5(3) à

$$\frac{1}{(c_1 z + d_1)^2} = \frac{1}{(c_2 z + d_2)^2} \quad . \quad (3.3.1.4)$$

De (3.3.1.4) on déduit $(c_1, d_1) = (c_2, d_2)$ ou $(c_1, d_1) = (-c_2, -d_2)$. Donc, (3.3.1.3) implique

$$(a_1, \dots, d_1) = (a_2, \dots, d_2) \quad \text{ou} \quad (a_1, \dots, d_1) = (-a_2, \dots, -d_2) \quad ,$$

c'est-à-dire $g_1 = g_2$. □

Interprétation : La transitivité de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ n'est pas simple, et en fait la famille des projections envoient un point donné z à un autre point donné w est décrit par un *paramètre de choix* dans S^1 . Ce paramètre décrit la *rotation* des directions des courbes passent par z dans un voisinage assez petit (vois figure 7).

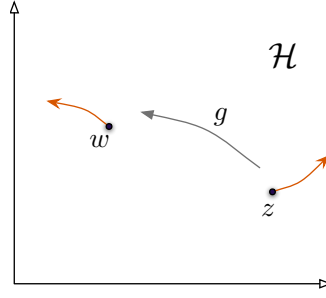


FIGURE 7: Sur le paramètre libre de la transitivité de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ sur \mathcal{H} .

Noter que le théorème implique que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est bijective à $\mathcal{H} \times S^1$. On va voir ci-dessous dans 3.3.4 que cette bijection est en fait un homéomorphisme.

3.3.2 Définition: Espace tangent de \mathcal{H}

Pour $z \in \mathcal{H}$ on note $T_z\mathcal{H} \cong \mathbb{C}$ l'espace tangent sur \mathcal{H} au point z . On note

$$T\mathcal{H} := \bigcup_{z \in \mathcal{H}} \{z\} \times T_z\mathcal{H}$$

son fibre tangent et identifie $T\mathcal{H} = \mathcal{H} \times \mathbb{C}$. On identifie donc un vecteur u dans $T_z\mathcal{H}$ par (z, u) . Chaque $T_z\mathcal{H}$ est munit du **produit scalaire hyperbolique**

$$\langle (z, u), (z, v) \rangle_{\mathcal{H}} := \langle u, v \rangle_{\mathcal{H}} := \frac{u \cdot v^*}{|\Im(z)|^2}, \quad u, v \in T_z\mathcal{H},$$

qui induit la notion d'une norme $\|u\|_{\mathcal{H}} := \sqrt{\langle u, u \rangle_{\mathcal{H}}} = |u| / \Im(z)$ et d'une angle

$$\cos(u \angle_{\mathcal{H}} v) := \frac{\langle u, v \rangle_{\mathcal{H}}}{\|u\|_{\mathcal{H}} \cdot \|v\|_{\mathcal{H}}}, \quad u, v \in T_z\mathcal{H}.$$

On appelle **fibre unitaire tangent** et note par $U\mathcal{H}$ l'ensemble des vecteurs dans $T\mathcal{H}$ de norme 1, c'est-à-dire

$$(z, u) \in U\mathcal{H} \Leftrightarrow \langle u, u \rangle_{\mathcal{H}} = 1 \Leftrightarrow |u| = \Im(z).$$

On identifie naturellement $U\mathcal{H} = \mathcal{H} \times S^1$.

3.3.3 Lemme : Action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ sur $T\mathcal{H}$

Le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ agit sur $T\mathcal{H}$ par

$$g \cdot (z, u) := (g(z), g'|_z \cdot u)$$

et cette action préserve la norme de vecteurs. En particulier, elle agit simplement transitivement sur le fibre unitaire tangent.

Preuve : Évidemment, pour $(z, u) \in T\mathcal{H}$ et $f, g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ on a $\mathrm{Id} \cdot (z, u) = (z, u)$ et

$$(g \circ f) \cdot (z, u) = (g(f(z)), (g \circ f)'(z) \cdot u) = \left(g(f(z)), g'|_{f(z)} \cdot f'|_z \cdot u \right) = g \cdot [f \cdot (z, u)],$$

donc $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ agit vraiment sur $T\mathcal{H}$. Soit $g := \left(z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \right) \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Alors

$$\langle g'|_z u, g'|_z u \rangle_{\mathcal{H}} = |g'|_z \cdot u|^2 \cdot |\Im(g(z))|^{-2} \stackrel{(2.1.5.2)}{=} \stackrel{(2.2.1.1)}{=} \frac{|u|^2}{|cz+d|^4} \cdot \frac{|cz+d|^4}{|\Im(z)|^2} = \langle u, u \rangle_{\mathcal{H}},$$

c'est-à-dire g préserve vraiment la norme des vecteurs. Donc, $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ agit sur $U\mathcal{H}$. Par 3.3.1, l'action est transitive et libre, c'est-à-dire le stabilisateur de tout vecteur $(u, v) \in U\mathcal{H}$ est le sous-groupe trivial. Donc $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ agit sur $U\mathcal{H}$ simplement transitivement. \square

Conséquence : Soit $(z, u) \in U\mathcal{H}$ quelconque. Car le stabilisateur de (z, u) est trivial, on déduit que le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est en bijection avec l'orbite $\mathrm{Orb}_{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})}((z, u))$ via la continue $g \mapsto g \cdot (z, u)$. En fait, car $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ agit transitivement sur $U\mathcal{H}$, cette application est une bijection entre $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ et $U\mathcal{H}$.

3.3.4 Théorème : Structure de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$

Le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $\mathcal{H} \times S^1$ via l'application

$$\underbrace{\left[(z, u) \mapsto \left(z, \frac{u}{i\Im(z)} \right) \right] \circ [g \mapsto g \cdot (i, i)]}_{g \mapsto [g(i), \arg(g'(i))]} : \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{H} \times S^1 . \quad (3.3.4.1)$$

Par conséquence, $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $D^\circ \times S^1$ où D° est le disque unité ouvert dans \mathbb{C} .

Preuve : Il suffit de montrer que l'application $(g \mapsto g \cdot (i, i)) : \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow U\mathcal{H}$ est homéomorphe. On sait déjà par 3.3.3 qu'elle est bijective et continue.

Soit $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Par 2.2.11 g est décomposable en unique façon en $g = g_2 \circ g_1$ où $g_1 \in \mathrm{St}(i)$ et $g_2 \in \mathrm{St}(\infty)$. Par 2.2.2 g_1 se relève à une matrice orthogonale spéciale de la forme

$$\begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad (3.3.4.2)$$

pour un $\vartheta \in [0, \pi)$. Car g_2 fixe ∞ , il se relève à une matrice dessus-triangulaire de la forme (2.2.11.2). L'action de $g = g_2 \circ g_1$ sur le vecteur $(i, i) \in U\mathcal{H}$ est donnée par

$$g \cdot (i, i) = (g(i), g'_i \mid_i \cdot g'_i \mid_i \cdot i) = \left[x + iy, \frac{iy}{(i \cdot \sin \vartheta + \cos \vartheta)^2} \right] \in U\mathcal{H} . \quad (3.3.4.3)$$

où $g(i) = x + iy$. Par (3.3.4.3) on peut voir l'inverse de $g \mapsto g \cdot (i, i) : \text{Pour } (x + iy, u) \in U\mathcal{H}$ trouve $\vartheta = \vartheta(u, y) \in [0, \pi)$ et forme g comme décrit. C'est facile à voir que cette attribution est continue. \square

3.3.5 Corollaire : Le groupe fondamental de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$

Le groupe fondamental de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est donné par $\mathbb{P}_1(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}$.

Preuve : Par 3.3.4 on sait $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \simeq D^\circ \times S^1$. Donc,

$$\Pi_1(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})) \cong \underbrace{\Pi_1(D^\circ)}_{\{0\}} \times \underbrace{\Pi_1(S^1)}_{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z} .$$

\square

3.4 Demi-tours

3.4.1 Définition: Angle d'un elliptique

Soit $p \in \mathcal{H}$ quelconque et $g \in \mathrm{St}(p)$. Alors, on appelle $\sphericalangle(g) := \arg [g'_p \mid_p]$ l'**angle** de g . Il satisfait les propriétés :

- Pour $g_1, g_2 \in \mathrm{St}(p)$ on a $\sphericalangle(g_1 g_2) = \sphericalangle(g_1) + \sphericalangle(g_2) \pmod{2\pi}$.

- Par théorème 3.3.1 il existe pour tout $\varphi \in [0, 2\pi)$ un unique $g \in \mathrm{St}(i)$ tel que $\sphericalangle(g) = \varphi$. Autrement dit, l'application

$$\sphericalangle : (\mathrm{St}(p), \circ) \rightarrow (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +) \quad .$$

est un isomorphisme de groupes abéliens.

Remarques

- (i) Si $g \in \mathrm{St}(p)$ est d'angle $\frac{2\pi}{n}$ pour un $n \in \mathbb{N}$, alors g est d'ordre n .
- (ii) Il existe pour tout $n \in \mathbb{N}$ au moins un $g \in \mathrm{St}(p)$ d'ordre n . En cas $n \leq 2$ ce g est unique.
- (iii) Plus précisément, $g \in \mathrm{St}(p)$ est d'ordre $n \in \mathbb{N}$ ssi $\exp[i\sphericalangle(g)]$ est racine n -ième primitive de 1 dans \mathbb{C} . Donc, il existe exactement $\varphi(n)$ elliptiques dans $\mathrm{St}(p)$ d'ordre n , où $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est l'indicatrice d'Euler.
- (iv) Pour $f \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ quelconque on a $fgf^{-1} \in \mathrm{St}(f(p))$ et $\sphericalangle(fgf^{-1}) = \sphericalangle(g)$.
- (v) En particulier, tous elliptiques dans la même classe de conjugaison sont de même angle. Inversement, comme tout $\mathrm{St}(p)$ est conjugué à $\mathrm{St}(i)$, tous elliptiques de même angle sont conjugués. Donc, toute classe elliptique est caractérisé par un angle dans S^1 .
- (vi) En particulier, $\mathrm{St}(i)$ forme une famille de représentants pour les classes de conjugaison elliptiques.
- (vii) On appelle l'isométrie unique dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ stabilisante $p \in \mathcal{H}$ et d'ordre 2, le **demi-tour** à p .
- (viii) Comme les paraboliques et hyperboliques sont d'ordre infinie, toute élément de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ d'ordre 2 est un demi-tour.
- (ix) Par remarque (iv), si g est le demi-tour à p et $f \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, alors fgf^{-1} est le demi-tour à $f(p)$.

Interprétation : Soit $p \in \mathcal{H}$ et $g \in \mathrm{St}(p)$ quelconque. Alors, dans un voisinage de p assez petit on a

$$g(z) - p \approx g'|_p \cdot (z - p) = |z - p| \cdot |g'(p)| \cdot \exp[\arg(z - p) + \arg(g'(p))] \quad .$$

De plus, par lemme 3.2.8 on sait que $d_{\mathcal{H}}(g(z), p) = d_{\mathcal{H}}(z, p)$. On voit par ça, que dans un petit voisinage de p , les points sont tournés au tour de p par l'angle $\sphericalangle(g)$.

Plus généralement, soit $z \in \mathcal{H} \setminus \{p\}$ quelconque et $g(z)$ son image sous l'elliptique $g \in \mathrm{St}(p)$. Alors, la géodésique L connectant p à z , est envoyé à la géodésique $g(L)$ connectant p à $g(z)$. L'angle entre ses deux géodésiques à leur point d'intersection (à savoir p) est exactement l'angle $\sphericalangle(g)$ de l'elliptique g .

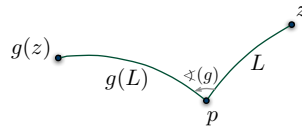


FIGURE 8 : Sur l'interprétation de l'angle d'un elliptique g : Géodésiques passant par le point fixe sont tournés par $\sphericalangle(g)$.

En cas spécial que $g \in \mathrm{St}(i)$, c'est-à-dire de la forme $g = \left(z \mapsto \frac{z \cos \vartheta - \sin \vartheta}{z \sin \vartheta + \cos \vartheta} \right)$, on trouve $g'(i) = e^{-i2\vartheta}$ et donc $\sphericalangle(g) = -2\vartheta$. Donc pour z assez proche de i , g tourne z par l'angle -2ϑ autour i , en préservant en fait approximativement la distance euclidienne.

3.4.2 Lemme : Caractérisation des demi-tours

Soit L un demi-cercle droite des extrémités $a, b \in \partial\mathcal{H}$. Alors, pour tout $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ il y a équivalence entre :

1. L'isométrie g échange les a et b entre eux.
2. L'isométrie g est un demi-tour à un point $p \in L \cap \mathcal{H}$.

En tout cas, g préserve L .

Preuve :

Direction “ \Rightarrow ” : Comme g envoie géodésiques sur géodésiques, ces qui sont caractérisées par leurs extrémités, on sait que g préserve L . Par 2.2.5 on peut choisir un $f \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ tel que $f : (L, a, b) \mapsto (i\mathbb{R}_{>0}, 0, \infty)$. Alors $g_0 := f g f^{-1}$ échange 0 et ∞ . Il reste à montrer que $f g f^{-1}$ est un demi-tour à un $it \in i\mathbb{R}_{>0}$. Soit g_0 de la forme $g_0 : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, alors la condition $g_0(0) = \infty$ implique $d = 0$ et $c = -1/b$. De même, la condition $g_0(\infty)$ implique $a = 0$ et donc $g_0 : z \mapsto -b^2/z$. Par conséquence g_0 fixe $i|b| \in i\mathbb{R}_{>0}$ et est donc elliptique. De plus, il est d'ordre 2, donc le demi-tour à $i|b|$.

Direction “ \Leftarrow ” : Par 2.2.5 on peut choisir un $f \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ tel que $f : (L, p, a, b) \mapsto (i\mathbb{R}_{>0}, i, 0, \infty)$. Alors, $f g f^{-1}$ est la demi-tour à i , c'est-à-dire avec relèvement

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

On sait qu'elle échange 0 et ∞ et préserve $i\mathbb{R}_{>0}$. Donc g préserve L et échange a et b . □

3.4.3 Lemme : Relation entre demi-tours et réflexions

Soient L, \tilde{L} demi-cercles droites dans $\overline{\mathcal{H}}$ et $\sigma_L, \sigma_{\tilde{L}}$ les réflexions par L et \tilde{L} . Supposer que L coupe \tilde{L} dans $p \in \mathcal{H}$ perpendiculairement. Alors :

1. σ_L échange les extrémités de \tilde{L} dans $\partial\mathcal{H}$.
2. La composition $\sigma_L \circ \sigma_{\tilde{L}}$ est le demi-tour au point p .
3. Tout demi-tour est composition de deux réflexions.
4. Si $g \in \mathrm{Isom}(\mathcal{H})$ est antiholomorphe et échange les deux extrémités de L , alors il est la réflexion par un demi-cercle droite perpendiculaire à L .
5. Tout élément $g \in \mathrm{Isom}(\mathcal{H})$ d'ordre 2 est soit une réflexion soit un demi-tour, correspondant aux cas d'être antiholomorphe et holomorphe respectivement.

Preuve :

1. Par conjugaison on peut supposer que σ_L est la réflexion principale par $L = i\mathbb{R}_{>0}$. Noter que toute $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ préserve les angles et envoie extrémités de géodésiques sur extrémités de géodésiques. Dans ce cas, les extrémités de \tilde{L} se trouvent sur \mathbb{R} symétriquement aux deux côtés de $i\mathbb{R}_{>0}$ et sont donc échangées par σ_L .
2. Par (1), $\sigma_L \circ \sigma_{\tilde{L}}$ échange les extrémités de \tilde{L} . Comme elle est holomorphe, donc dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, par caractérisation 3.4.2 on sait que $\sigma_L \circ \sigma_{\tilde{L}}$ est un demi-tour. Comme elle fixe p , elle est le demi-tour dans p .
3. Suit de (2).
4. Par hypothèse, $\sigma_L \circ g$ est holomorphe et échange les extrémités de L . Donc par 3.4.2 on sait que $\sigma_L \circ g$ est un demi-tour à un point $z \in L \cap \mathcal{H}$. Soit A le demi-cercle droite qui coupe L à z perpendiculairement et soit σ_A la réflexion par A . Alors, par (2) on sait que $\sigma_L \circ \sigma_A$ est le demi-tour $\sigma_L \circ g$. Donc, g est la réflexion σ_A .
5. On a déjà vu dans remarque 3.4.1(viii), que tout $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ d'ordre 2 est un demi-tour. Supposer donc que $g \in \mathrm{Isom}(\mathcal{H})$ est antiholomorphe d'ordre 2. Soit $p \in \partial\mathcal{H}$ n'importe quel, fixé et $q := g(p)$. Alors par hypothèse $g(q) = p$, c'est-à-dire g échange p et q . Supposer que q, p sont les extrémités de L . Alors, par (4) g est une réflexion. □

3.4.4 Lemme : Génération des hyperboliques par les demi-tours et les réflexions

Toute isométrie hyperbolique $h \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est :

1. Le produit de deux demi-tours.
2. Le produit de deux réflexions.

Preuve : Soit L l'axe de h et $a, b \in L \cap \partial H$ ses extrémités.

1. Choisissons un $p \in L \cap \mathcal{H}$ quelconque et considérons le demi-tour $\tau_p \in \mathrm{St}(p)$ à p . Alors par 3.4.2, $h \circ \tau_p(a) = b$ et $h \circ \tau_p(b) = a$. Donc, par 3.4.2 $h \circ \tau_p$ est aussi un demi-tour τ_q à un point $q \in L \cap \mathcal{H}$. Donc $h = \tau_q \circ \tau_p^{-1} = \tau_q \circ \tau_p$.
2. Choisir un demi-cercle droite A coupant L dans \mathcal{H} perpendiculairement. Soit σ_A la réflexion par A . Alors, $\sigma_A \circ h$ est antiholomorphe et échange par 3.4.3(1) les extrémités de L . Par 3.4.3(4) $\sigma_A \circ h$ est une réflexion, donc h est produit de deux réflexions.

□

Noter que dans tous les deux cas, on a en fait une liberté au choix de la composition, exprimé dans le premier cas comme le choix de $p \in L \cap \mathcal{H}$, dans le deuxième cas comme le choix de la géodésique $A \perp L$.

3.4.5 Lemme : Les elliptiques dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$

Les elliptiques dans $\mathrm{St}(i) \cap \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ sont les elliptiques des angles $\pi, \frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$.

Preuve : Soit $g \in \mathrm{St}(i) \cap \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ un elliptique d'angle $\angle(g)$, avec relèvement $\tilde{g} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Alors, $\mathrm{tr}^2(g) \in \mathbb{Z}$ et $\mathrm{tr}^2(g) < 4$, donc $\mathrm{tr}(\tilde{g}) \in \{0, \pm 1\}$. D'autre part, on sait que $\mathrm{tr}(\tilde{g})$ est la somme des valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}$ de \tilde{g} . Par la représentation 2.2.2 de $\mathrm{St}(i)$ on sait qu'ils ont donnés par $\lambda_{1/2} = \cos(\vartheta) \pm i \sin(\vartheta)$, où $\vartheta = \angle(g)/2$. Donc, il faut $\cos \vartheta \in \{0, \pm 1/2\}$, c'est-à-dire

$$\angle(g) \in \left\{ \pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right\} .$$

C'est facile à voir que cela donne aussi une condition suffisante pour $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$.

□

3.5 L'ensemble de Farey

3.5.1 Définition: Géodésiques de Farey

On considère l'ensemble $\mathcal{F} := \mathbb{Q} \cup \{\infty\} \subseteq \partial \mathcal{H}$, appelé **ensemble de Farey**. On dit que deux éléments $\frac{a}{c}, \frac{b}{d} \in \mathcal{F}$ (écrits sous forme irréductible) sont **voisins** si $|ad - bc| = 1$. On appelle **géodésique de Farey** tout géodésique de \mathcal{H} dont les extrémités sont des éléments voisins de \mathcal{F} .

Remarques

- (i) Dans l'expression précédente, on autorise c ou d à valoir zéro sous la convention $a/0 = \infty$. Par exemple, $\infty = 1/0$ et $0/1$ sont voisins.
- (ii) La définition ci-dessus est bien donnée, comme $|ad - bc|$ ne dépende pas de la représentation des $\frac{a}{c}, \frac{b}{d}$ (tant que $\mathrm{pgcd}(a, c) = 1 = \mathrm{pgcd}(b, d)$).
- (iii) Par Bézout¹¹, deux fractions $\frac{a}{c}, \frac{b}{d} \in \mathcal{F}$ (où $a, b, c, d \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$) sont irréductibles et voisins ssi

$$|ad - bc| = \left| \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right| = 1 .$$

- (iv) Par Bézout, il existe pour tout $\frac{a}{c} \in \mathcal{F}$ au moins un voisin.

3.5.2 Théorème : Action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ sur l'ensemble de Farey

Soit $\mathcal{F} := \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ l'ensemble de Farey. Alors $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ agit librement, transitivement sur l'ensemble des géodésiques *orientés* de Farey.

11. Deux entiers $a, b \in \mathbb{Z}$ sont premiers entre eux ssi il existe deux entiers $c, d \in \mathbb{Z}$ tels que $ad - bc = 1$.

Autrement dit : Si L, \tilde{L} sont des géodésiques de Farey, alors pour tout $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$, $g(L)$ est aussi une géodésique de Farey et il existe un unique $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ tel que $g(L) = \tilde{L}$.

Preuve : Notons que pour $z = z_1/z_2 \in \overline{\mathcal{H}}$ et $g = \left(z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \right) \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, on a $g(z_1/z_2) = w_1/w_2$ où

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} .$$

Toute géodésique L est caractérisé par ses extrémités $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$. Son image $g(L)$ possède les extrémités $\frac{\bar{p}}{\bar{q}}, \frac{\bar{r}}{\bar{s}}$ où

$$\begin{pmatrix} \bar{p} & \bar{r} \\ \bar{q} & \bar{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} . \quad (3.5.2.1)$$

Si $\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in \mathcal{F}$ sont irréductibles et voisins, alors

$$\det \begin{pmatrix} \bar{p} & \bar{r} \\ \bar{q} & \bar{s} \end{pmatrix} = \underbrace{\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_1 \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}}_{\in \{\pm 1\}} \in \{\pm 1\} ,$$

qui par remarque 3.5.1(iii) implique que les $\frac{\bar{p}}{\bar{q}}, \frac{\bar{r}}{\bar{s}} \in \mathcal{F}$ sont aussi irréductibles et voisins. Si inversement les géodésiques de Farey sont donnés par leurs extrémités $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ et $\frac{\bar{p}}{\bar{q}}, \frac{\bar{r}}{\bar{s}}$, alors g envoie la première sur la deuxième ssi l'identité (3.5.2.1) est satisfait de signe près. Elle se résout en

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \pm \underbrace{\begin{pmatrix} \bar{p} & \bar{r} \\ \bar{q} & \bar{s} \end{pmatrix}}_{\in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \underbrace{\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}^{-1}}_{\in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} ,$$

où on a supposé sans perdu de généralité que $(ps - qr) = 1 = (\bar{p} \cdot \bar{s} - \bar{q} \cdot \bar{r})$. Les deux solutions correspondent au même élément $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. □

3.5.3 Corollaire : Représentation de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$

Le groupe modulaire $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ est en bijection avec les géodésiques de Farey. Une bijection possible est donnée par

$$\underbrace{\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}}_{\substack{\text{extrémités} \\ \text{de la géodésique}}} \mapsto g \sim \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} ,$$

où $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ soient dans une forme irréductible telle que $(ps - qr) = 1$.

3.6 Le disque de Poincaré

3.6.1 Définition: Le disque de Poincaré

Soit $D^\circ := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ le disque unité ouvert dans \mathbb{C} , munit de la métrique

$$ds_D^2 = 4 \cdot \frac{dx^2 + dy^2}{[1 - |z|^2]^2} , \quad z = x + iy \in D^\circ$$

qui induit via géodésiques la distance

$$d_D(z_1, z_2) := \operatorname{arccosh} \left[1 + \frac{2|z_1 - z_2|^2}{[1 - |z_1|^2] \cdot [1 - |z_2|^2]} \right] , \quad z_1, z_2 \in D^\circ .$$

Alors, (D°, d_D) devient un espace métrique qui est un modèle d'espace hyperbolique de courbure constante -1 . Il s'appelle **disque de Poincaré** ou **représentation conforme**. Ses géodésiques sont exactement les intersections de cercles orthogonaux à ∂D° avec D° ou diamètres de D° . En particulier, ses géodésiques passent par le centre 0 sont exactement ses diamètres.

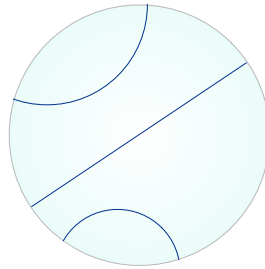


FIGURE 9: Sur le disque de Poincaré. Les géodésiques sont des arcs de cercles droites à ∂D° .

Comme dans le demi-plan supérieur, l'angle hyperbolique entre deux géodésiques croissantes à $z \in D^\circ$ est exactement l'angle euclidienne dans \mathbb{C} de leurs tangents à z .

3.6.2 Relation au demi-plan supérieur

L'application $\zeta : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ définie par

$$\zeta(z) := \frac{z - i}{z + i}$$

envoie le demi-plan supérieur \mathcal{H} à D° en façon homéomorphe et conforme. Elle possède l'inverse $f^{-1} : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ donnée par

$$\zeta^{-1}(z) = i \cdot \frac{1 + z}{1 - z} .$$

De plus, ζ envoie $\overline{\mathcal{H}}$ à $\overline{D} := \overline{D^\circ}$ en façon bijective et associe les géodésiques des deux modèles. Le bord ∂D° correspond au bord $\partial \mathcal{H} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ et plus précisément

$$(0, i, \infty, \mathbb{R}) \xleftrightarrow{\zeta} (-1, 0, 1, \partial D^\circ \setminus \{1\}) .$$

Voir figure 10 pour une illustration. En particulier, \mathbb{R} est homéomorphe à $(\partial D) \setminus \{1\}$ via ζ . Les droites en \mathcal{H} perpendiculaires à \mathbb{R} sont en correspondance bijective aux géodésiques dans D° passent par $1 \in D^\circ$.

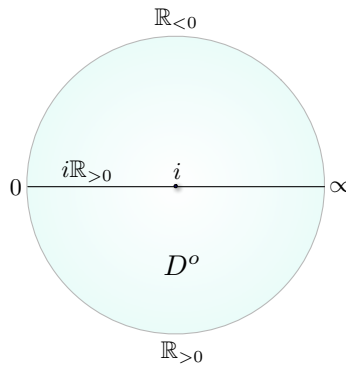


FIGURE 10: Sur l'association de \mathcal{H} au disque D° de Poincaré.

3.6.3 Isométries sur le modèle du disque

Les isométries sur D° qui préservent l'orientation sont données par le groupe **projective unitaire**

$$\mathrm{PU}(1,1) := \left\{ \left(z \mapsto \frac{az+b}{bz+\bar{a}} \right) : |a|^2 - |b|^2 = 1, a, b \in \mathbb{C} \right\}$$

et est liée à $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ comme

$$\mathrm{PU}(1,1) = \zeta \circ \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \circ \zeta^{-1} .$$

Le stabilisateur de 0 dans $\mathrm{PU}(1,1)$ est donné par

$$\mathrm{St}(0) = \{ (z \mapsto u^2 \cdot z) : u \in S^1 \} .$$

En façon similaire que pour $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, on définit l'application $\mathrm{tr}^2 : \mathrm{PU}(1,1) \rightarrow [0, \infty)$ comme

$$\mathrm{tr}^2 \left[z \mapsto \frac{az+b}{bz+\bar{a}} \right] := (a + \bar{a})^2 = 4(\Re(a))^2 .$$

Noter que comme la représentation des éléments dans $\mathrm{PU}(1,1)$ est unique jusqu'à un signe, tr^2 est bien définie. On trouve que

$$\mathrm{tr}^2 \left[\underbrace{\zeta g \zeta^{-1}}_{\in \mathrm{PU}(1,1)} \right] = \mathrm{tr}^2(g)$$

pour tout $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. En particulier, un élément de $\mathrm{PU}(1,1) \setminus \{\mathrm{Id}\}$ est hyperbolique/parabolique/elliptique ssi son trace carré est plus grand, égal et plus petit que 4.

4 Sous-groupes discrets de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$

4.1 Groupes Fuchsien

4.1.1 Definition: Action de groupes continue

Soit G un groupe topologique qui agit sur l'espace topologique X . On dit que G **agit continûment** ssi l'application $G \times X \rightarrow X$ induit par l'action du groupe est continue par rapport à la topologie produit.

Remarques : Suppose que G agit continûment sur X . Alors :

- (i) G agit via homéomorphismes sur X .
- (ii) Pour tout $x \in X$ fixé, l'application d'évaluation $G \rightarrow X$, $g \mapsto gx$ est continue.

4.1.2 Definition: Sous-groupe fuchsien

Un sous-groupe G de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est dit **fuchsien** s'il est discret par rapport à la topologie induit par $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire pour tout $g \in G$ il existe une ouverte U de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ telle que $G \cap U = \{g\}$. On dit un élément $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ **discret**, ssi son groupe engendré $\langle g \rangle$ est discret.

Exemples

- (i) Par remarques A.0.15(vii) et A.0.20(vi), tout sous-groupe discret de S^1 est fini. Par A.0.15(iv), l'inverse est vrai aussi.
- (ii) Le groupe modulaire $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \leq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est fuchsien. Cela suit de remarque A.0.20(v), du fait que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) / \{\pm 1\}$ et de la discretude de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.
- (iii) Soit $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ un élément d'ordre fini (et donc par 3.2.12 l'identité ou elliptique). Alors par remarque A.0.15(iv) le groupe engendré $\langle g \rangle$ est fuchsien. Vois 4.1.13 pour l'inverse.
- (iv) Soit $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ hyperbolique ou parabolique. Alors, en façon similaire que dans la preuve de 3.2.12, on déduit que $\langle g \rangle$ est fuchsien.

Remarques :

- (i) Par remarque A.0.20(i), un sous-groupe $G \leq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est fuchsien ssi l'identité Id est isolé dans G .
- (ii) Par remarque A.0.20(ii), un sous-groupe $G \leq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est fuchsien ssi il n'existe pas une suite $g_n \in G \setminus \{\mathrm{Id}\}$ telle que $g_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathrm{Id}$.
- (iii) Par remarque A.0.20(vi), tout sous-groupe $G \leq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ fuchsien est fermé.

4.1.3 Definition: Action discontinue

Soit G un groupe qui agit sur un espace topologique X via homéomorphismes. Alors, on dit son action **discontinue**, si pour tout $x \in X$ il existe un voisinage U de x tel que

$$|\{g \in G : gU \cap U \neq \emptyset\}| < \infty . \quad (4.1.3.1)$$

L'action est dit **proprement discontinue**, si pour tout $x \in X$ il existe un voisinage U de X tel que

$$gU \cap U = \emptyset \quad \forall g \in G \setminus \{1\} . \quad (4.1.3.2)$$

Remarques

- (i) Condition (4.1.3.1) est équivalente à

$$|\{g \in G : gU \cap fU \neq \emptyset\}| < \infty \quad \forall f \in G .$$

(ii) Condition (4.1.3.2) est équivalente à

$$gU \cap fU = \emptyset \quad \forall f \neq g \in G .$$

- (iii) Si G agit discontinûment (proprement discontinûment), alors tout stabilisateur $\mathrm{St}_G(x)$, où $x \in X$, est fini (trivial).
- (iv) La discontinuité de l'action d'un groupe n'est pas l'opposé de sa continuité, définie dans 4.1.1. En particulier, un groupe peut agir continûment, discontinûment.

4.1.4 Lemme : Caractérisation d'orbites

Soit G un groupe qui agit sur l'espace topologique X . On suppose que X est de Hausdorff et satisfait le premier axiome de dénombrabilité. Alors, il y a équivalence entre :

1. Toute orbite $\mathrm{Orb}_G(x)$ ne possède pas des points d'accumulation dans X et $\mathrm{St}_G(x)$ est fini.
2. Pour tout $x \in X$ il n'existe pas une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq G$ d'éléments deux à deux inégales telle que $(g_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans X .

Preuve :

1 \Rightarrow 2 : Soit $x \in X$. Supposons $(g_n)_n \subseteq G$ est une suite des éléments deux à deux inégales telle que $g_n x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$ pour un $y \in X$. Alors, car $\mathrm{St}_G(y)$ est fini, cette suite contient une infinité des éléments inégales à y . Donc, on a trouvé une suite des éléments de $\mathrm{Orb}_G(x) \setminus \{y\}$ qui converge vers y , d'où on déduit que y est un point d'accumulation de $\mathrm{Orb}_G(x)$.

2 \Rightarrow 1 : Supposons $\mathrm{St}_G(x)$ n'est pas fini, alors il existe une suite $g_n \in \mathrm{St}_G(x)$ de projections g_n deux à deux inégales, donc $g_n x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$, une contradiction! Supposons donc $\mathrm{St}_G(x)$ fini.

Supposons que y est un point d'accumulation de $\mathrm{Orb}_G(x)$. Alors, par remarque A.0.15(ix) il existe une suite $g_n(x) \in \mathrm{Orb}_G(x) \setminus \{y\}$ telle que $g_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$. Car X est Hausdorff, la suite $(g_n(x))_n$ possède une infinité des éléments deux à deux inégales. En particulier, $(g_n)_n$ possède une sous-suite des éléments deux à deux inégales.

□

4.1.5 Définition: Famille localement finie

Une famille $(X_i)_{i \in I}$ des sous-parties d'un espace topologique X est dit **localement finie** ssi pour tout $x \in X$ il existe un voisinage U de x qui rencontre au maximum un nombre fini des X_i , c'est-à-dire

$$|\{i \in I : X_i \cap U \neq \emptyset\}| < \infty .$$

Soit G un groupe qui agit sur X et $x_0 \in X$. Alors, l'orbite $\mathrm{Orb}_G(x_0)$ est dit **localement finie** ssi $(\{gx_0\})_{g \in G}$ est localement finie, c'est-à-dire pour tout $x \in X$ il existe un voisinage U de x tel que

$$|\{g \in G : gx_0 \in U\}| < \infty .$$

Remarques

- (i) Si $(X_i)_{i \in I}$ est localement fini, alors toute compacte $K \subseteq X$ rencontre au plus un nombre fini des X_i .
- (ii) L'inversion de (i) est vraie si par exemple X est localement compact.

4.1.6 Lemme : Caractérisation de l'action discontinue

Soit G un groupe qui agit sur l'espace métrique (X, d) via isométries. On suppose que X est localement compact. Alors, il y a équivalence entre :

1. Toute orbite $\mathrm{Orb}_G(x)$ de G est localement finie, c'est-à-dire pour tout $y \in X$ il existe un voisinage U de y tel que

$$|\{g \in G : g(x) \in U\}| < \infty .$$

2. Pour tout $x \in X$ l'orbite $\mathrm{Orb}_G(x)$ ne possède pas de points d'accumulation dans X et le stabilisateur $\mathrm{St}_G(x)$ est fini.

3. Pour tout $x \in X$ l'orbite $\mathrm{Orb}_G(x)$ est discret dans X et le stabilisateur $\mathrm{St}_G(x)$ est fini.

4. G agit discontinûment, c'est-à-dire pour tout $x \in X$ il existe un voisinage U de x tel que

$$|\{g \in G : gU \cap U \neq \emptyset\}| < \infty .$$

5. Pour tout $x \in X$ le stabilisateur $\mathrm{St}_G(x)$ est fini et il existe un voisinage U de x tel que

$$gU \cap U = \emptyset \quad \forall g \in G \setminus \mathrm{St}_G(x) .$$

Preuve :

- $1 \Rightarrow 2$: Soit $x \in X$ quelconque. Évidemment, il faut que $\mathrm{St}_G(x)$ est fini. Par 4.1.4 il reste à montrer que tout $y \in X$ n'est pas point d'accumulation de $\mathrm{Orb}_G(x)$. Choisis un voisinage U de y tel que $|\{g \in G : gx \in U\}| < \infty$, alors dans U il existe au maximum un nombre fini des éléments de $\mathrm{Orb}_G(x)$. Donc, car X est Hausdorff, on peut trouver un voisinage V de y tel que $(\mathrm{Orb}_G(x) \cap V) \setminus \{y\} = \emptyset$.

- $2 \Rightarrow 3$: Claire.

- $3 \Rightarrow 4$: Soit $x \in X$ quelconque. Car x n'est pas point d'accumulation de $\mathrm{Orb}_G(x)$, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $B_\varepsilon^o(x) \cap \mathrm{Orb}_G(x) = \{x\}$. Pose $U := B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$. Alors, si $g \in G$ est tel que $gU \cap U \neq \emptyset$, car g est une isométrie on déduit que $g(x) \in B_\varepsilon^o(x)$ et donc $g \in \mathrm{St}_G(x)$. Car $\mathrm{St}_G(x)$ est fini, on conclut

$$|\{g \in G : gU \cap U \neq \emptyset\}| < \infty .$$

- $4 \Rightarrow 1$: Supposons $x \in X$ est tel que son orbite $\mathrm{Orb}_G(x)$ n'est pas localement finie. Alors, par remarque 4.1.5(ii) il existe une compacte $K \subseteq X$ telle que

$$|\{g \in G : g(x) \in K\}| = \infty .$$

Si $\mathrm{St}_G(x)$ était infini, pour tout voisinage U de x on aurait $|\{g \in G : gU \cap U \neq \emptyset\}| = \infty$, une contradiction. Donc, on suppose $\mathrm{St}_G(x)$ fini et déduit que l'intersection $\mathrm{Orb}_G(x) \cap K$ est infinie. Car K est compacte, l'orbite $\mathrm{Orb}_G(x)$ possède en K un point y d'accumulation, c'est-à-dire pour tout voisinage U de y l'ensemble $\mathrm{Orb}_G(x) \cap U$ est infini. Par conséquence

$$|\{g \in G : gU \cap U \neq \emptyset\}| = \infty ,$$

une contradiction.

- $3 \Rightarrow 5$: Comme $\mathrm{Orb}_G(x)$ est discret, on peut choisir $\varepsilon > 0$ tel que $B_{3\varepsilon}^o(x) \cap \mathrm{Orb}_G(x) = \{x\}$. Supposer que $y \in B_\varepsilon^o(x) \cap gB_\varepsilon^o(x)$, alors $x \in B_\varepsilon^o(y)$ et car G agit via isométries, $gx \in B_\varepsilon^o(y)$, c'est-à-dire $d(x, gx) \leq 2\varepsilon$. Donc $gx = x$, c'est-à-dire $g \in \mathrm{St}_G(x)$.

- $5 \Rightarrow 4$: Trivial. □

Noter : L'équivalence entre (2) et (3) est vraiment une implication de l'isométrie de l'action du groupe.

4.1.7 Corollaire sur actions discontinues et l'espace quotient

Soit G un groupe qui agit discontinûment via isométries sur l'espace métrique (X, d) . On suppose que X est localement compact. Alors, l'espace quotient X/G est de Hausdorff.

Preuve : On note $[x] := \mathrm{Orb}_G(x) \in X/G$ pour $x \in X$. On note $p : X \rightarrow X/G$, $p : x \mapsto [x]$ la projection quotient. Soient $[x_1] \neq [x_2] \in X/G$. Par 4.1.6, $x_1 \notin \mathrm{Orb}_G(x_2)$ n'est pas point d'accumulation de $\mathrm{Orb}_G(x_2)$. Donc, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_{2\varepsilon}^o(x_1) \cap \mathrm{Orb}_G(x_2) = \emptyset$. On pose

$$U_1 := \bigcup_{g \in G} \underbrace{B_\varepsilon^o(gx_1)}_{g[B_\varepsilon^o(x_1)]} , \quad U_2 := \bigcup_{g \in G} \underbrace{B_\varepsilon^o(gx_2)}_{g[B_\varepsilon^o(x_2)]} .$$

Alors, car tous $g \in G$ sont des isométries, les U_1, U_2 sont des ouverts disjointes, contenant x_1 et x_2 respectivement. En fait, ils sont les images réciproques des ouverts

$$p(U_k) = p[B_\varepsilon^o(x_k)] , \quad k = 1, 2 .$$

Par la surjectivité de $p : X \rightarrow X/G$, cela implique que les $p(U_1), p(U_2) \subseteq X/G$ sont des ouverts disjointes, qui contiennent les $[x_1], [x_2]$. □

Remarque : Théorème 6.4.1 donne en fait une propriété plus forte : La métrisabilité de la topologie quotient.

4.1.8 Corollaire sur actions discontinues et proprement discontinues

Soit G un groupe qui agit discontinûment via isométries sur l'espace métrique (X, d) . On suppose que X est localement compact. Alors, tout stabilisateur est trivial ssi G agit proprement discontinûment.

Preuve : Direction “ \Leftarrow ” est triviale. Direction “ \Rightarrow ” suit de la caractérisation 4.1.6(5) d'une action discontinue. □

4.1.9 Lemme sur actions discontinues sans torsion

Soit G un groupe sans torsion qui agit discontinûment via isométries sur l'espace métrique (X, d) . Alors, tout stabilisateur $\mathrm{St}_G(x)$, où $x \in X$, est trivial.

Preuve : Supposons le contraire, c'est-à-dire il existe un $x \in X$ et un $g \in \mathrm{St}_G(x) \setminus \{1\}$. Alors, x est aussi point fixé des puissances g^n , où $n \in \mathbb{N}$. Comme g est d'ordre infini, les g^n sont deux à deux inégales, donc $|\mathrm{St}_G(x)| = \infty$. Par remarque 4.1.3(iii), cela est une contradiction à la discontinuité de l'action de G . □

4.1.10 Lemme : Condition suffisante pour groupes discrets

Soit X un espace topologique et G un groupe topologique agissant continûment sur X . Supposons qu'une des suivantes est satisfait :

1. G et X sont de Hausdorff et G agit discontinûment.
2. G agit proprement discontinûment.

Alors, le groupe G est discret.

Preuve :

1. Soit $x \in X$ quelconque. Par discontinuité, il existe un ouvert $U \subseteq X$ contenant x , tel que $\mathrm{Orb}_G(x)$ rencontre U seulement un nombre fini de fois. Comme X est de Hausdorff, on peut diminuer U tel que $U \cap \mathrm{Orb}_G(x) = \{x\}$, c'est-à-dire $\{x\}$ est ouvert dans $\mathrm{Orb}_G(x)$. Comme l'application d'évaluation $\chi : G \rightarrow \mathrm{Orb}_G(x)$, $\chi : g \mapsto gx$ est continue, par conséquence $\mathrm{St}_G(x) = \chi^{-1}(\{x\})$ est ouvert. D'autre part, par discontinuité $\mathrm{St}_G(x)$ est fini. Comme G est de Hausdorff, tout point d'une partie de G finie, ouverte est lui même isolé. Donc, l'identité $1 \in \mathrm{St}_G(x)$ est isolée. Par remarque A.0.20(i) cela implique que G est discret.
2. De même façon comme dans (1), on montre que $\{1\} = \mathrm{St}_G(x)$ est ouvert. □

4.1.11 Théorème : Caractérisation des groupes fuchsien

Un sous-groupe $G \leq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est fuchsien ssi il agit discontinûment sur \mathcal{H} .

Preuve :

Direction “ \Rightarrow ” : Supposons $G \leq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ discret. Soit $K \subseteq \mathcal{H}$ une compacte et $z \in \mathcal{H}$ quelconque. Par 4.1.6 il suffit à montrer que l'ensemble

$$\mathcal{E}_0 := \{g \in G : g(z) \in K\} = G \cap \underbrace{\{g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) : g(z) \in K\}}_{=: \mathcal{E}}$$

est fini. Car G est discret, par remarque A.0.15(vii) il suffit à montrer que \mathcal{E} est compact dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Posons

$$\bar{\mathcal{E}} := \Pi^{-1}(\mathcal{E}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) : \frac{az+b}{cz+d} \in K \right\},$$

alors par continuité de Π il suffit à montrer la compacité de $\bar{\mathcal{E}}$ dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbb{R}^4$. Pour cela, il suffit à montrer que $\bar{\mathcal{E}}$ est borné et fermé. On considère l'application continue $\zeta : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ donnée par

$$\zeta : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \frac{az+b}{cz+d},$$

alors l'image réciproque $\bar{\mathcal{E}} = \zeta^{-1}(K)$ est bien sûr fermé car K est fermé. Car K est compacte dans \mathcal{H} , il existe $m, M > 0$ tels que $\Im(w) > m$ et $|w| < M$ pour tout $w \in K$. Alors, on a les implications

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \bar{\mathcal{E}} &\Leftrightarrow \frac{az+b}{cz+d} \in K \\ &\Rightarrow \frac{\Im(z)}{|cz+d|^2} > m \quad \wedge \quad \left| \frac{az+b}{cz+d} \right| < M \\ &\Rightarrow |cz+d| < \sqrt{\frac{\Im(z)}{m}} \quad \wedge \quad |az+b| < M \sqrt{\frac{\Im(z)}{m}} \end{aligned}$$

c'est-à-dire $\bar{\mathcal{E}}$ est borné.

Direction “ \Leftarrow ” : Supposons que G est non-discret. Alors, par remarque A.0.20(ii) il existe une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq G \setminus \{\mathrm{Id}\}$ telle que $g_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathrm{Id}$. On va montrer qu'il existe un $z \in \mathcal{H}$ tel que $g_n z \neq z \forall n$.

Suppose l'affirmation faux. Alors, pour tout $z \in \mathcal{H}$ il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que g_n fixe z . Mais tout g_n fixe au maximum un $z \in \mathcal{H}$. D'autre part, les $\{z \in \mathcal{H}\}$ ne sont pas dénombrables. Cela est une contradiction.

Ça implique que $z \neq g_n z \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z$, c'est-à-dire z est un point d'accumulation de $\mathrm{Orb}_G(z)$. Par 4.1.6 cela implique que G n'agit pas discontinûment. □

4.1.12 Définition: Ensemble limite d'un groupe

Soit $G \leq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ un sous-groupe de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. L'**ensemble limite** de G est l'ensemble des points d'accumulation dans $\bar{\mathcal{H}}$ des G -orbites sur \mathcal{H} .

Remarque : Si $G \leq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est discret, alors par lemme 4.1.6 et théorème 4.1.11 toute son orbite est sans points d'accumulation dans \mathcal{H} . Par conséquence, son ensemble limite se trouve exclusivement dans $\partial\mathcal{H}$.

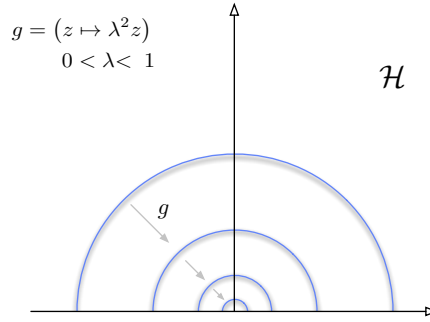


FIGURE 11: Sur la définition de l'ensemble limite d'une projection $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$: Ici, les images des cercles droites sous l'action de l'hyperbolique $g = (z \mapsto \lambda^2 z)$ où $0 < \lambda < 1$. Son ensemble limite est exactement $\{0, \infty\}$.

4.1.13 Lemme sur elliptiques dans groupes fuchsien

Soit $G \leq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ un sous-groupe fuchsien. Alors :

1. Tout élément elliptique de G est d'ordre fini.
2. L'ensemble des points fixes elliptiques de G n'a pas de points d'accumulation dans \mathcal{H} .

Preuve :

- a) Il suffit à montrer que si $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est elliptique tel que son groupe engendré $\langle g \rangle$ est discret, alors g est d'ordre fini. Soit $z \in \mathcal{H}$ quelconque inégal au point fixé de g . Alors, par lemme 3.2.8 on sait que l'orbite $\mathrm{Orb}_{\langle g \rangle}(z)$ se trouve sur un cercle dans \mathcal{H} . Par 4.1.11 le groupe $\langle g \rangle$ agit discontinûment, qui par 4.1.6 et remarque A.0.15(x) implique que toute son orbite est discret. Donc, l'orbite $\mathrm{Orb}_{\langle g \rangle}(z)$ est discret dans une compacte. Par remarque A.0.15(vii) cela implique que l'orbite est de cardinal fini, c'est-à-dire $g^n z = z$ pour un $n \in \mathbb{N}$. Donc g^n possède deux points fixes dans \mathcal{H} et par conséquence $g^n = \mathrm{Id}$.
- b) Suppose le contraire. Alors, il existe points $p_1, p_2, \dots \in \mathcal{H}$ deux à deux inégales tels que $p_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p \in \mathcal{H}$ et elliptiques $g_1, g_2, \dots \in G$ tels que chaque g_n fixe p_n . Par 2.2.1 on peut trouver $f_n \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ tels que $f_n(p_n) = i$ et en fait $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ où $f(p) = i$. Donc, les conjugués $f_n g_n f_n^{-1}$ sont dans $\mathrm{St}(i)$, qui par 3.1.3 est compact. Alors, les $f_n g_n f_n^{-1}$ possèdent dans $\mathrm{St}(i)$ un point d'accumulation. Car $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ satisfait le première axiome de dénombrabilité, on peut supposer que ils converge vers un $\tilde{g} \in \mathrm{St}(i)$. Car $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ on déduit que $g_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f^{-1} \tilde{g} f$. Car $G \leq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est discret, par A.0.22(2) il est fermé, donc $f^{-1} \tilde{g} f =: g \in G$. Note que les g_n sont deux à deux inégales car ils fixent points deux à deux inégales. Donc, $g \in G$ est un point d'accumulation de G , une contradiction à la discrétion de G . □

Remarque : Soit $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ elliptique d'ordre infini et z pas point fixe de g . Alors, par 3.2.10 et 3.2.8 l'orbite $\mathrm{Orb}_{\langle g \rangle}(z)$ est infinie dans une compacte, donc possède un point d'accumulation.

4.2 Groupes élémentaires

4.2.1 Définition: Groupe élémentaire

Un sous groupe $G \leq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est **élémentaire** s'il admet une orbite finie dans $\overline{\mathcal{H}}$.

Exemples

- (i) Si G admet un point fixe globale (e.g. $\mathrm{St}(i)$) dans $\overline{\mathcal{H}}$, G est élémentaire.
- (ii) Si $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est hyperbolique ou parabolique, alors $\langle g \rangle$ est élémentaire et par exemple 4.1.2(iv) discret.
- (iii) Si $h \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est hyperbolique, $p \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ parabolique et h, p ont un point fixe en commun, alors $\langle h, p \rangle$ est élémentaire et non-discret. Vois 4.2.12.
- (iv) Soit $X \subseteq \overline{\mathcal{H}}$ une partie finie et $(g_i)_{i \in I} \subseteq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ telle que $g_i|_X : X \rightarrow X \quad \forall i \in I$. Alors, pour toute composition $g_{i_1}^{n_1} \dots g_{i_k}^{n_k} \in \langle g_i : i \in I \rangle =: G$ on a

$$g_{i_1}^{n_1} \dots g_{i_k}^{n_k}|_X : X \rightarrow X \quad .$$

Par conséquence, pour tout $x \in X$ l'orbite $\mathrm{Orb}_G(x)$ est dans X , donc finie. En particulier, G est élémentaire.

4.2.2 Théorème sur groupes totalement elliptiques

Soit $G \leq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ un sous-groupe **totalement elliptique**, c'est-à-dire G ne contient que des elliptiques et l'identité. Alors G admet un point fixe globale.

Preuve : On va considérer l'action du groupe G dans le disque de Poincaré (vois 3.6.3). Supposons que G contient deux elliptiques $g_1, g_2 \in G$ de deux points fixes inégales. Par conjugaison on peut supposer que g_1 fixe 0 et possède donc la forme $g_1 : z \mapsto u^2 \cdot z$ avec $u \in S^1$. Soit $g_2 : z \mapsto \frac{az+b}{bz+a}$. Alors

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}^2 [g_1, g_2] &= \mathrm{tr}^2 \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & \bar{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & -b \\ -\bar{b} & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u} & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \\ &= \left[2|a|^2 \underbrace{|u|^2}_1 - |b|^2 (\bar{u}^2 + u^2) \right]^2 = \left[2 + 2|b|^2 - |b|^2 (u^2 + \bar{u}^2) \right]^2 \\ &= \left[2 - |b|^2 (u - \bar{u})^2 \right]^2 = \left[2 + 4|b|^2 (\Im(u))^2 \right]^2 > 4 \end{aligned}$$

Note que pour la dernière étape on a utilisé le fait que g_2 ne fixe pas 0 (donc $b \neq 0$) et g_1 n'est pas l'identité (donc $\Im(u) \neq 0$). Par conséquence, $[g_1, g_2] \in G$ est hyperbolique, une contradiction! □

Conséquences :

- (i) Dans la preuve on a vu que, si $g_1, g_2 \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ sont elliptiques de points fixes inégales, alors leur commutateur $[g_1, g_2]$ est hyperbolique.
- (ii) Tout sous-groupe totalement elliptique est élémentaire.
- (iii) Tout sous-groupe $G \leq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ totalement elliptique, est conjugué dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ à un sous-groupe de $\mathrm{St}(i)$. Pour le voir, conjugue G par $f \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ où $f(p) = i$.
- (iv) Par 3.2.12 et remarque (iii), un sous-groupe $G \leq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est relativement compact ssi il est totalement elliptique ssi il possède un point fixe globale dans \mathcal{H} .

4.2.3 Théorème sur groupes fuchsien élémentaires

Soit $G \leq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ un sous-groupe fuchsien, élémentaire. Alors, un des deux est vrai :

1. G est monogène (cyclique).
2. Il existe un $\lambda > 0$ tel que G est conjugué dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ au groupe

$$\left\langle (z \mapsto \lambda z), (z \mapsto -\frac{1}{z}) \right\rangle \quad .$$

4.2.4 Lemme de conjugaison

Soient $f, g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ quelconques. Construit $g_0 := g$ et $g_{n+1} := g_n f g_n^{-1}$, $n \in \mathbb{N}_0$. S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $g_n = f$, alors $\langle f, g \rangle$ est élémentaire.

Preuve : On suppose que $f, g \neq \mathrm{Id}$, sinon l'affirmation est triviale.

Cas f elliptique ou parabolique : Soit $z \in \overline{\mathcal{H}}$ le point fixe de f . Alors pour $n \in \mathbb{N}_0$, g_{n+1} fixe $g_n(z)$ et c'est en fait son seul point fixe. Si $g_n = f$ alors g_n fixe z mais ainsi $g_{n-1}(z)$, donc par unicité $g_{n-1}(z) = z$. Donc g_{n-1} fixe aussi z , et de même $g_{n-2}(z) = z$. On déduit donc par induction que tous g_0, \dots, g_n fixent z . En particulier, f et g ont un point fixe en commun, donc $\langle f, g \rangle$ est élémentaire.

Cas f hyperbolique : Soient $z_1, z_2 \in \partial\mathcal{H}$ les points fixes de f . Alors, g_n fixe les points $g_{n-1}(z_1)$, $g_{n-1}(z_2)$ et ils sont ses seuls points fixes. Si $g_n = f$, alors g_n fixe z_1, z_2 , donc par unicité

$$g_{n-1}(\{z_1, z_2\}) = \{z_1, z_2\} \quad . \quad (4.2.4.1)$$

On note que par 3.2.12 f n'est pas d'ordre fini, donc $f(\{x, y\}) = \{x, y\}$ implique toujours $\{x, y\} = \{z_1, z_2\}$. Donc, (4.2.4.1) implique $g_{n-2}(\{z_1, z_2\}) = \{z_1, z_2\}$ et par induction

$$g_k(\{z_1, z_2\}) = \{z_1, z_2\} \quad \forall 0 \leq k \leq n \quad . \quad (4.2.4.2)$$

En particulier $g(\{z_1, z_2\}) = \{z_1, z_2\}$. Donc, par l'exemple 4.2.1(iv) $\langle f, g \rangle$ est élémentaire. \square

4.2.5 Théorème de Jørgensen

Soient $f, g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ tels que $\langle f, g \rangle$ est discret et non-élémentaire. Alors :

$$\boxed{|\mathrm{tr}^2 f - 4| + |\mathrm{tr}[f, g] - 2| \geq 1} \quad . \quad (4.2.5.1)$$

De plus, 1 est la plus grande constante possible.

Preuve : Vois [4].

Remarques :

- (i) Note que pour $\mathrm{tr}[f, g]$ dans (4.2.5.1) on relève avant commuter (vois 3.1.2).
- (ii) Considérons les projections ¹²

$$f := (z \mapsto z + 1) \quad , \quad g := (z \mapsto -\frac{1}{z}) \quad ,$$

alors $\mathrm{tr}^2 f = 4$ et

$$[f, g] = \left(z \mapsto \frac{2z+1}{z+1} \right) \quad ,$$

donc $\mathrm{tr}[f, g] = 3$. Alors :

- $\langle f, g \rangle \leq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est discret.
- $\langle f, g \rangle$ est non-élémentaire.
- Pour f, g , l'inégalité de Jørgensen (4.2.5.1) devient en fait une égalité.

4.2.6 Définition: Produit scalaire et norme sur $\mathbb{K}^{n \times n}$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, l'application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{K}^{n \times n} \times \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K} \quad , \quad \langle M, N \rangle := \mathrm{tr}(M^\dagger N)$$

définit un produit scalaire hermitien sur l'espace linéaire $(\mathbb{K}^{n \times n}, +)$. Il induit la norme

$$\|\cdot\|_2 : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow [0, \infty) \quad , \quad \|\cdot\|_2 : (M_{ij})_{i,j=1}^n \mapsto \sqrt{\langle M^\dagger, M \rangle} = \sqrt{\sum_{i,j} |M_{ij}|^2}$$

sur $\mathbb{K}^{n \times n}$.

12. Se rappelle que par 2.1.6 $\langle f, g \rangle = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$.

Remarques :

(i) Si $M \in \mathbb{K}^{n \times n}$, alors par Cauchy-Schwarz on a

$$|\mathrm{tr}(M)|^2 = \left| \sum_{i=1}^n M_{ii} \right|^2 \stackrel{\text{C.S.}}{\leq} n \cdot \sum_{i=1}^n |M_{ii}|^2 \leq n \cdot \|M\|_2^2 ,$$

c'est-à-dire

$$|\mathrm{tr}(M)| \leq \sqrt{n} \cdot \|M\|_2 .$$

En particulier, la trace $\mathrm{tr} : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}$ est un opérateur linéaire borné.

(ii) L'application $\|\cdot\|_2 : \mathrm{PSL}_2(\mathbb{K}) \rightarrow [0, \infty)$ est bien définie sur $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ par relèvement des projections dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Noter que sur $(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}), \circ)$, $\|\cdot\|_2$ n'est pas une norme !

(iii) Soit $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ avec l'inverse M^{-1} . Alors

$$\|M - \mathbb{1}\|_2 = \|M^{-1} - \mathbb{1}\|_2 .$$

Autrement dit, l'inversion de matrices dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ préserve la distance de $\mathbb{1}$.

4.2.7 Conséquence du théorème de Jørgensen

Considérons deux $f, g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, des relèvements $1 + X$ et $1 + Y$ respectivement. Soient $(1 + X)^{-1} =: (1 + X')$ et $(1 + Y)^{-1} =: (1 + Y')$. Alors d'une part

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}[f, g] &= \mathrm{tr}[(1 + X)(1 + Y)(1 + X')(1 + Y')] \\ &= \mathrm{tr} \left[1 + \underbrace{X + X' + XX'}_0 + \underbrace{Y + Y' + YY'}_0 \right] + \mathcal{O}(\|X\|_2 \cdot \|Y\|_2) \\ &= 2 + \mathcal{O}(\|X\|_2 \cdot \|Y\|_2) . \end{aligned}$$

Note que par remarque 4.2.6(iii) $\|X\|_2 = \|X'\|_2$ et $\|Y\|_2 = \|Y'\|_2$. D'autre part

$$\mathrm{tr}^2 f - 4 = \mathrm{tr}(4X) + \mathrm{tr}^2 X$$

et par remarque 4.2.6(i)

$$|\mathrm{tr}^2 f - 4| \in \mathcal{O}(\|X\|_2) .$$

Par conséquence, il existe une constante $C > 0$ explicite, telle que pour $\varepsilon > 0$ assez petit, $\|X\|_2, \|Y\|_2 \leq \varepsilon$ impliquerait

$$|\mathrm{tr}^2 f - 4| + |\mathrm{tr}[f, g] - 2| \leq C \cdot \varepsilon .$$

Soient de plus $f, g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ tels que leur groupe engendré $\langle f, g \rangle$ est discret et non-élémentaire. Alors, l'inégalité de Jørgensen (4.2.5.1) fournit une minoration pour $\max\{\|X\|_2, \|Y\|_2\}$.

En fait, par Beardon on peut déduire la majoration

$$\boxed{\max\{\|\tilde{f} - 1\|_2, \|\tilde{g} - 1\|_2\} \geq 0.14} \quad (4.2.7.1)$$

pour tous $f, g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ de relèvements $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, qui engendrent un groupe discret, non-élémentaire.

Conséquence : Par 4.2.7 il existe un voisinage $V \subseteq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ de Id tel que, pour $f, g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ satisfaisant $f, g \in V$ il faut que $\langle f, g \rangle$ est élémentaire ou non-discret. On dit un tel voisinage **voisinage de Zassenhaus**.

4.2.8 Lemme sur sous-groupes sans hyperboliques

Soit $G \leq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ un sous-groupe qui ne contient pas des hyperboliques mais contient des paraboliques. Alors, G admet un point fixe globale dans $\partial\mathcal{H}$. En particulier, G est élémentaire et ne contient pas des elliptiques.

Preuve : Soit $f \in G$ un parabolique. Par conjugaison (vois 3.2.5), remarque 3.2.1(ii) et le fait que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ agit sur $\partial\mathcal{H}$, on peut supposer que f possède un des deux relèvements

$$\begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Soit $g \in G$ quelconque avec relèvement

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ,$$

alors $\mathrm{tr}^2(f^n g) = (a + d \pm nc)^2$. Car $f^n g$ n'est pas hyperbolique pour tout $n \in \mathbb{N}$, par 3.2.3(3) il faut $c = 0$. Ceci étant vrai pour tout $g \in G$, le point ∞ est un point fixe global. □

Conséquences

1. Tout sous-groupe $G \leq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ contenant des elliptiques et paraboliques, contient aussi des hyperboliques.
2. Pour $\{0\} \neq G \leq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ il y a équivalence entre :
 - (i) G ne contient pas d'hyperboliques mais quelques paraboliques.
 - (ii) G est totalement parabolique.
 - (iii) G est totalement parabolique avec point fixé en commun.
3. Par 4.2.2 et 4.2.8 on conclut : Si $G \leq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ ne contient pas d'hyperboliques, alors elle est soit totalement elliptique, soit totalement parabolique. En tous les deux cas, elle possède un point fixe en commun.

4.2.9 Théorème sur groupes non-élémentaires

Soit $G \leq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ un sous-groupe non-élémentaire. Alors, G contient une infinité d'éléments hyperboliques.

Preuve : D'après 3.2.12 tout hyperbolique est d'ordre infini. Donc, il suffit en fait de montrer que G contient un élément hyperbolique. Supposons que G ne contient pas d'hyperbolique. Alors, car G est non-élémentaire, par remarque 4.2.2(ii) G contient un parabolique f . Par lemme 4.2.8, G doit être élémentaire, une contradiction ! □

4.2.10 Théorème sur groupes sans éléments elliptiques

Soit $G \leq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ un sous-groupe sans éléments elliptiques. Alors, G est élémentaire ou discret.

Remarque : Un tel groupe est **sans torsion**, c'est-à-dire tout élément $\mathrm{Id} \neq g \in G$ est d'ordre infini.

4.2.11 Théorème : Caractérisation des groupes non-élémentaires discrets

Soit $G \leq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ un sous-groupe non-élémentaire. Alors, G est discret ssi pour tout $f, g \in G$ leur groupe engendré $\langle f, g \rangle$ est discret [Katok].

4.2.12 Lemme sur groupes engendrés par paraboliques et hyperboliques

Soient $p, h \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ tels que p est parabolique, h est hyperbolique et p, h ont un point fixe en commun. Alors, le sous-groupe engendré $\langle h, p \rangle \leq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ ne contient pas des elliptiques, est élémentaire mais n'est pas discret.

Remarque : C'est évident que $\langle h, p \rangle$ est élémentaire et ne contient pas des elliptiques. Donc, il suffit de montrer que $\langle h, p \rangle$ n'est pas discret. Par conjugaison on peut supposer que h, p fixent ∞ . Par 3.2.4 et le preuve de 3.2.6(1) ils possèdent les formes

$$p : z \mapsto z + b \quad , \quad h : z \mapsto \lambda z$$

pour quelques $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $0 < \lambda \neq 1$. On peut supposer que $\lambda < 1$, alors les éléments $h^n p h^{-n}$ possèdent la forme

$$h^n p h^{-n} : z \mapsto z + \lambda^n b \quad , \quad n \in \mathbb{N} \quad .$$

Choisir $z \in \mathcal{H}$ quelconque, alors $z \neq h^n p h^{-n} z \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z$, c'est-à-dire l'orbite $\mathrm{Orb}_{\langle p, h \rangle}(z)$ possède un point d'accumulation dans \mathcal{H} . Par 4.1.6 $\langle h, p \rangle$ n'agit pas discontinûment et par 4.1.11 n'est pas discret. □

5 Domaines fondamentaux

5.1 Domaines fondamentaux

5.1.1 Définition: Domaine fondamental

Soit G un groupe qui agit via homéomorphismes sur un espace topologique X . Un **domaine fondamental** pour G est un ouvert $\mathfrak{D} \subseteq X$ tel que :

1. Pour tout $g \in G \setminus \{1\}$ on a $g\mathfrak{D} \cap \mathfrak{D} = \emptyset$.
2. L'orbite de $\text{cl}(\mathfrak{D})$ couvre l'espace, c'est-à-dire

$$\text{Orb}_G(\text{cl}(\mathfrak{D})) := \bigcup_{g \in G} \text{cl}(g\mathfrak{D}) = X \quad .$$

Remarques

- (i) La notion d'un domaine fondamental est très proche à la notion de blocs d'un groupe (vois [A.0.27](#)).
- (ii) Soit $g \in G$ quelconque. Alors, un ouvert \mathfrak{D} est un domaine fondamental de G ssi $g\mathfrak{D}$ est également.
- (iii) Si \mathfrak{D} est un domaine fondamental de G et $|\mathfrak{D}| \geq 2$, alors G n'agit pas transitivement sur X .
- (iv) Soit $\mathfrak{D} \subseteq X$ un domaine fondamental de G . Alors, toute orbite $\text{Orb}_G(x)$, $x \in X$ rencontre $\text{cl}(\mathfrak{D})$ et pour tout $x \in \mathfrak{D}$ on a $\text{St}_G(x) = \{1\}$. De plus, G agit simplement transitivement sur le système

$$\{g\mathfrak{D} : g \in G\} \quad .$$

- (v) Si \mathfrak{D} est un domaine fondamental de G , alors $g\mathfrak{D} \cap \overline{\mathfrak{D}} = \emptyset$ pour tout $g \in G \setminus \{1\}$. Cela suit du fait que $g\mathfrak{D}$ est ouvert et $\overline{\mathfrak{D}}$ la fermeture de \mathfrak{D} .
- (vi) Autrement dit, les orbites $\text{Orb}_G(\mathfrak{D})$ et $\text{Orb}_G(\partial\mathfrak{D})$ forment un recouvrement de X disjoint. Car $\text{Orb}_G(\mathfrak{D})$ est ouvert, alors $\text{Orb}_G(\partial\mathfrak{D})$ est fermé.

Exemples

- (i) Si G est triviale, alors l'espace sur lequel il agit est un domaine fondamental.
- (ii) Le groupe engendré par l'hyperbolique $g := (z \mapsto \lambda \cdot z) \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$, où $0 < \lambda \neq 1$, possède sur \mathcal{H} comme domaine fondamental l'ouvert entre deux demi-cercles droites centrés à 0, associées via g .
- (iii) Le groupe engendré par le parabolique $g := (z \mapsto z + 1) \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ possède sur \mathcal{H} le domaine fondamental $\mathfrak{D} := (0, 1) + i\mathbb{R}_{>0}$.
- (iv) Le sous-groupe modulaire $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ possède dans \mathcal{H} le domaine fondamental

$$\mathfrak{D} := \left\{ z \in \mathcal{H} : -\frac{1}{2} < \Re(z) < \frac{1}{2}, |z| > 1 \right\} \quad .$$

Voir [\[5\]](#) et [\[9\]](#) §6.7 pour plus d'informations.

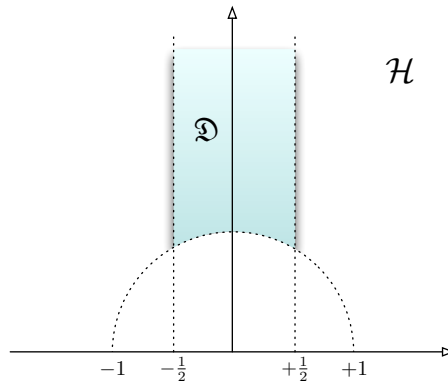


FIGURE 12: Un domaine fondamental du groupe modulaire $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ sur \mathcal{H} .

5.1.2 Lemme : Condition nécessaire pour l'existence d'un domaine fondamental

Soit G un groupe qui agit via isométries sur l'espace métrique (X, d) . On suppose que X est localement compact. Si G possède dans X un domaine fondamental \mathfrak{D} , alors G agit discontinûment.

Preuve : Par théorème 4.1.6 il faut montrer que toute orbite $\text{Orb}_G(x)$ ne possède pas de points d'accumulation et tout stabilisateur $\text{St}_G(x)$ est fini. Par remarque 5.1.1(ii) il suffit de montrer ça pour $x \in \overline{\mathfrak{D}}$. Par condition 5.1.1(1) on sait que $\text{St}_G(x)$ est trivial pour $x \in \mathfrak{D}$.

Proposition : Pour $x \in \mathfrak{D}$, l'orbite $\text{Orb}_G(x)$ ne possède pas de points d'accumulation dans X .

Preuve : Choisir $\varepsilon > 0$ tel que $B_{2\varepsilon}(x) \subseteq \mathfrak{D}$. Suppose que $y \in X$ est point d'accumulation de $\text{Orb}_G(x)$. Alors, il existe deux $g, f \in G$ tels que $fx \neq gx \in B_\varepsilon(y) \cap \text{Orb}_G(x) \setminus \{y\}$. Donc

$$d(x, g^{-1}fx) = d(gx, fx) \leq 2\varepsilon ,$$

c'est-à-dire $g^{-1}fx \in B_{2\varepsilon}(x)$. En particulier $\mathfrak{D} \cap g^{-1}f\mathfrak{D} \neq \emptyset$. Mais car $g^{-1}f \neq 1$, cela est une contradiction !

Proposition : Pour $x \in \overline{\mathfrak{D}}$, l'orbite $\text{Orb}_G(x)$ ne possède pas de points d'accumulation dans X .

Preuve : Supposons $y \in X$ est point d'accumulation de $\text{Orb}_G(x)$. Car X est localement compact, on peut choisir un $\varepsilon > 0$ tel que $B_{2\varepsilon}(y)$ est compact. Choisir $\tilde{x} \in B_\varepsilon(x) \cap \mathfrak{D}$ fixé. Car X est Hausdorff et y point d'accumulation de $\text{Orb}_G(x)$, il existe $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq G$ tels que $g_n x \in B_\varepsilon(y) \setminus \{y\}$ sont deux à deux inégales. Donc

$$d(g_n \tilde{x}, y) \leq \underbrace{d(g_n \tilde{x}, g_n x)}_{d(\tilde{x}, x) \leq \varepsilon} + \underbrace{d(g_n x, y)}_{\leq \varepsilon} \leq 2\varepsilon ,$$

c'est-à-dire $g_n \tilde{x} \in B_{2\varepsilon}(y)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Car $\tilde{x} \in \mathfrak{D}$, on sait que $\text{St}_G(\tilde{x})$ est fini. Car les g_n sont deux à deux inégales, on en déduit que $\{g_n \tilde{x}\}_{n \in \mathbb{N}}$ est un ensemble infini, contient dans la compacte $B_{2\varepsilon}(y)$. Donc, il possède un point d'accumulation dans X . Car $\{g_n \tilde{x}\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \text{Orb}_G(\tilde{x})$, cela est une contradiction à la proposition précédente.

Proposition : Pour $x \in \overline{\mathfrak{D}}$, le stabilisateur $\text{St}_G(x)$ est fini.

Preuve : Car X est localement compact, on peut choisir un $\varepsilon > 0$ tel que la boule $B_\varepsilon(x)$ es compacte. Choisir $\tilde{x} \in B_\varepsilon(x) \cap \mathfrak{D}$ et supposer que $\text{St}_G(x)$ est infini. Car $\text{St}_G(\tilde{x})$ est fini, on en déduit que la sous-orbite $\text{St}_G(x)\tilde{x}$ est infini. Car G préserve la distance, on sait que $\text{St}_G(x)\tilde{x} \subseteq B_\varepsilon(x)$. Donc $\text{St}_G(x)\tilde{x}$ possède un point d'accumulation. Donc, $\text{Orb}_G(\tilde{x})$ fait également, une contradiction à la proposition précédente. □

5.1.3 Définition: Domaine fondamental localement fini

Soit $\mathfrak{D} \subseteq X$ un domaine fondamental pour un groupe G qui agit via homéomorphismes sur l'espace topologique X . Alors, \mathfrak{D} est dit **localement fini** ssi la famille $(g\mathfrak{D})_{g \in G}$ est localement finie dans X , c'est-à dire pour tout $x \in X$ il existe un voisinage de x qui rencontre au plus un nombre fini de copies de \mathfrak{D} .

Remarques

- (i) $(g\mathfrak{D})_{g \in G}$ est localement fini ssi $(g\overline{\mathfrak{D}})_{g \in G}$ est également. Pour le voir, se rappeler que si $U \subseteq X$ est un ouvert tel que $U \cap g\overline{\mathfrak{D}} \neq \emptyset$, alors $U \cap g\mathfrak{D} \neq \emptyset$.
- (ii) Soit \mathfrak{D} un domaine fondamental. Alors, \mathfrak{D} est localement fini ssi pour tout $x \in X$ il existe un voisinage U de x tel que $(gU)_{g \in G}$ rencontre $\overline{\mathfrak{D}}$ au maximum un nombre fini de fois. En ce cas, l'ensemble $\text{Orb}_G(x) \cap \overline{\mathfrak{D}}$ est toujours fini.

Exemple : Le groupe engendré par l'homéomorphisme $g := (z \mapsto 2z)$ possède sur \mathbb{C} les domaines fondamentaux

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_1 &:= \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\} \quad , \\ \mathfrak{D}_2 &:= [D_1 \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{C}_+)] \cup \{z \in \mathbb{C}_+ : \exp[-\Re(z)] < \Im(z) < 2 \exp[-\Re(z)]\} \quad . \end{aligned}$$

Seulement \mathfrak{D}_1 est localement fini.

5.1.4 Lemme sur l'application quotient

Soit G un groupe qui agit sur l'espace métrique (X, d) via isométries. Soit \mathfrak{D} un domaine fondamental de G . Alors, la relation binaire

$$x \sim_G y \Leftrightarrow y \in \text{Orb}_G(x) \quad , \quad x, y \in \overline{\mathfrak{D}}$$

est une relation d'équivalence sur $\overline{\mathfrak{D}}$. Notons $\overline{\mathfrak{D}}/G$ l'espace quotient induit par cette relation. Supposons que \mathfrak{D} est localement fini. Alors, l'application quotient

$$p : \overline{\mathfrak{D}} \rightarrow \overline{\mathfrak{D}}/G \quad , \quad x \mapsto \text{Orb}_G(x) \cap \overline{\mathfrak{D}}$$

est fermée¹³ et propre.

Preuve : On va montrer que, pour toute fermée $B \subseteq \overline{\mathfrak{D}}$ dans $\overline{\mathfrak{D}}$, l'image réciproque

$$\tilde{B} := p^{-1}(p(B)) = \text{Orb}_G(B) \cap \overline{\mathfrak{D}}$$

est fermée dans $\overline{\mathfrak{D}}$. Soit $(g_n b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \tilde{B}$ une suite qui converge vers un $x \in \overline{\mathfrak{D}}$, où $b_n \in B$ et $g_n \in G$. Alors $d(g_n b_n, x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ implique $d(b_n, g_n^{-1}x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Note que par remarque 5.1.3(ii) il existe un $\varepsilon > 0$ tel que

$$|\{g \in G : B_\varepsilon(gx) \cap \overline{\mathfrak{D}} \neq \emptyset\}| < \infty \quad ,$$

donc l'ensemble $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est fini. Par conséquence, il existe un $g \in G$ et une sous-suite de b_n qui converge vers gx . Car $\overline{\mathfrak{D}}$ est fermé, il faut $gx \in \overline{\mathfrak{D}}$. Car B est fermé dans $\overline{\mathfrak{D}}$, il faut en fait $gx \in B$. Autrement dit, $x \in \overline{\mathfrak{D}} \cap gB \subseteq \tilde{B}$, d'où on déduit que \tilde{B} est fermée.

Il reste à montrer que p est propre. Par remarque A.0.7(i) il suffit à montrer que pour tout $x \in \overline{\mathfrak{D}}$, l'orbite $\text{Orb}_G(x) \cap \overline{\mathfrak{D}}$ est compacte. Mais par remarque 5.1.3(ii) on sait qu'elle est finie, donc compacte. □

5.1.5 Lemme sur la projection de domaines fondamentaux

Soit G un groupe qui agit sur l'espace topologique X via homéomorphismes et $\mathfrak{D} \subseteq X$ un domaine fondamental de G . Alors, l'application

$$\eta : \overline{\mathfrak{D}}/G \rightarrow X/G \quad , \quad \overline{\mathfrak{D}} \cap \text{Orb}_G(x) \mapsto \text{Orb}_G(x), \quad x \in \overline{\mathfrak{D}}$$

est bien définie, continue et bijective.

Preuve : L'injectivité de η est claire. Car tous les orbites de G rencontrent $\overline{\mathfrak{D}}$, η est surjectif. La continuité suit de la définition de la topologie quotient. □

5.1.6 Théorème sur domaines fondamentaux localement finis

Soit G un groupe qui agit sur l'espace topologique via homéomorphismes et $\mathfrak{D} \subseteq X$ un domaine fondamental de G localement fini. Alors, la bijection

$$\eta : \overline{\mathfrak{D}}/G \rightarrow X/G \quad , \quad \overline{\mathfrak{D}} \cap \text{Orb}_G(x) \mapsto \text{Orb}_G(x), \quad x \in \overline{\mathfrak{D}}$$

est en fait un homéomorphisme.

13. Note : On sait déjà que p est continue et ouverte.

Preuve : D'après 5.1.5 on sait déjà que η est continue et bijective. Il reste donc à montrer que η est une ouverte. Soit $B \subseteq \overline{\mathfrak{D}}$ l'image réciproque d'une ouverte dans $\overline{\mathfrak{D}}/G$, c'est-à-dire ouverte dans $\overline{\mathfrak{D}}$ et de la forme

$$B = \text{Orb}_G(B) \cap \overline{\mathfrak{D}} := \bigcup_{b \in B} \text{Orb}_G(b) \cap \overline{\mathfrak{D}} . \quad (5.1.6.1)$$

Par définition de la topologie quotient, il suffit à montrer que l'ensemble $\text{Orb}_G(B) := \bigcup_{g \in G} gB$ est ouvert dans \mathcal{H} . Pour cela, il suffit à montrer que pour tout $b \in B$ il existe un voisinage de b contenu dans $\text{Orb}_G(B)$. Soit $b \in B$ n'importe quel. Noter que par (5.1.6.1), pour tout $g \in G$ on a l'équivalence

$$b \in g\overline{\mathfrak{D}} \Leftrightarrow b \in gB . \quad (5.1.6.2)$$

Car \mathfrak{D} est localement fini, il existe un voisinage U de b tel que la famille

$$S := \{g \in G : U \cap g\overline{\mathfrak{D}} \neq \emptyset\}$$

est finie. Pose

$$S_1 := \{g \in G : b \in gB\} \stackrel{(5.1.6.2)}{=} \{g \in G : b \in g\overline{\mathfrak{D}}\}$$

$$S_2 := S \setminus S_1 = \{g \in G : U \cap g\overline{\mathfrak{D}} \neq \emptyset, b \notin g\overline{\mathfrak{D}}\} .$$

Comme S_1 est finie et toute gB ouverte dans $g\overline{\mathfrak{D}}$, on peut trouver un voisinage $\tilde{U} \subseteq U$ de b tel que

$$b \in \tilde{U} \cap g\overline{\mathfrak{D}} \subseteq gB \quad \forall g \in S_1 . \quad (5.1.6.3)$$

Car S_2 est finie, on peut de plus supposer

$$\tilde{U} \cap g\overline{\mathfrak{D}} = \emptyset \quad \forall g \in S_2 . \quad (5.1.6.4)$$

Donc, on trouve

$$b \in \tilde{U} = \tilde{U} \cap \overbrace{\bigcup_{g \in G} g\overline{\mathfrak{D}}}^X \stackrel{(5.1.6.4)}{=} \bigcup_{g \in S_1} \tilde{U} \cap g\overline{\mathfrak{D}} \stackrel{(5.1.6.3)}{\subseteq} \bigcup_{g \in S_1} gB \subseteq \bigcup_{g \in G} gB .$$

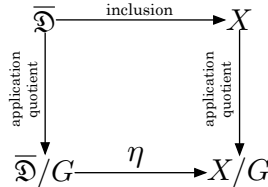


FIGURE 13: Sur théorème 5.1.6. Le diagramme ci-dessus commute.

□

5.1.7 Corollaire sur la compacité de X/G

Soit G un groupe qui agit sur l'espace métrique (X, d) via isométries. Soit $\mathfrak{D} \subseteq X$ un domaine fondamental de G localement fini. Alors, \mathfrak{D} est compact ssi X/G est compact.

Preuve : Par théorème 5.1.6 la bijection $\eta : \overline{\mathfrak{D}}/G \rightarrow X/G$ est un homéomorphisme. Si $\overline{\mathfrak{D}}$ est compact, alors $\overline{\mathfrak{D}}/G$ est compact et donc X/G également.

Inversement, si X/G est compact, alors $\overline{\mathfrak{D}}/G$ est également. Par 5.1.4 l'application quotient $\overline{\mathfrak{D}} \rightarrow \overline{\mathfrak{D}}/G$ est propre, donc $\overline{\mathfrak{D}}$ est compact.

□

5.1.8 Théorème : Génération des groupes

Soit G un groupe qui agit via homéomorphismes sur l'espace topologique connexe X . Soit $\mathfrak{D} \subseteq X$ un domaine fondamental pour G localement fini. Alors, la famille

$$S := \{g \in G : g\overline{\mathfrak{D}} \cap \overline{\mathfrak{D}} \neq \emptyset\}$$

engendre le groupe G .

Preuve : On considère le sous-groupe $G_S \leq G$ engendré par S . Par définition du domaine fondamental, pour tout $x \in X$ il existe un $g \in G$ tel que $x \in g\overline{\mathfrak{D}}$. Si $g_1, g_2 \in G$ vérifient $x \in g_1\overline{\mathfrak{D}}$, $x \in g_2\overline{\mathfrak{D}}$, alors $x \in g_1\overline{\mathfrak{D}} \cap g_2\overline{\mathfrak{D}}$ et donc $\overline{\mathfrak{D}} \cap g_1^{-1}g_2\overline{\mathfrak{D}} \neq \emptyset$. Autrement dit, $g_1^{-1}g_2 \in S$ et $g_1G_S = g_2G_S$. On a donc défini une application $\varphi : X \rightarrow G/G_S$, surjective. Il reste à montrer que φ est constante. Par remarque A.0.13(i), il suffit à montrer que φ est localement constante.

Soit $x \in X$ n'importe quel, alors car \mathfrak{D} est localement fini il existe un voisinage U de x tel que

$$S_0 := \{g \in G : U \cap g\overline{\mathfrak{D}} \neq \emptyset\}$$

est fini. En fait, on peut supposer¹⁴ que $x \in g\overline{\mathfrak{D}}$ pour tout $g \in S_0$. Par définition, $\varphi(x) = gG_S$ pour tout $g \in S_0$. D'autre part, si $y \in U$, alors $\varphi(y) = gG_S$ pour quelqu'un $g \in S_0$ et par conséquence $\varphi(x) = \varphi(y)$. On en déduit que φ est constante sur U . □

5.1.9 Lemme : Existence de non-fixes

Soit $G \leq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ un groupe fuchsien. Alors, il existe un point $z \in \mathcal{H}$ tel que $g(z) \neq z$ pour tout $g \in G \setminus \{\mathrm{Id}\}$.

Preuve : Comme $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est à base dénombrable, G est par remarque A.0.15(xiv) dénombrable. D'autre part, toute $g \in G \setminus \{\mathrm{Id}\}$ possède au maximum un point fixe dans \mathcal{H} et \mathcal{H} est infini non-dénombrable. □

5.1.10 Théorème : Le domaine fondamental de Dirichlet

Soit $G \leq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ un groupe fuchsien et $z_0 \in \mathcal{H}$ tel que $gz_0 \neq z_0 \forall g \in G \setminus \{\mathrm{Id}\}$ (voir 5.1.9). Alors, l'ensemble

$$\mathfrak{D}_{z_0} := \bigcap_{\substack{g \in G \\ g \neq \mathrm{Id}}} \{z \in \mathcal{H} : d_{\mathcal{H}}(z_0, z) < d_{\mathcal{H}}(gz_0, z)\} \quad .$$

est un domaine fondamental de G localement fini et convexe. Il est dit **domaine fondamental de Dirichlet**. Noter que sa nature dépend du choix de z_0 .

Preuve : Voir [5]. Voir aussi [9], théorème 6.6.13 pour une affirmation plus générale.

5.1.11 Lemme de Shimizu

Soit $G \leq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ un sous-groupe discret qui contient l'élément parabolique ($z \mapsto z + 1$). Alors :

1. Tout $g \in \mathrm{St}_G(\infty)$ est parabolique ou l'identité.
2. Pour $g = \begin{pmatrix} az+b \\ cz+d \end{pmatrix} \in G \setminus \mathrm{St}_G(\infty)$ on a $|c| \geq 1$.
3. Pour $z \in \mathcal{H}$ on a

$$\Im(g(z)) \leq \frac{1}{\Im(z)} \quad \forall g \in G \setminus \mathrm{St}_G(\infty) \quad .$$

14. Par diminution de U si nécessaire. Note que les $g\overline{\mathfrak{D}}$ sont fermés.

Preuve :

1. Si $g \in \text{St}_G(\infty)$ était hyperbolique, alors par 4.2.12 le groupe G ne serait pas discret, une contradiction.
2. Supposer que $0 < |c| < 1$ et poser $g_0 := g$. Poser par récurrence $g_{n+1} := [g_n, p]$, où $p := (z \mapsto z + 1)$. Alors

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - a_n c_n & a_n^2 + a_n c_n - 1 \\ -c_n^2 & c_n^2 + a_n c_n + 1 \end{pmatrix} .$$

Noter que $c_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, mieux, en fait $\sum_n |c_n| < \infty$. De plus

$$|1 - a_{n+1}| = |a_n c_n| \leq |c_n| + \underbrace{|1 - a_n|}_{|a_{n-1} c_{n-1}|} \cdot \underbrace{|c_n|}_{< 1} \leq |c_n| + |a_{n-1} c_{n-1}| \leq (\dots) \leq \sum_{i=1}^n |c_i| + |a_0 c_0| ,$$

d'où la suite $(a_n)_n$ est bornée. Donc, $|1 - a_{n+1}| = |a_n| \cdot |c_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, c'est-à-dire $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$. Donc $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et $d_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$, c'est-à-dire $g_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{Id}$. Noter que par hypothèse $c_n \neq 0$ et donc $g_n \neq \text{Id}$. Mais cela est une contradiction au fait que G est discret.

3. Soit $z \in \mathcal{H}$ et $g \in G \setminus \text{St}_G(\infty)$, alors par (2) $|c| \geq 1$. Par (2.2.1.1) on a

$$\Im(g(z)) = \frac{\Im(z)}{|cz + d|^2} = \frac{\Im(z)}{|c\Im(z)|^2 + |c\Re(z) + d|^2} \leq \frac{\Im(z)}{|c|^2 \cdot |\Im(z)|^2} \leq \frac{1}{\Im(z)} .$$

4.

5.2 Cycles d'arêtes

5.2.1 Définition: Cycle d'arête

Soit $P \subseteq \mathcal{H}$ un polygone hyperbolique avec des arêtes géodésiques. On suppose chaque arête s de P munit d'une *orientation* et note s^{-1} la même arête d'orientation opposite. Soit \mathfrak{E} la famille des arêtes orientés de P . On dit une **identification d'arêtes** de P une involution $\star : \mathfrak{E} \rightarrow \mathfrak{E}$ qui satisfait :

- $\star(s^{-1}) = (\star s)^{-1}$ pour tout $s \in \mathfrak{E}$.
 - La distance hyperbolique du début et la fin d'une arête $s \in \mathfrak{E}$ et même comme pour son **identifié** $\star s$.
- Pour $s \in \mathfrak{E}$ soit $\downarrow s \in \mathfrak{E}$ l'arête de P de même point initial comme s mais inégale à s . On note $\star s := \downarrow \star s$.

Pour tout arête $s \in \mathfrak{E}$ on note $g_s \in G$ l'élément unique (voir 2.4.2) satisfaisant $g_s(\star s) = s$. On dit g_s l'**application d'identification** de s . On dit un **cycle d'arêtes** $s_1..s_n$ pour \star une chaîne d'arêtes $s_1, \dots, s_n \in \mathfrak{E}$ satisfaisant

$$s_1 \xrightarrow{\star} s_2 \xrightarrow{\star} \dots \xrightarrow{\star} s_n \xrightarrow{\star} s_1 .$$

L'**application de cycle** associée au cycle $\sigma := s_1..s_n$ est définie comme $g_\sigma := g_{s_1} \circ \dots \circ g_{s_n}$. On dit que $\sigma = s_1..s_n$ vérifie la **condition de cycle** ssi son application g_σ est d'ordre n , c'est-à-dire elliptique d'angle $\frac{2\pi}{n}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

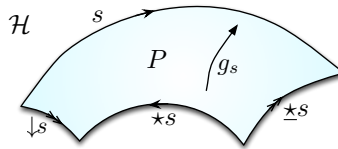


FIGURE 14: Sur la définition d'identifications des arêtes d'un polygone hyperbolique.

Remarques

- (i) Un cycle ne doit pas impérativement contenir tous les arêtes de P .
- (ii) Une identification d'arêtes n'est pas impérativement unique. Si \star est une identification d'arêtes, alors $\tilde{\star} : s \mapsto (\star s)^{-1}$ est également.

- (iii) Pour $s \in \mathfrak{S}$ on a $g_{*s} = g_s^{-1}$ et $g_{s^{-1}} = g_s$.
- (iv) L'angle de l'application de cycle g_σ est en fait la somme des angles intérieurs à P en tous les points initiaux de ses arêtes. Un cycle de sommet est un cycle de points initiaux.
- (v) La condition de cycle garantit le parage de \mathcal{H} par les images $g_\sigma^n P$ localement au voisinage des sommets de P .

Exemple : Considérons un groupe Fuchsien $G \leq \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ avec domaine fondamental la quadrilatère \mathfrak{D} , c'est-à-dire un polygone hyperbolique de quatre arêtes géodésiques. On suppose que les arêtes en face ont mêmes longueurs et munit \mathfrak{D} de l'identification d'arêtes \star qui envoie toute arête à son arête en face.

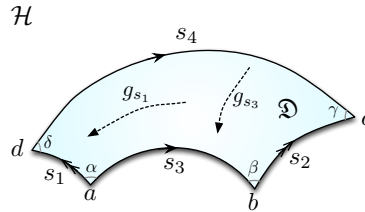


FIGURE 15: Sur l'identification d'arêtes.

Un cycle d'arêtes pour \star est donné par

$$s_1 \xrightarrow{\star} s_3^{-1} \xrightarrow{\star} s_2^{-1} \xrightarrow{\star} s_4 \ .$$

Son application de cycle est donnée par

$$g_{s_1} g_{s_3^{-1}} g_{s_2^{-1}} g_{s_4} = g_{s_1} g_{s_3} g_{s_1}^{-1} g_{s_3}^{-1} = [g_{s_1}, g_{s_3}] \ .$$

Elle est elliptique avec point fixe c et angle $(\alpha + \beta + \gamma + \delta)$.

5.2.2 Théorème fondamental de Poincaré sur polyèdres

Soit $P \subseteq \mathcal{H}$ un polygone hyperbolique compact, muni d'identifications d'arêtes. Si tout cycle d'arêtes pour ces identifications vérifie la condition de cycle, alors le groupe G engendré par les applications d'identification est discret, elle possède la présentation

$$\langle g_s : s \in \mathfrak{S} \mid g_\sigma^{n_\sigma} = 1, \sigma \text{ cycle d'arêtes de } P \rangle \ .$$

et possède le domaine fondamental P . Voir [9], chapitre 13 pour plus d'informations.

5.2.3 Théorème de Poincaré non-compact

On considère un polygone $P \subseteq \mathcal{H}$ généralisé, c'est-à-dire dont les arêtes \mathfrak{S} peuvent être

- compactes,
- infinie ou semi-infinies,
- libres, c'est-à-dire contenues dans $\partial\mathcal{H}$.

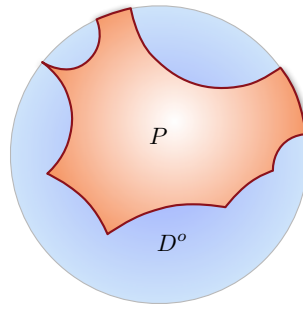


FIGURE 16: Sur théorème 5.2.3 : Exemple d'un polygone généralisé dans le modèle du disque.

On suppose que P est munit d'identifications d'arêtes **compatibles**, c'est-à-dire satisfaisant $*s = s$ pour toute $s \in \mathfrak{C}$ telle que $s \in \partial\mathcal{H}$. On considère l'opérateur d'arêtes \star et ses cycles comme défini dans 5.2.1. On distingue entre les trois types de cycles :

- Cycles **elliptiques**, c'est-à-dire cycles dont le sommet initial est dans \mathcal{H} ,
- Cycles **bord**, contenant un arête libre,
- Cycles **paraboliques**, ne contenant pas d'arête libre.

On suppose que l'application g_σ de tout cycle elliptique σ et lui-même elliptique d'angle ¹⁵ $\frac{2\pi}{n}$. On suppose que l'application de tout cycle parabolique et lui-même parabolique.

Alors : Le groupe G engendré par les applications d'identifications est Fuchsien, possède le domaine fondamental P et la représentation

$$G = \langle g_\sigma \mid \sigma \text{ cycle elliptique} \rangle$$

5.2.4 Définition: Empilement

Soit G un groupe qui agit via homéomorphismes sur l'espace topologique X . Un ouvert $\emptyset \neq \mathfrak{D} \subseteq X$ est dit **empilement** ¹⁶[9] de G ssi

$$g\mathfrak{D} \cap \mathfrak{D} = \emptyset \quad \forall g \in G \setminus \{1\} .$$

5.2.5 Exemple d'un empilement

Soit G un groupe qui agit via homéomorphismes sur l'espace topologique X . Soit $g \in G$ fixe et U, V deux ouverts disjoints de X tels que $g(\overline{U}) = X \setminus V$. Alors, si $\mathfrak{D} := X \setminus \{\overline{U} \cup \overline{V}\}$ est non-vidé, le groupe engendré $\langle g \rangle \leq G$ est infini et possède l'empilement \mathfrak{D} .

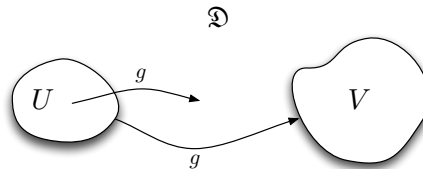


FIGURE 17: Exemple d'un empilement \mathfrak{D} comme complément de deux fermatures.

Preuve : Il suffit à montrer que $g^n\mathfrak{D} \cap \mathfrak{D} = \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. En fait, pour cela il suffit à montrer que $g^n\mathfrak{D} \cap \mathfrak{D} = \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si $x \in \mathfrak{D}$, alors $x \notin \overline{U}$ implique $gx \notin V^c$, c'est-à-dire $g\mathfrak{D} \subseteq V$. De plus, si $x \in V$,

15. Autrement dit : La somme des angles intérieurs des sommets traversés est égale à $\frac{2\pi}{n}$.

16. Anglais : Packing.

alors $x \notin \bar{U}$ implique $gx \notin V^c$, c'est-à-dire $gV \subseteq V$. Donc, $g^n \mathfrak{D} \subseteq V \subseteq \mathfrak{D}^c$ pour $n \in \mathbb{N}$. □

5.2.6 Lemme : Empilements et groupes discrets

Soit G un groupe qui agit continûment sur l'espace topologique X et possède un empilement \mathfrak{D} . Alors, G est discret.

Preuve : Choisir $x \in \mathfrak{D}$. Alors, car \mathfrak{D} est un empilement de G , $\{x\}$ est un point isolé de $\text{Orb}_G(x)$, donc ouvert. De plus, $\text{St}_G(x) = \{1\}$. D'autre part, l'application d'évaluation $\chi : G \rightarrow \text{Orb}_G(x)$, $\chi : g \mapsto gx$ est continue. Donc, $\{1\} = \text{St}_G(x) = \chi^{-1}(\{x\})$ est ouvert, c'est-à-dire $\{1\}$ est isolé dans G . Par remarque A.0.20(i) cela implique que G est discret. □

5.2.7 Théorème sur groupes engendrés et empilements

Soit G un groupe topologique qui agit continûment sur l'espace topologique X . Soient $G_1, \dots, G_m \leq G$ sous-groupes de G dont l'union engendre G . Pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ soit $\mathfrak{D}_i \subseteq X$ un empilement de G_i . Supposons que $\mathfrak{D} := \bigcap_{i=1}^m \mathfrak{D}_i \neq \emptyset$ et $\mathfrak{D}_i \cup \mathfrak{D}_j = X \quad \forall i \neq j$. Alors :

1. $G \cong G_1 \star \dots \star G_m$.
2. L'ouvert \mathfrak{D} est un empilement de G .
3. Le groupe G est discret.

Preuve :

1. Pour $k \in \{1, \dots, l\}$ et $i_k \in \{1, \dots, m\}$ tels que $i_k \neq i_{k+1} \quad \forall k$, soit $g_k \in G_{i_k} \setminus \{1\}$ n'importe quel. On va montrer par induction que

$$g_l \dots g_1(\mathfrak{D}) \subseteq X \setminus \mathfrak{D}_{i_l} .$$

Tout d'abord, on sait que

$$g_1(\mathfrak{D}) \subseteq g_1(\mathfrak{D}_{i_1}) \subseteq X \setminus \mathfrak{D}_{i_1}$$

Suppose $k \leq l$ et que

$$g_k \dots g_1(\mathfrak{D}) \subseteq X \setminus \mathfrak{D}_{i_k} .$$

Alors, on a

$$g_{k+1}g_k \dots g_1(\mathfrak{D}) \subseteq g_{k+1}(X \setminus \mathfrak{D}_{i_k}) \subseteq g_{k+1}(\mathfrak{D}_{i_{k+1}}) \subseteq X \setminus \mathfrak{D}_{i_{k+1}} ,$$

qui complète l'induction. Donc

$$g_l \dots g_1(\mathfrak{D}) \subseteq X \setminus \mathfrak{D}_{i_l} \subseteq X \setminus \mathfrak{D}$$

ce qui implique $g_l \dots g_1 \neq 1$. Par conséquence, G est le produit libre des G_1, \dots, G_m .

2. Soit $g \in G \setminus \{1\}$ quelconque, alors il existe g_1, \dots, g_l comme dans (1). On a vu que $\mathfrak{D} \cap g\mathfrak{D} = \emptyset$. Donc, \mathfrak{D} est un empilement de G .
3. Car G agit continûment et possède un empilement, par 5.2.6 on déduit que G est discret. □

5.2.8 Exemple : Le polyèdre de Schottky

Considérons les demi-cercles droites $L_1, \dots, L_n, L'_1, \dots, L'_n$ disjoints dans le modèle du disque de Poincaré. Soient $g_1, \dots, g_n \in \text{PU}(1, 1)$ tels que¹⁷ tout g_i envoie L_i sur L'_i et l'intérieur de L_i sur l'extérieur de L'_i . Notons U_i et U'_i l'intérieur de L_i et L'_i respectivement.

¹⁷. Note que les g_1, \dots, g_n ne sont pas uniques.

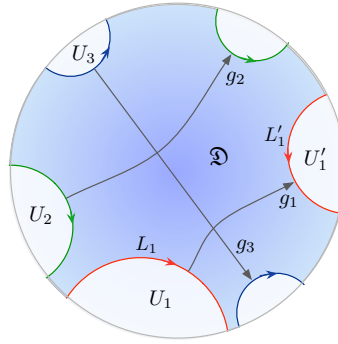


FIGURE 18: Sur le groupe engendré par les *applications d'identifications* g_1, \dots, g_n . L'intersection \mathfrak{D} des extérieurs des demi-cercles droites est un empilement pur le groupe engendré. On appelle le polyèdre $\overline{\mathfrak{D}}$ **polyèdre de Schottky**.

Alors, car $g_i(\overline{U}_i) = (U'_i)^c$, par exemple 5.2.5 l'ouvert $\mathfrak{D}_i := D^\circ \setminus (\overline{U}_i \cup \overline{U}'_i)$ est un empilement pour $\langle g_i \rangle$. De plus $\mathfrak{D}_i \cup \mathfrak{D}_j = D^\circ$ pour tout $i \neq j$. Par théorème 5.2.7, l'intersection $\mathfrak{D} := \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{D}_i$ est un empilement du groupe discret

$$\langle g_1, \dots, g_n \rangle \cong \langle g_1 \rangle \star \dots \star \langle g_n \rangle \quad .$$

Vois Ratcliffe[9] pour plus d'informations.

5.3 Domaines fondamentaux non-compactes

5.3.1 Définition: Cusp

Soit $G \leq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ un groupe fuchsien. Un point $\mu \in \partial\mathcal{H}$ est un **cusp** pour G s'il existe dans G un parabolique qui fixe μ .

5.3.2 Définition: Horocycle

Un **horocycle** est soit une droite horizontale dans \mathcal{H} , soit un cercle (euclidien) dans $\overline{\mathcal{H}}$ tangent à \mathbb{R} . Dans le premier cas on appelle ∞ , dans le deuxième cas le point d'intersection avec \mathbb{R} , le **centre** du horocycle. On dit **horodisque** (ouvert) la partie (ouverte) au dessus l'horocycle dans le premier cas, ou l'intérieur du horodisque dans le deuxième cas.

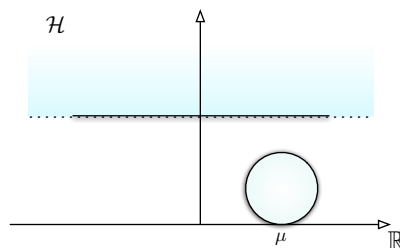


FIGURE 19: Sur la définition de horodisques. Montrés sont deux horodisques, de centre ∞ et $\mu \in \mathbb{R}$.

5.3.3 Lemme : Transformation des horodisques

Si $H \in \overline{\mathcal{H}}$ est un horodisque (ouvert) de centre $\mu \in \overline{\mathcal{H}}$ et $f \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ quelconque, alors $f(H)$ est un horodisque (ouvert) de centre $f(\mu)$.

Preuve : Il suffit à montrer que pour tout $f \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ tel que $f(\mu) = \infty$, H est un horodisque (ouvert) de centre μ ssi $f(H)$ est un horodisque (ouvert) de centre ∞ . Le cas $\mu = \infty$ est trivial car f serait de la forme $(z \mapsto az + b)$. Soit $\mu \in \mathbb{R}$ et $r > 0$. Considère l'horodisque ouvert

$$H := \left\{ z \in \mathcal{H} : |z - (\mu + ir)|^2 < r^2 \right\}$$

de centre μ et rayon r . Soit f de la forme $f = (z \mapsto \frac{az+b}{cz+d})$. Car $f(\mu) = \infty$, il faut $d = -c\mu$. Donc, pour $z \in \mathcal{H}$ on à l'équivalence

$$\begin{aligned} z \in H &\Leftrightarrow [\Re(z) - \mu]^2 + \Im^2(z) - 2r\Im(z) < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\Im(z)}{|z - \mu|^2} > \frac{1}{2r} \Leftrightarrow \frac{\Im(z)}{|cz + d|^2} > \frac{1}{2r|c|^2} \\ &\Leftrightarrow \Im f(z) > \frac{1}{2r|c|^2} \quad , \end{aligned}$$

c'est-à-dire $f(H)$ est un horodisque ouvert de centre ∞ ssi H est également. Évidemment $f(\partial H) = \partial H$ et $f(\mu) = \infty$, donc $f(H)$ est un horodisque ssi H est également. \square

Remarque : Si $g \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ préserve l'horodisque H , c'est-à-dire $g(H) = H$, alors tout conjugué $f g f^{-1}$ où $f \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$, préserve l'horodisque $f(H)$.

5.3.4 Lemme sur horodisques et paraboliques

Soit $\mu \in \partial\mathcal{H}$ quelconque. Alors :

- (i) Si $g \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ est un parabolique de point fixe $\mu \in \partial\mathcal{H}$, alors g préserve tout horodisque (ouvert) H centré en μ , c'est-à-dire $g(H) = H$.
- (ii) Soit $G := \text{St}_{\text{par}}(\mu)$ et $z \in \mathcal{H}$ quelconque. Alors, l'orbite $\text{Orb}_G(z)$ est un horocycle de centre μ .¹⁸

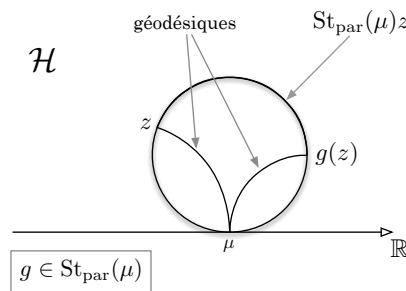


FIGURE 20: Sur lemme 5.3.4 : Les horodisques de centre $\mu \in \partial\mathcal{H}$ sont exactement les orbites de $\text{St}_{\text{par}}(\mu)$.

Preuve :

1. Par conjugaison de g et lemme 5.3.3 on peut supposer que $\mu = \infty$. Car g fixe ∞ et est parabolique, par 3.2.4 il possède la forme $g = (z \mapsto z + b)$ pour quelqu'un $b \in \mathbb{R}$. Évidemment g préserve tout horodisque (ouvert) de centre ∞ .

¹⁸. Voir 3.2.8 pour l'affirmation analogue sur stabilisateurs elliptiques.

2. Par conjugaison et lemme 5.3.3 on peut supposer que $\mu = \infty$. Par 3.2.4 on déduit que

$$\text{St}_{\text{par}}(\infty)z = \{(z \mapsto z + b) : b \in \mathbb{R}\} z = \mathbb{R} + i\Im(z)$$

est vraiment un horocycle de centre ∞ .

□

5.3.5 Corollaire sur orbites de paraboliques

Pour parabolique $g \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ de point fixe $\mu \in \mathbb{R}$, toute son orbite $\text{Orb}_{\langle g \rangle}(z)$, $z \in \mathcal{H}$ possède un unique point d'accumulation en μ .

Remarque : Ce fait est déjà connu d'après lemme 3.2.5, conséquence (ii). On montre ici une approche alternative.

Preuve : Par 5.3.4 on sait que l'orbite $\text{Orb}_{\langle g \rangle}(z)$ se trouve dans un horocycle H de centre μ . Par 3.2.12, l'ordre de g n'est pas finie, donc par 3.2.10 l'orbite $\text{Orb}_{\langle g \rangle}(z)$ est infinie. Donc, $\text{Orb}_{\langle g \rangle}(z)$ est une partie infinie dans une compacte $H \subseteq \mathbb{C}$ et possède donc un point d'accumulation dans H .

Par exemple 4.1.2(iv), $\langle g \rangle$ est discret. Donc par 4.1.11, $\langle g \rangle$ agit discontinûment sur \mathcal{H} . Donc, par 4.1.6 l'orbite $\text{Orb}_{\langle g \rangle}(z)$ ne possède pas de point d'accumulation dans \mathcal{H} , c'est-à-dire son point d'accumulation est μ .

□

5.3.6 Lemme de Shimizu sur l'existence de horodisques

Soit $G \leq \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ un sous-groupe fuchsien et $\mu \in \partial\mathcal{H}$ un cusp de G . Alors, il existe un horodisque ouvert \mathfrak{D} centré en μ tel que

$$\forall g \in G \setminus \text{St}(\mu) : g\mathfrak{D} \cap \mathfrak{D} = \emptyset .$$

Preuve : Soit $p \in G$ le parabolique qui fixe μ . Par conjugaison (vois preuve de 3.2.5(2)) et lemme 5.3.3 sur horodisques on peut supposer que $\mu = \infty$ et p est de la forme $p = (z \mapsto z + 1)$. Alors, par Shimizu 5.1.11 on sait que pour toute $g \in G \setminus \text{St}(\infty)$ on a l'implication

$$\Im(z) \geq 1 \Rightarrow \Im(g(z)) \leq 1 , \quad z \in \mathcal{H} .$$

En particulier, l'horodisque ouvert $\mathfrak{D} := \{z \in \mathcal{H} : \Im(z) > 1\}$ satisfait l'affirmation.

□

5.3.7 Lemme : Existence de horodisques érudants

Soit $G \leq \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ un groupe fuchsien et $\mu \in \partial\mathcal{H}$ un cusp pour G . Alors, pour tout compact $K \subseteq \mathcal{H}$ il existe un horodisque fermé H de centre μ tel que

$$gH \cap K = \emptyset \quad \forall g \in G .$$

Preuve : Soit $p \in G$ un parabolique de point fixe μ . Par conjugaison (vois preuve de 3.2.5(2)) on peut supposer que $\mu = \infty$ et $p = (z \mapsto z + 1)$. Soit $C > 0$ tel que pour tout $z \in K$ on a $C^{-1} < \Im(z) < C$. Par Shimizu 5.1.11 on sait que

$$\Im(g(z)) \leq C^{-1} \quad \forall g \in G \setminus \text{St}(\infty)$$

pour tout $z \in \mathcal{H}$ avec $\Im(z) \geq C$. Autrement dit, le horodisque fermé $H := \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) \geq C\}$ est tel que $gH \cap K = \emptyset$ pour tout $g \in G \setminus \text{St}(\infty)$ ou $g = \text{Id}$. De plus, par 5.3.4(ii) tout parabolique de point fixe ∞ préserve H . Car G est discret, par 4.2.12 G ne contient pas des éléments hyperboliques fixant ∞ . Donc en fait

$$gH \cap K = \emptyset \quad \forall g \in G .$$

□

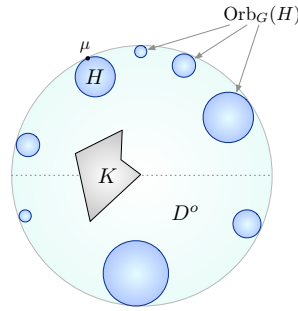


FIGURE 21: Sur l'existence d'un horodisque H dont l'orbite ne rencontre pas une compacte donnée $K \subseteq \mathcal{H}$. Ici, montré dans le disque de Poincaré.

5.3.8 Théorème : Condition nécessaire pour la compacité du quotient

Soit $G \leq \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ fuchsien tel que \mathcal{H}/G est compact. Alors, G ne contient aucun élément parabolique.

Preuve : Choisir un domaine fondamental $\mathfrak{D} \subseteq \mathcal{H}$ de G localement fini (voir 5.1.10). Car \mathcal{H}/G est compact, par 5.1.7 \mathfrak{D} est compact. Si $g \in G$ était parabolique de point fixe $\mu \in \partial\mathcal{H}$, alors par 5.3.7 il existerait un horodisque H tel que $gH \cap \overline{\mathfrak{D}} = \emptyset \quad \forall g \in G$. Cela est une contradiction au fait que \mathfrak{D} est un domaine fondamental. \square

Remarques & exemples

- (i) En particulier, on a vu dans la preuve que tout fuchsien $G \leq \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ avec un parabolique, ne possède pas de domaine fondamental relativement compact. Voir [9], théorème 6.6.6 pour plus d'informations.
- (ii) Considérons le groupe discret $G = \langle g \rangle$ engendré par le parabolique $g : z \mapsto z + 1$. Alors, le quotient \mathcal{H}/G est homéomorphe au cylindre $\mathbb{R}_{>0} \times S^1$ et évidemment non-compact, conformément à théorème 5.3.8.

6 Structures hyperboliques sur des surfaces

6.1 Définition et généralités

6.1.1 Définition: Chemin rectifiable

Soit (X, d) un espace métrique. Un chemin $\gamma : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow X$ est dit **rectifiable** s'il existe un $M > 0$ tel que pour tout *subdivision* $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ on a

$$\sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma(a_i), \gamma(a_{i+1})) < M .$$

Si γ est rectifiable, on définit sa **longueur**

$$l(\gamma) := \sup \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma(a_i), \gamma(a_{i+1})) : a = a_0 < \dots < a_n = b \right\} .$$

Remarques

- (i) Pour tout chemin $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ rectifiable on a $d(\gamma(a), \gamma(b)) \leq l(\gamma)$.

6.1.2 Définition: Espace métrique SLP

Un espace métrique (X, d) est dit **SLP** (Shortest Length Property) si :

1. Pour tout $x, y \in X$ il existe un chemin rectifiable reliant x et y .
2. Pour tout $x, y \in X$ on a $d(x, y) = \inf \{l(\gamma) : \gamma \text{ chemin rectifiable reliant } x, y\}$.

Exemples

- (i) \mathbb{R}^n est SLP.
- (ii) $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$ est SLP.
- (iii) $\mathbb{R}^2 \setminus D^o$ n'est pas SLP.

6.1.3 Définition: Surface hyperbolique

Une **surface hyperbolique** S est un espace métrique SLP (S, d) tel que pour tout $x \in S$ il existe un ouvert $V \subseteq S$ contenant x , isométrique à un disque ouvert D dans \mathcal{H} . On dit un tel voisinage une **hyperbolisation locale** dans x .

Remarques

- (i) Toute surface hyperbolique est localement connexe par arcs, localement compacte et ne possède pas de points isolés.
- (ii) Si S est une surface hyperbolique, alors pour tout point $x \in S$ il existe un rayon $r > 0$ tel que la boule $B_r(x)$ est isométrique à une boule dans \mathcal{H} de même rayon. En particulier, $B_r(x)$ est compact. Voir aussi 6.1.5 pour une affirmation plus générale.

Exemples

- (i) \mathcal{H} est une surface hyperbolique.
- (ii) Le disque de poincaré D^o est une surface hyperbolique.

6.1.4 Définition: Homéomorphisme local

Soient X, Y espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$. Alors, f est dit un **homéomorphisme local** si pour tout $x \in X$ il existe un ouvert $V \subseteq X$ contenant x tel que l'image $f(V)$ est ouverte et $f|_V : V \rightarrow f(V)$ est un homéomorphisme. Si X, Y sont métriques, on dit f un **isomorphisme isométrique** si f est bijective et préserve les distances. On dit f une **isométrie locale** si pour tout $x \in X$ il existe un ouvert $V \subseteq X$ contenant x tel que $f|_V : V \rightarrow f(V)$ est un isomorphisme isométrique et $f(V)$ ouvert dans Y .

Remarques :

- (i) Tout homéomorphisme local est continue et ouvert.

6.1.5 Lemme sur isométries de \mathcal{H} dans espaces SLP

Soit (X, d) un espace métrique SLP, $B_r^\circ(z) \subseteq \mathcal{H}$ un disque ouvert ($r > 0, z \in \mathcal{H}$) et $\sigma : B_r^\circ(z) \rightarrow X$ une isométrie, telle que $\sigma(B_r^\circ(z))$ est ouvert dans V . Alors, on a

$$\sigma(B_r^\circ(z)) = B_r^\circ(\sigma(z)) \quad .$$

Preuve : Noter que $\sigma : B_r^\circ(z) \rightarrow \sigma(B_r^\circ(z))$ est un homéomorphisme. Comme σ est une isométrie, il faut $\sigma(B_r^\circ(z)) \subseteq B_r^\circ(\sigma(z))$. Il reste donc à montrer que, pour tout $x \in X \setminus \sigma(B_r^\circ(z))$ on a $d(x, \sigma(z)) \geq r$.

Soit $\rho < r$ arbitraire. Alors, $U := \sigma(B_\rho^\circ(z))$ est ouvert dans $\sigma(B_r^\circ(z))$, et comme $\sigma(B_r^\circ(z))$ est ouvert, U est ouvert dans X . De plus, $\sigma(B_\rho^\circ(z))$ est compact, comme image continue d'une compacte. Par conséquence, $V := X \setminus \sigma(B_\rho^\circ(z))$ est ouvert dans X . Or,

$$X = \underbrace{\sigma(B_\rho^\circ(z))}_{=:U} \cup \sigma(\partial B_\rho(z)) \cup \underbrace{(X \setminus \sigma(B_\rho^\circ(z)))}_{=:V} \quad .$$

Soit $x \in X \setminus \sigma(B_r^\circ(z)) \subseteq V$ et choisit un chemin rectifiable $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ reliant $\sigma(z) \in U$ et $x \in V$. Alors, comme γ est continue, son image est connexe. D'autre part U, V sont ouverts disjoints, donc il existe un $t \in [a, b]$ tel que $\gamma(t) \in \sigma(\partial B_\rho(z))$. Par conséquence $d(\sigma(z), \gamma(t)) = \rho$ et donc $l(\gamma) \geq \rho$. Comme X est SLP on conclue $d(\sigma(z), x) \geq \rho$. Comme $\rho < r$ était arbitraire, en fait $d(\sigma(z), x) \geq r$.

□

6.1.6 Théorème : Isométries locales comme Lipschitziennes

Soient X, Y deux espaces métriques et $f : X \rightarrow Y$ telle que, pour tout $x \in X$ il existe un voisinage U de x sur lequel f préserve les distances. On suppose que X est SLP. Alors, f est 1-Lipschitzienne.

Preuve : Soient $x_1, x_2 \in X$ n'importe quels, fixés. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque, alors il existe un chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ rectifiable reliant x_1 à x_2 tel que $|d(x_1, x_2) - l(\gamma)| \leq \varepsilon$. Pour chaque $t \in [0, 1]$ il existe un voisinage $V_{\gamma(t)} \subseteq X$ de $\gamma(t)$ tel que f préserve la distance sur $V_{\gamma(t)}$. Par continuité de γ , il existe un voisinage ouvert $V_t \subseteq [0, 1]$ de t tel que $\gamma(V_t) \subseteq V_{\gamma(t)}$. Alors, les V_t recouvrent la compacte $[0, 1]$, et par Lebesgue A.0.11 il existe un $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in [0, 1]$ il existe un V_t contenant $B_\delta(t)$. Choisissons

$$0 = t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1} = 1$$

tels que $|t_{i+1} - t_i| \leq \delta$. Alors $t_{i+1} \in B_\delta(t_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et donc

$$d(f(\gamma(t_{i+1})), f(\gamma(t_i))) = d(\gamma(t_{i+1}), \gamma(t_i)) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad .$$

Par conséquence

$$d(f(x_1), f(x_2)) \leq \sum_{i=1}^n d(f(\gamma(t_{i+1})), f(\gamma(t_i))) = \sum_{i=1}^n d(\gamma(t_{i+1}), \gamma(t_i)) \leq l(\gamma) \leq d(x_1, x_2) + \varepsilon \quad .$$

Comme $\varepsilon > 0$ était arbitraire, cela complète la preuve.

□

6.1.7 Lemme : Transfère de surfaces hyperboliques

Soit X un espace topologique connexe, de Hausdorff, et (S, d_S) une surface hyperbolique. Soit $f : X \rightarrow S$ un homéomorphisme local. Alors, f induit sur X une distance d_X qui fait de X une surface hyperbolique telle que f est une isométrie locale. De plus, un chemin γ dans (X, d_X) est rectifiable ssi $f(\gamma)$ est rectifiable dans (S, d_S) .

Preuve : Pour $x, y \in X$ on pose

$$d_X(x, y) := \inf \{l(f \circ \gamma) : \gamma \text{ chemin reliant } x \text{ à } y \text{ tel que } f(\gamma) \text{ rectifiable}\} \quad .$$

Proposition : $d_X(x, y)$ est bien défini.

Preuve : Pour $x \in X$ fixé, soit

$$\Omega := \{y \in X : \text{relié à } x \text{ via un chemin } \gamma \text{ tel que } f(\gamma) \text{ est rectifiable}\} \quad .$$

Alors, Ω est ouvert car X est localement homéomorphe à S et S localement isométrique à \mathcal{H} . De même, Ω contient tous ses points d'accumulation, donc est fermé. Comme X est connexe et $\Omega \neq \emptyset$, il faut $\Omega = X$.

Évidemment $d_X : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ est symétrique et vérifie l'inégalité triangulaire.

Proposition : Si $d_X(x, y) = 0$, alors $x = y$.

Preuve : Soient $x \neq y \in X$. Comme X est localement homéomorphe à S , on peut trouver une ouverte U contenant x , telle que $f|_U : U \rightarrow f(U)$ est un homéomorphisme et $f(U)$ est ouverte dans S . Comme S est de Hausdorff, on peut supposer que U ne contient pas y . Comme S est une surface hyperbolique, on peut trouver une boule non-triviale, compacte $B_r(f(x)) \subseteq f(U)$.

Comme $f|_U$ est homéomorphe, l'image réciproque $V_1 := f|_U^{-1}(B_r(f(x)))$ est compacte, donc fermée dans X , qui est de Hausdorff. En particulier, $V_1^c := X \setminus V_1$ est ouvert. De même, $V_2 := f|_U^{-1}(B_r^o(f(x)))$ est ouverte dans l'ouverte U , donc ouverte dans X . On a de plus la décomposition

$$X = V_2 \cup f|_U^{-1}(\partial B_r(f(x))) \cup V_1^c$$

de X en parties disjointes. Si $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ est un chemin reliant x à y tel que $f(\gamma)$ est rectifiable, alors comme image continue d'une connexe, $\gamma([a, b])$ est connexe lui même. Donc, comme $x \in V_2$ et $y \in V_1^c$, il existe un $t \in [a, b]$ tel que $\gamma(t) \in f|_U^{-1}(\partial B_r(f(x)))$, c'est-à-dire $d_S(f(x), f(\gamma(t))) = r$. Donc $l(f(\gamma)) \geq r$. Par définition de d_S , cela implique $d_X(x, y) \geq r$.

Proposition : $f : (X, d_X) \rightarrow (S, d_S)$ est une isométrie locale.

Preuve : Remarquer qu'on a toujours $d_X(x, y) \geq d_S(f(x), f(y))$ pour $x, y \in X$. Soit $x \in X$ n'importe quel, fixé. Choisissons une ouverte U contenant x telle que $f|_U : U \rightarrow f(U)$ est homéomorphe et $f(U)$ ouverte. On peut supposer que $f(U)$ est une boule isométrique à une boule ouverte dans \mathcal{H} . Donc, si $y \in U$, alors $f(y) \in f(U)$. Donc, comme $f(U)$ est une hyperbolisation, $f(x)$ et $f(y)$ sont reliants dans $f(U)$ par un chemin $\bar{\gamma}$ rectifiable satisfaisant $d_S(f(x), f(y)) = l(\bar{\gamma})$. Donc, $\gamma := f|_U^{-1} \circ \bar{\gamma}$ est un chemin entre x et y tel que $f(\gamma)$ est rectifiable. Par conséquence

$$d_X(x, y) \stackrel{\text{def}}{\leq} l(f(\gamma)) = l(\bar{\gamma}) = d_S(f(x), f(y)) \quad ,$$

c'est-à-dire $f|_U : U \rightarrow f(U)$ est une isométrie.

La preuve de la dernière affirmation est omet. D'elle, et le fait que $\Omega = X$ (vois ci-dessus dans la preuve) on déduit que X est vraiment SLP. Comme X est localement isométrique à S et S une surface hyperbolique, on conclut que (X, d_X) est lui même une surface hyperbolique. □

Exemple : Si $f : X \rightarrow S$ est un revêtement de S connexe, de Hausdorff, alors X peut être munit d'une structure métrique SLP.

6.2 Géodésiques

6.2.1 Définition: Géodésique

Soit (X, d) un espace métrique, $J \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle (fini ou infini) et $\gamma : J \rightarrow X$. Alors, γ est dit une **géodésique** si tout point $t \in J$ admet un voisinage sur lequel γ préserve les distances. On dit γ une **géodésique minimisante** si γ préserve les distances sur tout J . On dit deux points $x, y \in X$ **géodésiquement connectés** s'il existe une géodésique $\gamma : J \rightarrow X$ reliant x à y .

Remarques

- (i) Soient X, Y espaces métriques. Si $\gamma : J \rightarrow X$ est une géodésique (minimisante) dans X et $g : X \rightarrow Y$ isométrique, alors $g(\gamma)$ est aussi une géodésique (minimisante) dans X .
- (ii) Soient X, Y espaces métriques. Si $\gamma : J \rightarrow X$ est une géodésique dans X et $g : X \rightarrow Y$ une isométrie locale, alors $g(\gamma)$ est une géodésique dans Y .
- (iii) Toute géodésique $\gamma : J \rightarrow (\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$ est une géodésique minimisante.
- (iv) Toute géodésique minimisante $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ est rectifiable et réalise la distance entre $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$, c'est-à-dire

$$d(\gamma(a), \gamma(b)) = l(\gamma) \quad .$$

Cela suit directement de la définition 6.1.1 de $l(\gamma)$.

- (v) Dans 6.2.2 on verra que toute géodésique est 1-Lipschitzienne et donc continue.

Exemple : Considérons le chemin $\gamma : [0, 4\pi] \rightarrow S^2$ traversant deux fois l'équateur de S^2 . On suppose sur S^2 la métrique induit par le plongement $S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$. Alors, γ est une géodésique qui n'est pas minimisante.

6.2.2 Lemme : Géodésiques comme Lipschitziennes

Soit (X, d) un espace métrique, $J \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle (fini ou infini) et $\gamma : J \rightarrow X$ une géodésique. Alors γ est 1-Lipschitzienne, c'est-à-dire

$$d(\gamma(s), \gamma(t)) \leq |s - t| \quad \forall s, t \in J \quad .$$

Preuve : Cas spécial de théorème 6.1.6. Noter que $(J, |\cdot|)$ est SLP. □

6.2.3 Corollaire : Condition suffisante pour géodésiques minimisantes

Soit (X, d) un espace métrique et $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ une géodésique telle que $d(\gamma(a), \gamma(b)) = b - a$. Alors, γ est une géodésique minimisante.

Preuve : Soient $t \leq s \in [a, b]$ quelconques. Par 6.2.2 on sait que $d(\gamma(t), \gamma(s)) \leq s - t$. D'autre part, on a

$$d(\gamma(t), \gamma(s)) \geq \underbrace{d(\gamma(a), \gamma(b))}_{b-a} - \underbrace{d(\gamma(a), \gamma(t))}_{\leq t-a} - \underbrace{d(\gamma(s), \gamma(b))}_{\leq b-s} \geq (b-a) - (t-a) - (b-s) = s - t \quad .$$

□

Exemples

- (i) Le chemin $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{H}$ donné par $t \mapsto ie^t$ est une géodésique minimisante sur l'espace $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$. Vraiment, on a

$$d_{\mathcal{H}}(\gamma(s), \gamma(t)) \stackrel{t \geq s}{=} \ln \frac{ie^t}{ie^s} = |t - s|$$

(ii) Si $p, q \in \partial\mathcal{H}$ sont les extrémités d'un demi-cercle droite dans \mathcal{H} et $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$g : (i\mathbb{R}_{>0}, 0, \infty) \mapsto (L, p, q) \quad ,$$

alors $t \mapsto g(ie^t)$ est une géodésique minimisante *reliant* p (quand $t = -\infty$) à q (quand $t = +\infty$).

6.2.4 Lemme sur segments de géodésiques

Soit (X, d) un espace métrique, $\gamma : [a, c] \rightarrow X$ un chemin et $b \in [a, c]$ tel que :

- Les segments $\gamma|_{[a,b]}$ et $\gamma|_{[b,c]}$ sont géodésiques minimisantes.
- $d(\gamma(a), \gamma(b)) + d(\gamma(b), \gamma(c)) = d(\gamma(a), \gamma(c))$.

Alors, γ est une géodésique minimisante.

Preuve : Soient $t \in [a, b]$ et $s \in [b, c]$ quelconques. Alors, d'une partie on a

$$\begin{aligned} d(\gamma(t), \gamma(s)) &\geq d(\gamma(a), \gamma(c)) - d(\gamma(a), \gamma(t)) - d(\gamma(s), \gamma(c)) \\ &= \underbrace{d(\gamma(a), \gamma(b))}_{b-a} + \underbrace{d(\gamma(b), \gamma(c))}_{c-b} - \underbrace{d(\gamma(a), \gamma(t))}_{t-a} - \underbrace{d(\gamma(s), \gamma(c))}_{c-s} = s - t \end{aligned}$$

D'autre part

$$d(\gamma(t), \gamma(s)) \leq \underbrace{d(\gamma(t), \gamma(b))}_{b-t} + \underbrace{d(\gamma(b), \gamma(s))}_{s-b} = s - t \quad ,$$

donc $d(\gamma(t), \gamma(s)) = s - t$.

□

6.2.5 Coïncidence de géodésiques

Soit (S, d) une surface hyperbolique et $\gamma_1, \gamma_2 : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow S$ deux géodésiques dans S , concordantes sur une ouverte $\emptyset \neq U \subseteq J$. Alors $\gamma_1 = \gamma_2$.

Preuve : Supposons sans perdu de généralité que $J = [a, b]$. Soit $t_0 \in U$ fixé et

$$\bar{t} := \sup \left\{ t : t_0 \leq t \leq b, \gamma_1|_{[t_0, t]} = \gamma_2|_{[t_0, t]} \right\} \quad .$$

Alors $\gamma_1|_{[t_0, \bar{t}]} = \gamma_2|_{[t_0, \bar{t}]}$ par définition du supremum. Par continuité des γ_1, γ_2 aussi $\gamma_1(\bar{t}) = \gamma_2(\bar{t})$. Noter que comme $U \neq \emptyset$ est ouvert, $\bar{t} > t_0$. Il reste à montrer que $\bar{t} = b$. Supposons le contraire, c'est-à-dire $\bar{t} < b$. Alors, comme S est une surface hyperbolique il existe un voisinage $V \subseteq S$ hyperbolisant de $\gamma_1(\bar{t}) = \gamma_2(\bar{t})$ et

$$0 < \varepsilon < \max \{ |\bar{t} - t_0|, |b - \bar{t}| \}$$

tel que

$$\gamma_1([\bar{t} - \varepsilon, \bar{t} + \varepsilon]) \subseteq V \quad , \quad \gamma_2([\bar{t} - \varepsilon, \bar{t} + \varepsilon]) \subseteq V \quad . \quad (6.2.5.1)$$

Les segments de (6.2.5.1) peuvent être donc regardés comme géodésiques dans \mathcal{H} , égales sur l'intervalle $[\bar{t} - \varepsilon, \bar{t}]$. Cela implique leur égalité aussi sur l'intervalle $[\bar{t}, \bar{t} + \varepsilon]$, une contradiction à la maximalité de \bar{t} .

□

6.2.6 Théorème de Hopf-Rinow : Prolongation de géodésiques

Soit (S, d) une surface hyperbolique complète. Alors, toute géodésique $\gamma : J \rightarrow S$ s'étend en $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow S$ comme géodésique.

Preuve : Par translation de l'ensemble de définition J on peut supposer que 0 est dans l'intérieur de J . On définit

$$I := \{x \in (0, \infty) : \gamma \text{ se prolonge à } [0, x]\} \quad .$$

Alors, I est un intervalle dans \mathbb{R}_+ .

Proposition : Si $a \in I$, alors en fait γ se prolonge à $[0, a]$.

Preuve : Choisisse une suite $a_n \in I$ telle que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a^-$. Alors, comme γ est une géodésique, $(\gamma(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy et donc converge vers une limite $\gamma(a)$. Cette valeur est indépendante du choix exact de la suite $(a_n)_n$. En fait, si aussi $0 \leq b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a^-$, alors $d(\gamma(a_n), \gamma(b_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ car γ est par 6.2.2 1-Lipschitzienne. Donc $\gamma(b_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \gamma(a)$.

Proposition : I est fermé.

Preuve : De façon similaire que ci-dessus, on montre que si $a_n \in I$ sont tels que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$, alors $a \in I$.

Proposition : I est ouvert dans \mathbb{R}_+ .

Preuve : Soit $a \in I$, c'est-à-dire γ se prolonge à $[0, a]$. On choisit une boule $B_{2\varepsilon}^o(\gamma(a))$ isométrique à une boule $B_{2\varepsilon}^o(z)$ dans \mathcal{H} . On prolonge l'image de γ dans $B_{2\varepsilon}^o(z)$ jusqu'à le temps $a + \varepsilon$ et obtient un prolongement de γ à $[0, a + \varepsilon]$, c'est-à-dire $B_\varepsilon(a) \subseteq I$. Par construction, $\gamma : [a - \varepsilon, a + \varepsilon] \rightarrow$ est préserve les distances.

Comme I n'est pas vide, on trouve que $I = \mathbb{R}_+$. De même façon, on peut prolonger γ sur $(-\infty, 0]$. □

Exemples

- (i) $\mathcal{H} \setminus \{z_0\}$ n'est pas complète pour n'importe quel $z_0 \in \mathcal{H}$.

6.2.7 Définition: Points bien alignés

Soit (X, d) un espace métrique. Alors, trois points $x, y, z \in X$ sont **bien alignés** si x et y sont géodésiquement connectés et si

$$d(x, y) + d(y, z) = d(x, z) \quad .$$

Exemples

- (i) Soit $\gamma : J \rightarrow X$ une géodésique minimisante. Alors, pour tout $a \leq b \leq c \in J$ les points $\gamma(a), \gamma(b)$ et $\gamma(c)$ sont bien alignés.

6.2.8 Théorème : Existence de géodésiques connectantes

Soit (S, d) une surface hyperbolique complète et $x, y \in S$ avec $r := d(x, y) > 0$. Alors, il existe une géodésique minimisante $\gamma : [0, r] \rightarrow S$ reliant x à y .

Remarque : En fait, γ peut être construit telle que l'image $\gamma([0, r])$ est donnée par

$$\gamma([0, r]) = \{z \in S : d(x, z) + d(z, y) = d(x, y)\} \quad .$$

6.3 Propriétés des isométries locales

6.3.1 Théorème d'uniformisation

Soit $D \subseteq \mathcal{H}$ un disque ouvert et (S, d) une surface hyperbolique complète. Alors, toute isométrie $\Phi : D \hookrightarrow S$ s'étend en une isométrie locale unique $\tilde{\Phi} : \mathcal{H} \rightarrow S$.

6.3.2 Lemme : Extension d'isométries dans \mathcal{H}

Soit $D \subseteq \mathcal{H}$ un sous-ensemble non-contenu dans une géodésique. Alors, toute isométrie $f : D \rightarrow \mathcal{H}$ s'étend à \mathcal{H} de manière unique à un isomorphisme isométrique.

6.3.3 Lemme sur isométries locales dans \mathcal{H}

Toute isométrie locale $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ est un isomorphisme isométrique.

Preuve : **Proposition :** $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ préserve partout les distances.

Soient $z \neq w \in \mathcal{H}$ quelconques et $[z, w]$ le segment du demi-cercle droite contenant z, w . Alors, la restriction $f|_{[z, w]}$ peut être regardé comme chemin géodésique du intervalle $[0, r]$ dans \mathcal{H} , où $r := d(z, w)$.

Par remarque 6.2.1(iii) tout chemin géodésique dans \mathcal{H} est minimisant, donc $d(f(z), f(w)) = d(z, w)$.

Proposition : $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ est un isomorphisme isométrique.

Comme on sait, toute application $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ préservant les distances partout, est un membre de $\text{Isom}(\mathcal{H})$. □

6.3.4 Théorème : Relèvement de géodésiques

Soient S_1, S_2 deux surfaces hyperboliques complètes et $f : S_1 \rightarrow S_2$ une isométrie locale. Soit $x \in S_1$ et $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow S_2$ une géodésique telle que $\gamma(0) = f(x)$. Alors, il existe une unique géodésique $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow S_1$ telle que $\tilde{\gamma}(0) = x$ et $f \circ \tilde{\gamma} = \gamma$.

6.3.5 Lemme sur isométries locales

Soient S_1, S_2 deux surfaces hyperboliques complètes et $f : S_1 \rightarrow S_2$ une isométrie locale. Alors :

1. f est surjective.
2. Pour tout $x \in S_1$ et $r > 0$ tel que le disque $B_r^o(f(x))$ est une hyperbolisation, f réalise un isomorphisme isométrique entre les boules

$$f : B_r^o(x) \rightarrow B_r^o(f(x)) .$$

6.3.6 Lemme : Disques hyperbolisants comme feuilletts

Soient S_1, S_2 deux surfaces hyperboliques complètes et $f : S_1 \rightarrow S_2$ une isométrie locale. Soit $z \in S_2$ et $r > 0$ tel que le disque $B_r^o(z)$ est une hyperbolisation. Alors :

1. Pour tout $x \neq y \in f^{-1}(z)$ on a $B_r^o(x) \cap B_r^o(y) = \emptyset$.
2. Pour $w \in f^{-1}(B_r^o(z))$ il existe un $x \in f^{-1}(z)$ tel que $w \in B_r^o(x)$.

6.3.7 Théorème : Isométries locales comme revêtements

Soient S_1, S_2 deux surfaces hyperboliques complètes. Alors, toute isométrie locale $f : S_1 \rightarrow S_2$ est un revêtement. Tous boules ouvertes hyperbolisantes de S_2 sont des trivialisations de f , qui préserve la distance sur tous leurs feuilletts. Tout automorphisme du revêtement f est une isométrie locale $S_1 \rightarrow S_1$.

Preuve : Par définition A.1.1, il faut montrer la continuité, surjectivité et la propriété de trivialisaton pour f . Continuité est donnée comme f est une isométrie locale. Surjectivité est donnée par lemme 6.3.5. Soit $z \in S_2$ n'importe quel et $r > 0$ tel que $B_r^o(z)$ est une hyperbolisation. Alors, par lemme 6.3.6 on a

$$f^{-1}(B_r^o(z)) = \bigcup_{x \in f^{-1}(z)} B_r^o(x) .$$

Par lemme 6.3.5 on sait que $f : B_r^o(x) \rightarrow B_r^o(z)$ est un isomorphisme isométrique pour tout $x \in f^{-1}(z)$, donc en particulier un homéomorphisme. Donc, $f : S_1 \rightarrow S_2$ est vraiment un revêtement avec les propriétés affirmées.

Il reste à voir que tout $g \in \text{Aut}(f)$ est une isométrie locale. Soit $x \in S_1$ n'importe quel. Soit $U \subseteq S_1$ un ouvert contenant $g(x)$ tel que f préserve sur U les distances. Choisir $V \subseteq S_1$ ouvert contenant x , tel que $g(V) \subseteq U$ et f préserve sur V les distances. Alors, pour $y, z \in V$ on a

$$d(y, z) = d(f(y), f(z)) = d(fg(y), fg(z)) = d(g(y), g(z)) ,$$

c'est-à-dire g préserve sur V les distances. Comme g est homéomorphe, $g(V)$ est ouvert. Donc, g est une isométrie locale. \square

6.3.8 Théorème : \mathcal{H} comme revêtement universel

Soit (S, d) une surface hyperbolique complète. Alors, toute isométrie locale $f : \mathcal{H} \rightarrow S$ s'agit comme revêtement universel. Le groupe des automorphismes $\text{Aut}(f)$ du revêtement est un sous-groupe de $\text{Isom}(\mathcal{H})$, agissant proprement discontinûment sur \mathcal{H} . De plus, une telle $f : \mathcal{H} \rightarrow S$ existe toujours.

Preuve : Comme S est une surface hyperbolique, il existe une isométrie $f : D \hookrightarrow S$ d'un disque ouvert de \mathcal{H} dans S . Par théorème 6.3.1, elle s'étend en une isométrie locale $f : \mathcal{H} \rightarrow S$. Par théorème 6.3.7 toute isométrie locale $\mathcal{H} \rightarrow S$ est un revêtement de l'espace base S par l'espace total \mathcal{H} . Comme \mathcal{H} est connexe par arcs, localement connexe par arcs et simplement connexe, $f : \mathcal{H} \rightarrow S$ est universel. Par 6.3.7, tout automorphisme $g \in \text{Aut}(f)$ de f est une isométrie locale $g : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$. Par lemme 6.3.3, elle doit être un isomorphisme isométrique. Il reste à montrer que $\text{Aut}(f)$ agit proprement discontinûment sur \mathcal{H} . Soit $x \in \mathcal{H}$ et $D \subseteq \mathcal{H}$ un disque ouvert contenant x , tel que $f : D \rightarrow S$ est injectif. Supposons qu'il existe $y \in D$ et $g \in \text{Aut}(f)$ tel que $g(y) \in D$. Alors, comme $f(g(y)) = f(y)$ et $f|_D$ est injectif, il faut que $g(y) = y$. Comme D est ouvert, il existe une boule ouverte B centré à y et contenue dans D . Comme g est une isométrie avec point fixe y , on déduit que $g(B) = B$. Par la même argumentation il faut que $g|_B : B \rightarrow B$ est l'identité sur B . Par unicité 6.3.2 $g = \text{Id}_{\mathcal{H}}$. \square

6.3.9 Théorème : Transfère de la métrique par isométries locales

Soient S_1, S_2 surfaces hyperboliques complètes et $f : S_1 \rightarrow S_2$ une isométrie locale. Alors, pour $x, y \in S_2$ on a la représentation

$$d(x, y) = d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) := \inf \{ d(\tilde{x}, \tilde{y}) : \tilde{x} \in f^{-1}(x), \tilde{y} \in f^{-1}(y) \} . \quad (6.3.9.1)$$

En particulier si f est injectif, alors par 6.3.5 f est un isomorphisme isométrique.

Preuve : Soient $x, y \in S_1$ fixés et $\tilde{x} \in f^{-1}(x)$, $\tilde{y} \in f^{-1}(y)$ n'importe quels. Par 6.3.4 il existe une géodésique $\tilde{\gamma} : [0, d(\tilde{x}, \tilde{y})] \rightarrow S_1$ reliant \tilde{x} à \tilde{y} . Donc, $f \circ \tilde{\gamma} : [0, d(\tilde{x}, \tilde{y})] \rightarrow S_2$ est une géodésique reliant x à y . Comme $f(\tilde{\gamma})$ est 1-Lipschitzienne, on sait que $d(x, y) \leq d(\tilde{x}, \tilde{y})$.

D'autre part, par 6.2.8 il existe une géodésique $\gamma : [0, d(x, y)] \rightarrow S_2$ reliant x à y . Par 6.3.4, il se relève à une géodésique $\tilde{\gamma} : [0, d(x, y)] \rightarrow S_1$ telle que $f \circ \tilde{\gamma} = \gamma$. Comme $\tilde{\gamma}$ est 1-Lipschitzienne, $d(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq d(x, y)$, où $\tilde{x} := \tilde{\gamma}(0) \in f^{-1}(x)$ et $\tilde{y} := \tilde{\gamma}(d(x, y)) \in f^{-1}(y)$.

De cela suit l'affirmation (6.3.9.1). \square

6.3.10 Théorème sur isométries locales dans \mathcal{H}

Soit (S, d) une surface hyperbolique complète et $f : S \rightarrow \mathcal{H}$ une isométrie locale. Alors, f est une bijection et par 6.3.9 un isomorphisme isométrique.

Preuve : En cas $S = \mathcal{H}$ on a fini, car par 6.3.3 $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ est un isomorphisme isométrique. Dans le cas général, choisissons un disque ouvert $D \subseteq S$ isométrique isomorphe à un disque ouvert $\tilde{D} \subseteq \mathcal{H}$ via $\sigma : \tilde{D} \rightarrow D$. Alors, l'isométrie $\sigma : \tilde{D} \rightarrow S$ s'étend par théorème 6.3.1 à une isométrie locale $\sigma : \mathcal{H} \rightarrow S$. Donc, $f \circ \sigma : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ est une isométrie locale et par l'argumentation ci-dessus en fait un isomorphisme isométrique. En particulier, $f \circ \sigma : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ est une bijection, donc $\sigma : \mathcal{H} \rightarrow S$ une injection. Par 6.3.5 $\sigma : \mathcal{H} \rightarrow S$ est surjective, donc une bijection. Par conséquence, $f : S \rightarrow \mathcal{H}$ est aussi une bijection. □

6.4 Géométrisation des surfaces hyperboliques

On considère l'action de groupes, agissant discontinûment via isométries sur surfaces hyperboliques. Se rappeler que par 4.1.6 toute orbite d'une telle action ne possède pas de points d'accumulation dans la surface et est donc fermée.

6.4.1 Théorème : Métrisabilité de l'espace quotient

Soit (X, d_X) un espace métrique localement compact. Soit G un groupe agissant sur X discontinûment via isométries. Pour tout point $x \in X$ soit $[x] := \text{Orb}_G(x)$ son orbite. Alors, l'application $d : (X/G) \times (X/G) \rightarrow \mathbb{R}_+$ donnée par

$$d([x], [y]) := \inf \{d_X(\tilde{x}, \tilde{y}) : \tilde{x} \in [x], \tilde{y} \in [y]\} \tag{6.4.1.1}$$

définit sur l'espace quotient X/G une métrique. La topologie induit par cette métrique est la même comme la topologie quotient. Si (X, d_X) est SLP, alors $(X/G, d)$ est également.

Preuve : Noter que d prend la forme

$$d([x], [y]) = \inf \{d_X(g_1x, g_2y) : g_1, g_2 \in G\} = \inf \{d_X(x, gy) : g \in G\} = \inf \{d_X(x, \tilde{y}) : \tilde{y} \in [y]\} \tag{6.4.1.2}$$

car G agit via isométries. La symétrie et l'inégalité triangulaire de d sont évidentes. Comme par 4.1.6 toute orbite de G sur X est fermée, par la représentation (6.4.1.2) on sait que d est positive définit, donc est une métrique.

Proposition : La topologie induite par d est la même comme la topologie quotient.

Preuve : Soit $\Pi : X \rightarrow X/G$ la projection au quotient. Soit $B_r^o([x]) \subseteq X/G$ une boule ouverte de rayon $r > 0$ dans X/G . Soit $[y] \in B_r^o([x])$ n'importe quel. Alors, par (6.4.1.2) on peut supposer que $d(y, x) < r$. Il existe donc un ouvert $U \subseteq X$ tel que $y \in U \subseteq B_r^o(x)$. Comme Π est 1-Lipschitz, on trouve

$$[y] \in \Pi(U) \subseteq \Pi[B_r^o(x)] \subseteq B_r^o([x]) \ .$$

Comme Π est une application ouverte par rapport à la topologie quotient, $\Pi(U)$ est ouvert par rapport à cette topologie. Donc, $B_r^o([x])$ est également.

Soit inversement $\Pi(U) \subseteq X/G$ ouvert par rapport à la topologie quotient¹⁹ et $[y] \in \Pi(U)$. Alors, comme $\Pi^{-1}(\Pi(U))$ est ouvert et contient y , il existe une boule ouverte $B_r^o(y)$ telle que $B_r^o(y) \subseteq \Pi^{-1}(\Pi(U))$. Donc, pour tout $g \in G$ on a

$$g[B_r^o(y)] \subseteq g[\Pi^{-1}(\Pi(U))] = g\left[\bigcup_{h \in G} h(U)\right] = \bigcup_{h \in G} gh(U) = \bigcup_{h \in G} h(U) = \Pi^{-1}(\Pi(U)) \ .$$

19. Noter que comme Π est surjective, toute partie dans X/G est un image par rapport à Π .

Donc

$$\Pi^{-1}[\Pi[B_r^o(y)]] = \bigcup_{g \in G} g[B_r^o(y)] \subseteq \Pi^{-1}[\Pi(U)]$$

et par conséquence $\Pi[B_r^o(y)] \subseteq \Pi(U)$. Par remarque (ii) ci-dessous, $B_r^o([y]) = \Pi[B_r^o(y)]$, ce qui montre que $\Pi(U)$ est ouvert par rapport à la métrique.

Il reste à montrer que $(X/G, d)$ est SLP, à condition que (X, d_X) est SLP. Soient $[x], [y] \in X/G$ et $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ un chemin rectifiable reliant x à y . Alors, comme $d([a], [b]) \leq d_X(a, b)$ pour tout $a, b \in X$, on sait que $\Pi(\gamma) : [0, 1] \rightarrow X/G$ est rectifiable, reliant $[x]$ à $[y]$. Soit $\varepsilon > 0$ n'importe quel, alors on peut supposer que $d_X(x, y) \leq d([x], [y]) + \varepsilon$. Comme X est SLP, on peut choisir γ tel que $l(\gamma) \leq d_X(x, y) + \varepsilon$ et donc

$$l(\Pi(\gamma)) - 2\varepsilon \leq l(\gamma) - 2\varepsilon \leq d_X(x, y) - \varepsilon \leq d([x], [y]) .$$

Par conséquence, $d([x], [y])$ est l'infimum des longueurs des chemins rectifiables reliant $[x]$ à $[y]$, c'est-à-dire $(X/G, d)$ est SLP. \square

Remarques : Soit $\Pi : X \rightarrow X/G$ la projection de X au quotient X/G .

- (i) La projection $\Pi : X \rightarrow X/G$ est 1-Lipschitzienne.
- (ii) Pour toute boule ouverte $B_r^o(x) \subseteq X$ on a

$$\Pi(B_r^o(x)) = B_r^o(\Pi(x)) .$$

Preuve : Comme Π est 1-Lipschitzienne, l'inclusion " \subseteq " est claire. Soit inversement $y \in B_r^o(\Pi(x))$, c'est-à-dire $d([x], [y]) < r$. Alors il existe par construction de la métrique sur X/G , un $\tilde{y} \in [y]$ tel que $d_X(x, \tilde{y}) < r$, c'est-à-dire $y \in \Pi(B_r^o(x))$.

- (iii) La projection au quotient $X \rightarrow X/G$ et une isométrie locale de stabilisateurs près, au sens suivant : Pour tout $x \in X$, il existe une boule ouverte $B_r^o(x)$ non-triviale telle que l'inclusion

$$B_r^o(x)/\text{St}_G(x) \hookrightarrow B_r^o([x]) \tag{6.4.1.3}$$

est un isomorphisme-isométrique. Noter que le groupe $\text{St}_G(x)$ agit sur $B_r^o(x)$ discontinûment via isométries et induit par 6.4.1 aussi une métrique sur $B_r^o(x)/\text{St}_G(x)$.

Preuve : Par remarque (ii) il suffit de montrer que la projection (6.4.1.3) préserve les distances. Évidemment (6.4.1.3) est 1-Lipschitzienne. Soit $[x] \in X/G$ quelconque, fixé. Par 4.1.6 on sait qu'il existe une boule non-triviale $B_{3r}^o(x)$ telle que $B_{3r}^o(x) \cap gB_{3r}^o(x) = \emptyset$ pour tout $g \notin \text{St}_G(x)$. Soient $y_1, y_2 \in B_r^o(x)$, alors $d([y_1], [y_2]) \leq d_X(y_1, y_2)$. Soit $g \notin \text{St}_G(x)$ et supposer que

$$d_X(y_1, gy_2) < d_X(y_1, y_2) < 2r ,$$

alors $d_X(x, gy_2) < 3r$. Donc $y_2 \in B_{3r}^o(x)$ et $gy_2 \in B_{3r}^o(x)$, une contradiction. Donc

$$d_X(y_1, gy_2) \geq d_X(y_1, y_2) \quad \forall g \notin \text{St}_G(x) .$$

Si $g \in \text{St}_G(x)$, alors évidemment $d_X(y_1, gy_2) \geq d_X(y_1, y_2)$. Donc

$$\inf_{g \in G} d_X(y_1, gy_2) \geq \inf_{g \in \text{St}_G(x)} d_X(y_1, gy_2) ,$$

c'est-à-dire (6.4.1.3) est une isométrie.

- (iv) Supposons que G agit proprement discontinûment. Alors, tout stabilisateur est trivial et par (iii) la projection $\Pi : X \rightarrow X/G$ est une isométrie locale.
- (v) Supposer que G est sans torsion. Alors, $\Pi : X \rightarrow X/G$ est une isométrie locale.

Preuve : Par lemme 4.1.9, tout stabilisateur $\text{St}_G(x)$, où $x \in \mathcal{H}$, est trivial. Par (iii) suit donc l'affirmation.

6.4.2 Théorème : Complétude de l'espace quotient

Soit (X, d) un espace métrique localement compact. Soit G un groupe agissant sur X discontinûment via isométries. Soit X/G l'espace quotient munit de la métrique introduit dans 6.4.1. Alors, X est complet ssi l'espace quotient X/G est complet.

Preuve : Soit $\Pi : X \rightarrow X/G$ la projection de X au quotient X/G .

Direction “ \Leftarrow ” : Soit X/G est complet et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X$ une suite de Cauchy. Comme $\Pi : X \rightarrow X/G$ est 1-Lipschitzienne, $([x_n])_n \subseteq X/G$ est Cauchy et possède donc une limite $[x]$. Par construction de la métrique sur X/G , il existe donc une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq G$ telle que $d_X(x_n, g_n x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. On va montrer qu’il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq n_0$ on a $g_n x = g_{n_0} x$. Cela impliquerait que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g_{n_0} x$.

Supposons le contraire, c’est-à-dire pour n’importe quel $n_0 \in \mathbb{N}$ il existe $n \geq n_0$ tel que $g_n x \neq g_{n_0} x$. Comme (x_n) est de Cauchy, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une boule ouverte $B_\varepsilon^o \subseteq X$ de rayon $\varepsilon > 0$ telle que presque tous x_n sont dans B_ε^o . Donc, il existe une boule ouverte $B_{2\varepsilon}^o \subseteq X$ telle que presque tous $g_n x$ sont dans $B_{2\varepsilon}^o$, c’est-à-dire $d_X(g_n x, g_m x) < 4\varepsilon$ pour n, m assez grands. Autrement dit, pour chaque $\varepsilon > 0$ on a $d_X(x, g_n^{-1} g_m x) < \varepsilon$ pour n, m assez grands.

Par hypothèse, il existe donc pour tout $\varepsilon > 0$ un élément $\tilde{x} \in \text{Orb}_G(x) \setminus \{x\}$ tel que $d(x, \tilde{x}) < \varepsilon$. Mais par 4.1.6 l’orbite $\text{Orb}_G(x)$ de x est discret, ce qui donne une contradiction.

Direction “ \Rightarrow ” : Soit X complet et $([x_n])_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X/G$ une suite de Cauchy. Pour montrer qu’elle converge, il suffit de trouver une sous-suite $([x_{n_k}])_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge. Pour cela, il suffit de trouver une suite de représentants $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge dans X . Par complétude de X , il suffit de montrer que $d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) \leq 2^{-k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Comme $([x_n])_n$ est de Cauchy, on peut trouver une sous-suite $([x_{n_k}])_k$ telle que $d([x_{n_k}], [x_{n_{k+1}}]) < 2^{-k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par construction de la métrique sur X/G (voir (6.4.1.2)), on peut trouver via induction des représentants $x_{n_k} \in [x_{n_k}]$ tels que $d_X(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < 2^{-k}$. □

6.4.3 Théorème de géométrisation des surfaces

Soit (S, d) une surface hyperbolique complète. Alors, il existe un groupe $G \leq \text{Isom}(\mathcal{H})$ sans torsion, agissant proprement discontinûment sur \mathcal{H} , tel que S est isométriquement-isomorphe à \mathcal{H}/G . Ici, \mathcal{H}/G est munit de la métrique introduit dans 6.4.1.

De plus, pour tout $G_1, G_2 \leq \text{Isom}(\mathcal{H})$ sans torsion, agissant discontinûment sur \mathcal{H} , les espaces \mathcal{H}/G_1 et \mathcal{H}/G_2 sont isométriquement-isomorphes ssi G_1, G_2 sont conjuguées dans $\text{Isom}(\mathcal{H})$.

Interprétation : Comme (S, d) est une surface hyperbolique complète, il existe par théorème 6.3.8 une isométrie locale $f : \mathcal{H} \rightarrow S$, agissant comme revêtement universel. Le groupe des automorphismes $G := \text{Aut}(f) \leq \text{Isom}(\mathcal{H})$ satisfait exactement les affirmations. Pour tout $g \in \text{Isom}(\mathcal{H})$, $fg : \mathcal{H} \rightarrow S$ est aussi une isométrie locale, agissant comme revêtement universel. Elle possède le groupe des automorphismes $g^{-1} \text{Aut}(f)g$.

Noter que comme le revêtement $f : \mathcal{H} \rightarrow S$ est universel, son groupe d’automorphismes $\text{Aut}(f) \leq \text{Isom}(\mathcal{H})$ est isomorphe au groupe fondamental $\Pi_1(S)$ de la surface. On a donc trouvé pour toute structure hyperbolique²⁰ une représentation fidèle, discrète $\Pi_1(S) \rightarrow \text{Isom}(\mathcal{H})$ du groupe fondamental de l’espace topologique sous-sajent. Cette association est bien définie de conjugaison près.

Par théorème 6.4.1 et remarque 6.4.1(v), pour tout groupe $G \leq \text{Isom}(\mathcal{H})$ sans torsion, agissant discontinûment sur \mathcal{H} , le quotient \mathcal{H}/G est une surface hyperbolique, qui par 6.4.2 est complète. La projection $\Pi : \mathcal{H} \rightarrow G$ est par remarque 6.4.1(v) une isométrie locale, qui est en fait exactement le revêtement universel de \mathcal{H}/G . On sait que comme \mathcal{H} est connexe, le groupe des automorphismes de ce revêtement est exactement G . Donc, les surfaces hyperboliques complètes correspondent bijectivement aux classes de conjugaisons de sous-groupes de $\text{Isom}(\mathcal{H})$ sans torsion, agissant sur \mathcal{H} discontinûment.

Voir ??, chapitre 8, pour plus d’informations.

Exemple : La surface S^2 n’admet pas de structure hyperbolique, car son groupe fondamental $\Pi_1(S^2) = \{0\}$ est trivial mais S^2 n’est pas homéomorphe à $\mathcal{H}/\{\text{Id}\} \simeq \mathcal{H}$.

20. Noter que $\Pi_1(S)$ est à priori une affaire topologique.

6.4.4 Proposition sur la caractéristique d'Euler

Soit S une variété lisse fermée de dimension 2. Alors, S admet une structure hyperbolique ssi $\chi(S) < 0$, où $\chi(S)$ est la caractéristique d'Euler (voir [A.1.4](#)).

Preuve : Voir [\[9\]](#), pp. 391.

A Annexe

A.0.5 Lemme sur la continuité de fonctions

Soient X, Y espaces topologiques, $(U_i)_{i \in I}$ un recouvert ouvert de X et $f : X \rightarrow Y$ telle que la restriction $f|_{U_i} : U_i \rightarrow Y$ est continue pour tout $i \in I$. Alors, $f : X \rightarrow Y$ est continue.

Preuve : Soit $V \subseteq Y$ ouvert, alors

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i) \cap f^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} \underbrace{f|_{U_i}^{-1}(V)}_{\substack{\text{ouvert dans } U_i \\ \Rightarrow \text{ouvert dans } X}}$$

est ouvert. □

A.0.6 Lemme : Croisement de chemins

Soit X un espace topologique, $x, y \in X$ et $U \subseteq X$ une ouverte telle que $x \in U$ et $y \notin U$. Si $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ est un chemin reliant x à y , alors $\gamma([a, b]) \cap \partial U \neq \emptyset$.

Preuve : Supposons le contraire, c'est-à-dire $\gamma([a, b]) \cap \partial U = \emptyset$. Alors,

$$[a, b] = \underbrace{\gamma^{-1}(U)}_{\text{ouvert}} \cup \underbrace{\gamma^{-1}(X \setminus \bar{U})}_{\text{ouvert}},$$

c'est-à-dire l'espace $[a, b]$ est union disjointe d'ouverts. Cela est une contradiction. □

A.0.7 Definition: Application propre

Une application $f : X \rightarrow Y$ entre deux espaces topologiques X, Y est dit **propre** ssi son image réciproque $f^{-1}(K)$ de toute compacte $K \subseteq Y$ est compacte dans X .

Remarques

- (i) Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue, fermée et telle que l'image réciproque $f^{-1}(y)$ de tout point $y \in Y$ est compact. Alors, f est propre.
- (ii) Toute application continue, propre entre deux espaces localement compacts de Hausdorff est fermée.
- (iii) Si X est compact, Y de Hausdorff et $f : X \rightarrow Y$ continue, alors f est fermée et propre.

A.0.8 Definition: Topologie quotient

Soit \sim une relation d'équivalence sur l'espace topologique Ω et Ω/\sim l'ensemble des classes d'équivalence par rapport à \sim . Alors, l'application $p : \Omega \rightarrow \Omega/\sim$ définie par $p : \omega \mapsto [\omega]$ est surjective. On l'appelle **application quotient** de X/\sim . On dit un sous-ensemble $U \subseteq \Omega/\sim$ **ouvert**, ssi $p^{-1}(U)$ est ouvert dans Ω .

Remarques

- (i) L'application quotient $p : X \rightarrow X/\sim$ est ouverte.
- (ii) Si X est compact, alors l'application $f : X \rightarrow X/\sim$ est propre ssi X/\sim est Hausdorff.

A.0.9 Lemme : Transporte de métriques

Soit (Y, d_Y) un espace métrique, $X \neq \emptyset$ une partie quelconque et $f : X \rightarrow Y$ injective. Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ strictement croissante, sous-additive et telle que $\varphi^{-1}(\{0\}) = \{0\}$. Alors :

1. L'application

$$d_X : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad , \quad d_X(x_1, x_2) := \varphi(d_Y(f(x_1), f(x_2)))$$

est une métrique sur X .

2. Par rapport de cette métrique, l'application $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ est continuée.
3. Soit de plus $X = Y$, φ continue dans 0 et $f : (X, d_Y) \rightarrow (X, d_Y)$ un homéomorphisme dans son image $f(X)$. Alors, les métriques d_X, d_Y induisent la même topologie.

Preuve :

1. La positivité définie et la symétrie de d_X sont claires. Soient $x_1, x_2, x_3 \in X$, alors

$$\begin{aligned} d_X(x_1, x_3) &= \varphi\left(\underbrace{d_X(f(x_1), f(x_3))}_{\leq d_X(f(x_1), f(x_2)) + d_X(f(x_2), f(x_3))}\right) \leq \varphi[d_X(f(x_1), f(x_2)) + d_X(f(x_2), f(x_3))] \\ &\leq \varphi[d_X(f(x_1), f(x_2))] + \varphi[d_X(f(x_2), f(x_3))] = d_X(x_1, x_2) + d_X(x_2, x_3) \quad , \end{aligned}$$

c'est-à-dire d_X est vraiment une métrique.

2. Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ tels que $x_n \xrightarrow[d_X]{n \rightarrow \infty} x \in X$. À cause des propriétés de φ , il faut $d_Y(f(x_n), f(x)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, ça veut dire $f(x_n) \xrightarrow[d_Y]{n \rightarrow \infty} f(x)$.

3. Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$, $x \in X$ n'importe quels. Suppose que $x_n \xrightarrow[d_Y]{n \rightarrow \infty} x$, alors $f(x_n) \xrightarrow[d_Y]{n \rightarrow \infty} f(x)$. Car φ est continue dans 0 on a $\varphi(d_Y(f(x_n), f(x))) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et donc $x_n \xrightarrow[d_X]{n \rightarrow \infty} x$.

Suppose inversement que $x_n \xrightarrow[d_X]{n \rightarrow \infty} x$, alors par les propriétés de φ il faut $f(x_n) \xrightarrow[d_Y]{n \rightarrow \infty} f(x)$. Car $f : (X, d_Y) \rightarrow (X, d_Y)$ est une application ouverte, on trouve $x_n \xrightarrow[d_Y]{n \rightarrow \infty} x$.

□

A.0.10 Lemme : Métriques relevées

Soit (X, d_X) un espace métrique, $Y \neq \emptyset$ un ensemble n'importe quel et $f : X \rightarrow Y$ surjective, telle que toute image réciproque d'un point $f^{-1}(\{y\})$ est finie. Alors :

1. L'application

$$d_X : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad , \quad d_X(A, B) := \inf_{\substack{a \in A \\ b \in B}} d_X(a, b) \tag{A.0.10.1}$$

définie sur la puissance $\mathcal{P}(X)$ de X satisfait l'inégalité triangulaire.

2. L'application

$$d_Y(y_1, y_2) := d_X[f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)] := \inf_{\substack{x_1, x_2 \in X \\ f(x_k) = y_k}} d_X(x_1, x_2) \tag{A.0.10.2}$$

définie une métrique sur Y .

3. Soit de plus X union d'un nombre finie des ensembles $X = \bigsqcup_{i=1}^n X_i$ tels que toute restriction $f|_{X_i} : X_i \rightarrow Y$ est bijective et $f|_{X_i}^{-1} \circ f|_{X_j} : X_j \rightarrow X_i$ homéomorphe. Si Y est munit de la plus grande topologie \mathcal{O} par rapport laquelle $f : X \rightarrow Y$ est continue²¹, alors cette topologie est la même comme induit par d_Y .

21. Une sous-partie $U \subseteq Y$ est dit ouverte, ssi $f^{-1}(U)$ est ouvert.

Preuve :

1. L'inégalité triangulaire suit directement de l'inégalité triangulaire de $d_X : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$.
2. Évidemment d_Y est symétrique, non-négative et satisfait l'inégalité triangulaire. Soient $y_1, y_2, y_3 \in Y$. Si $d_Y(y_1, y_2) = 0$, alors $f^{-1}(y_1) \cap f^{-1}(y_2) \neq \emptyset$ comme les images réciproques comparées dans (A.0.10.2) sont finies. Mais ça veut dire que $y_1 = y_2$, donc d_Y est vraiment une métrique.
3. Soit $U \in \mathcal{O}$ et $y_0 \in U$, alors $f^{-1}(U)$ est ouverte dans X . Choisis $\varepsilon > 0$ tel que $B_\varepsilon(x_0) \subseteq f^{-1}(U)$ pour tout $x_0 \in f^{-1}(y_0)$. Soit $y \in B_\varepsilon(y_0)$ quelconque, alors par définition (A.0.10.2) il existe $x \in f^{-1}(y)$, $x_0 \in f^{-1}(y_0)$ tels que $d_X(x, x_0) \leq \varepsilon$. Mais ça implique $x \in f^{-1}(U)$, donc $y \in U$. Autrement dit, $B_\varepsilon(y_0) \subseteq U$ et U est ouvert par rapport à d_Y .

Inversement, soit $B_\varepsilon^o(y_0)$ une boule ouverte de (Y, d_Y) quelconque. Alors,

$$f^{-1}(B_\varepsilon^o(y_0)) = \{x \in X \mid \exists x_0 \in f^{-1}(y_0), x' \in f^{-1}(f(x)) : d_X(x', x_0) < \varepsilon\}$$

$$= \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^n \underbrace{f|_{X_j}^{-1} \circ f|_{X_i}}_{\text{ouverte}} \left[B_\varepsilon^o \left(f|_{X_i}^{-1}(y_0) \right) \right] : \text{ouverte dans } (X, d_X)$$

et donc $B_\varepsilon^o(y_0)$ est ouvert dans (Y, \mathcal{O}) .

□

A.0.11 Lemme de Lebesgue sur espaces compacts

Soit X un espace métrique compact et $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement. Alors il existe un $\varepsilon > 0$, appelé **nombre de Lebesgue** tel que

$$\forall x \in X : \exists i \in I : B_\varepsilon(x) \subseteq U_i \tag{A.0.11.1}$$

Preuve par l'absurde : Suppose que (A.0.11.1) est faux pour tout $\varepsilon > 0$. Alors, il existe $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (0, \infty)$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X$ tels que $\varepsilon_n \downarrow 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, i \in I : B_{\varepsilon_n}(x_n) \not\subseteq U_i$. Car X est compact, on peut supposer que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ pour quelque $x \in X$.

Il existe un $\varepsilon > 0$ et $j \in I$ tel que $B_\varepsilon(x) \subseteq U_j$. D'autre, il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $\varepsilon_n < \varepsilon/2$ et $x_n \in B_{\varepsilon_n}(x)$. Par conséquence il faut

$$B_{\varepsilon_n}(x_n) \subseteq B_\varepsilon(x) \subseteq U_j \quad ,$$

qui est une contradiction!

□

A.0.12 Lemme sur fonctions convexes et concaves

Toute fonction $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe avec $f(0) \leq 0$ est sur-additive, c'est-à-dire $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ pour $x, y \in I$. Toute fonction $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ concave avec $f(0) \geq 0$ est sous-additive, c'est-à-dire $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ pour $x, y \in I$.

A.0.13 Définition: Fonction localement constante

Soit X un espace topologique et $f : X \rightarrow Y$ une fonction dans une partie Y n'importe laquelle. Alors, f est dit **localement constante** si pour tout $x \in X$ il existe un voisinage U de x tel que $f|_U$ est constante.

Remarques

- (i) Si X est connexe, alors $f : X \rightarrow Y$ est constante ssi elle est localement constante.

A.0.14 Définition: Point d'accumulation

Soit X un espace topologique, $x \in X$ et $A \subseteq X$. Alors, x est dit **point d'accumulation** de A ssi pour toute voisinage U de x on a $(U \cap A) \setminus \{x\} \neq \emptyset$.

Remarques :

- (i) Si X est de Hausdorff et x point d'accumulation de A , alors toute voisinage U de x contient une infinité des points de A .
- (ii) Soit x un point d'accumulation de $A \subseteq X$ avec une base dénombrable des voisinages. Alors, il existe une suite dans $A \setminus \{x\}$ qui converge vers x .
- (iii) Toute partie $Y \subseteq X$ est fermé ssi elle contient tout son point d'accumulation.

A.0.15 Définition: Topologie discrète

Un point x d'un espace topologique X est dit **isolé** ssi le singleton $\{x\}$ est une ouverte. X est dit **discret** ssi tout point de X est isolé.

Remarques :

- (i) X est discret ssi tout partie de X est une ouverte. En ce cas, les singletons de X forment une base de la topologie de X .
- (ii) La topologie d'un espace discret est métrisable.
- (iii) Tout espace discret est de Hausdorff.
- (iv) Tout espace fini de Hausdorff est discret.
- (v) Tout application d'un espace discret dans un espace topologique est continue.
- (vi) Deux espaces discrets sont homéomorphes ssi ils ont même cardinalité.
- (vii) Un espace discret est compacte ssi il est de cardinal fini.
- (viii) Tout $x \in X$ n'est pas isolé ssi x est un point d'accumulation de $X \setminus \{x\}$.
- (ix) Soit $x \in X$ tel que x possède une base de voisinages dénombrable. Alors, par remarque A.0.14(ii) et (viii) x n'est pas isolé ssi il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X \setminus \{x\}$ qui converge vers x .
- (x) Soit $Y \subseteq X$ une partie quelconque. Alors, Y est discrète par rapport à la topologie induit ssi elle ne possède pas des points d'accumulation dans Y .
- (xi) Soient X, Y espaces topologiques, $f : X \rightarrow Y$ continue et injective et $f(X)$ discret dans Y . Alors, X est discret.
- (xii) Un sous-espace $Y \subseteq X$ peut être discret sans être fermé dans X . Considère par exemple l'ensemble $\{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans \mathbb{R} .
- (xiii) Tout espace discret Y à base dénombrable est dénombrable.
- (xiv) Par conséquence, si X est à base dénombrable et $Y \subseteq X$ discret, alors Y est dénombrable.
- (xv) Si X est discret et \sim une relation d'équivalence sur X , alors la topologie quotient sur X/\sim est aussi discrète.

A.0.16 Définition: Relativement compact

Une sous-partie $Y \subseteq X$ d'un espace topologique est dit **relativement compacte** ssi sa fermeture $\text{cl}(Y)$ est compact.

Remarque : Si X est Hausdorff et compact, alors toute sous-partie $Y \subseteq X$ est relativement compacte.

A.0.17 Définition: Compact par points d'accumulation

Un espace topologique X est dit **compact par points d'accumulation** ssi tout sa partie infinie possède un point d'accumulation dans X .

Remarque : Tout espace compact est compact par points d'accumulation.

A.0.18 Lemme sur espaces de Hausdorff localement compacts

Soit X un espace de Hausdorff localement compact. Soit $Y \subseteq X$ une partie qui ne possède pas des points d'accumulation et $x \in X \setminus Y$. Alors, il existe ouvertes U, V tels que $x \in U$, $Y \subseteq V$ et $U \cap V = \emptyset$.

Preuve : Soit $K \subseteq X$ une compacte et $U \subseteq K$ une ouverte contenant x . Car Y n'a pas de points d'accumulation, on sait que $K \cap Y$ est un ensemble fini. Car X est de Hausdorff, on peut donc trouver une voisinage $U_x \subseteq U$ de x et voisinages $U_y \subseteq Y$ des $y \in K \cap Y$ tels que $U_x \cap U_y = \emptyset \forall y \in K \cap Y$. De plus, car X est de Hausdorff, le supplémentaire K^c est ouvert. Donc U_x et $V := K^c \cup \bigcup_{y \in K \cap Y} U_y$ sont des ouverts disjoints, contenant x et Y respectivement. □

A.0.19 Définition: Groupe topologique

Un **groupe topologique** (G, \circ) est une groupe munit d'une topologie telle que :

- L'inversion $g \mapsto g^{-1}$ est continue sur G .
- La composition $\circ : G \times G \rightarrow G$ est continue sur l'espace topologique produit $G \times G$.

Remarques :

- (i) Tout sous-groupe d'un groupe topologique G est un groupe topologique lui même par rapport à la topologie induit par G .
- (ii) Si $N \trianglelefteq G$ est un sous-groupe normal dans G , alors le groupe quotient G/N munit de la topologie quotient est aussi un groupe topologique. L'homomorphisme quotient $\Pi : G \rightarrow G/N$ est continue et ouvert.
- (iii) Tout groupe topologique est de Hausdorff ssi $\{1\}$ est fermé[2].
- (iv) Si G est en plus de Hausdorff et $N \trianglelefteq G$ un sous-groupe normal et fermé, alors le groupe quotient est aussi Hausdorff.
- (v) G satisfait le premier axiome de dénombrabilité ssi l'unité 1 possède une base de voisinages dénombrable.

A.0.20 Définition: Groupe discret

Une groupe topologique est dit **discret** ssi sa topologie sous-jacente est discrète.

Remarques : Soit G un groupe topologique.

- (i) G est discrète ssi l'unité 1 est isolé, c'est-à-dire par A.0.15(viii) que 1 n'est pas point d'accumulation de $G \setminus \{1\}$.
- (ii) Suppose que G satisfait le premier axiome de denombrabilité. Alors, par remarque A.0.15(ix), G est discret ssi il n'existe pas une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq G \setminus \{1\}$ qui converge vers 1.
- (iii) Si G est un sous-groupe fini d'un groupe topologique de Hausdorff, alors G est discrète.
- (iv) Toute sous-groupe N normal, discrète d'un groupe topologique connexe G est appartenu dans le centre de G et est donc abélien.
- (v) Si G est discret et $N \trianglelefteq G$ un sous-groupe normal, alors G/N est discret.
- (vi) Si G est de Hausdorff, alors tout son sous-groupe discret H est fermé. Vois A.0.22.

A.0.21 Lemme sur nuclei des groupes topologiques

Soit (G, \circ) un groupe topologique et $U \subseteq G$ une ouverte contenant l'unité 1. Alors, il existe une ouverte $V \subseteq U$ contenant 1 telle que $V = V^{-1}$ et $V \cdot V \subseteq U$.

Preuve : Car $p := \circ : G \times G \rightarrow G$ est continue, $p^{-1}(U)$ est ouverte dans $G \times G$ et $(1, 1) \in p^{-1}(U)$. Donc, il existe ouvertes $V_1, V_2 \subseteq G$ tels que $(1, 1) \in V_1 \times V_2 \subseteq p^{-1}(U)$, c'est-à-dire $1 \in V_1, V_2$ et $V_1 \circ V_2 \subseteq U$. Car les V_1^{-1}, V_2^{-1} sont ouvertes aussi, $V := V_1 \cap V_2 \cap V_1^{-1} \cap V_2^{-1}$ est ouvert. Évidemment V satisfait les affirmations. \square

A.0.22 Corollaire sur points isolés dans groupes topologiques

Soit G un groupe topologique. Alors :

1. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq G$ sont suites tels que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \in G$ et $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y \in G$, alors

$$x_n y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} xy .$$

2. Suppose G de Hausdorff. Alors, tout sous-groupe discret $H \leq G$ est fermé.

Preuve :

1. Considérons d'abord le cas spécial $x = 1 = y$. Soit U un voisinage de 1. Par A.0.21 il existe un voisinage V de 1 telle que $1 \in VV \subseteq U$. Choisis $N, M \in \mathbb{N}$ assez grand tels que $\forall n \geq N, m \geq M$ on a $x_n y_m \in V$. Alors pour $n \geq \max\{N, M\}$ on a $x_n y_n \in VV \subseteq U$.

En cas général, on sait que $x^{-1}x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ et $y_n y^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$. Donc, par le dessus

$$x^{-1}x_n y_n y^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

de qui suit l'affirmation.

2. Suppose H n'est pas fermé, alors par remarque A.0.14(iii) il existe un $g \in H^c$ tel que g est point d'accumulation de H . Soit U un voisinage de l'unité $1 \in G$ et $V \subseteq U$ un voisinage de 1 tel que $V = V^{-1}$ et $VV \subseteq U$. Alors, Vg est un voisinage de g . Car G est Hausdorff, il existe deux $g_1 \neq g_2 \in (Vg) \cap H$. Donc

$$1 \neq \underbrace{g_1 g_2^{-1}}_{\in H} = g_1 g^{-1} g g_2^{-1} = \underbrace{(g_1 g^{-1})}_{\subseteq V} \underbrace{(g g_2^{-1})^{-1}}_{\subseteq V^{-1}} \subseteq (VV^{-1}) \cap H \subseteq U \cap H ,$$

c'est-à-dire 1 est un point d'accumulation de H . Par remarque A.0.20(i) H n'est pas discret. \square

A.0.23 Lemme sur sous-groupes compacts

Soit (G, \circ) un groupe topologique. Alors :

1. Si $K_1, K_2 \subseteq G$ sont sous-ensembles compacts, alors $K_1 \circ K_2$ est également.
2. Soit $N \trianglelefteq G$ un sous-groupe compact & normal et $\Pi : G \rightarrow G/N$ l'homomorphisme quotient. On considère G/N munit de la topologie quotient. Alors, un sous-ensemble $H \subseteq G/N$ est compact ssi son image réciproque $\Pi^{-1}(H)$ est compact.

Preuve :

1. Par définition la composition $\circ : G \times G \rightarrow G$ est continue par rapport à la topologie produit sur $G \times G$. Comme on sait, $K_1 \times K_2$ est une compacte dans $G \times G$. Donc, son image $K_1 \circ K_2$ est aussi compacte.
2. Car Π est continue, il envoie compactes à compactes, d'où direction " \Leftarrow " est trivial. Direction peut être trouvé dans [3], pp. 109.

\square

A.0.24 Définition: Sous-groupe compact maximal

Soit (G, \circ) un groupe topologique. Alors, un sous-groupe $G_0 \leq G$ est dit **compact maximal** ssi il est compact et il n'existe pas un autre sous-groupe compact H tel que $G_0 < H \leq G$.

Exemple & remarques :

- (i) Le groupe $SO_2(\mathbb{R})$ dans $SL_2(\mathbb{R})$ est compact maximal.
- (ii) Pour tout deux sous-groupes compacts maximaux $G_0, G_1 \leq G$, on peut trouver un $g \in G$ tel que $\text{ad}_g(G_0) = G_1$. Autrement dit, tous sous-groupes compacts maximaux sont conjugués.
- (iii) Par (ii) on déduit que un sous-groupe compact maximal est unique ssi elle est normal.

A.0.25 Lemme sur sous groupes compacts maximaux

Soient $(G, \circ), (H, \circ)$ groupes topologiques, $f : G \rightarrow H$ un homomorphisme continu, surjectif, propre. Alors, si $G_0 \leq G$ est un sous-groupe compact maximal dans G , $f(G_0)$ est également dans H .

Preuve : Car f est homomorphe & continue, $f(G_0)$ est un sous-groupe compact de H . Si $H_0 \leq H$ est un sous-groupe compact tel que $f(G_0) < H_0 < H$, alors par supposition $f^{-1}(H_0)$ est un sous-groupe compact et par surjectivité de f il faudrait $G_0 < f^{-1}(H_0) < G$, une contradiction à la maximalité de G_0 . Donc, $f(G_0)$ est un sous-groupe compact maximal dans H . □

Conséquence : Soit $N \trianglelefteq G$ un sous-groupe compacte et $\Pi : G \rightarrow G/N$ l'homomorphisme quotient dans G/N . Si $G_0 \leq G$ est un sous-groupe compacte maximale, alors son image $\Pi(G_0)$ est également. Cela suit de [A.0.23\(2\)](#) et [A.0.25](#).

A.0.26 Définition: Groupe virtuellement abélien

Un groupe G est dit **virtuellement abélien**, si il possède un sous-groupe abélien d'indice fini.

A.0.27 Définition: Action imprimitive de groupe

Soit G un groupe qui agit sur l'ensemble Ω . Un G -**bloc** de Ω est une sous-partie $\Delta \subseteq \Omega$ telle que pour tout $g \in G$ on a $g\Delta = \Delta$ ou $g\Delta \cap \Delta = \emptyset$. Un G -bloc est dit **non-trivial** ssi il a cardinal ≥ 2 et est inégal à Ω . Une action transitive de groupe qui admet un bloc non-trivial, est dit **imprimitive**, autrement elle est dit **primitive**.

A.0.28 Théorème sur actions imprimitives

Soit G un groupe qui agit transitivement sur l'ensemble Ω . Alors, il y a équivalence entre :

1. Le groupe agit imprimitivement sur Ω .
2. Il existe une décomposition $\Omega = \bigsqcup_{\Lambda \in \mathcal{L}} \Lambda$ de Ω par une famille \mathcal{L} , telle que pour tout $\Lambda \in \mathcal{L}$ on a $\Lambda \subsetneq \Omega$, $|\Lambda| \geq 2$ et $g\Lambda \in \mathcal{L} \forall g \in G$.

En tout cas, le groupe agit transitivement sur \mathcal{L} . De plus tous les $\Lambda \in \mathcal{L}$ sont de même cardinal et on a

$$|\mathcal{L}| = |G : \text{St}_G(\Lambda)| \quad .$$

Pour $\lambda \in \Lambda \in \mathcal{L}$ on a évidemment $\text{St}_G(\lambda) \subseteq \text{St}_G(\Lambda)$.

A.0.29 Théorème : Caractérisation de la primitivité

Soit G un groupe qui agit transitivement sur l'ensemble Ω , où $|\Omega| \geq 3$. Alors, il y a équivalence entre

1. L'action de G est primitive.
2. Pour tout $\omega \in \Omega$, le stabilisateur $\text{St}_G(\omega)$ est un sous-groupe maximale de G .
3. Il existe un $\omega \in \Omega$ tel que $\text{St}_G(\omega)$ est un sous-groupe maximal de G .

A.1 Topologie algébrique et géométrie différentielle**A.1.1 Définition: Revêtement**

Soient C, X espaces topologiques et $p : C \rightarrow X$ continue, surjective. Alors, p s'appelle **revêtement**²² de la **base** X par l'**espace total** (ou **espace étalé**) C , ssi pour tout $x \in X$ il existe une ouverte $V \ni x$ telle que $p^{-1}(V) = \bigsqcup_{i \in I} U_i$ est une union des ouvertes U_i disjointes et $p|_{U_i} : U_i \rightarrow V$ est un homéomorphisme $\forall i \in I$. Souvent on dit aussi la paire (C, p) revêtement de X .

Les ouvertes U_i s'appellent **feuilletés**²³ sur le **trivialisant**²⁴ V . On appelle **fibre**²⁵ **au-dessus du point** x le sous-espace (discret) $p^{-1}(x) \subseteq C$.

Si on peut prendre $V = X$, on dit le revêtement **trivial**.

A.1.2 Définition: Groupe des automorphismes d'un revêtement

Soient C, X espaces topologiques et (C, p) un revêtement de X . On note

$$\text{Aut}(p) := \{f : C \rightarrow C \text{ homéomorphisme} \mid p \circ f = p\}$$

le groupe des homéomorphismes sur C (par rapport à la composition) qui préservent p à droite²⁶. On appelle les éléments de $\text{Aut}(p)$ **automorphismes** du revêtement p .

A.1.3 Définition: Revêtement universel

Un revêtement (C, p) d'un espace topologique est dit **universel** ssi C est connexe par arcs, localement connexe par arcs et $\Pi_1(C) = \{0\}$.

A.1.4 Définition: Nombre de Betti et la caractéristique d'Euler

Soit M une variété lisse de dimension n dont la cohomologie de de Rham est de dimension finie. Alors, on appelle $b_k(M) := \dim_{\mathbb{R}} H_{\text{dR}}^k(M)$ le **k -ième nombre de Betti** de M . On note

$$\chi(M) := \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \dim H_{\text{dR}}^k(M)$$

et appelle $\chi(M)$ la **caractéristique d'Euler** de M .

22. Anglais : Covering.

23. Anglais : Sheets.

24. Anglais : Evenly-covered neighborhood.

25. Anglais : Fiber.

26. Anglais : Deck transformation group.

B Symboles & Abréviations

ssi : Si et seulement si.

\mathbb{R}_+ : $[0, \infty)$.

\mathbb{C}_+ : $\mathbb{R}_+ + i\mathbb{R}_+$.

$\overline{\mathbb{C}}$: $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

\mathcal{H} : Demi-plan supérieur : $\mathcal{H} := \{\Im > 0\} \subseteq \mathbb{C}$. Vois 2.1.2.

$\partial\mathcal{H}$: $\partial\mathcal{H} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Vois 2.1.2.

$\overline{\mathcal{H}}$: $\mathcal{H} \cup \partial\mathcal{H}$. Vois 2.1.2.

$\mathbb{R}_{>0}$: Réelles strictement positives.

$\mathbb{R}_{<0}$: Réelles strictement négatives.

D° : Disque unité ouvert dans \mathbb{C} . Vois 2.1.2.

\mathbb{K} : Corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

\mathbb{P} : Les nombres premiers.

$\Re(z)$: Partie réelle de $z \in \mathbb{C}$.

$\Im(z)$: Partie imaginaire de $z \in \mathbb{C}$.

$B_r(x)$: La boule de rayon r au tour du point x .

\arg : Argument des nombres complexes.

Π : Homomorphisme canonique $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$. Vois 2.1.8.

Π_* : Isomorphisme $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})/\{\pm 1\} \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$ induit par Π . Vois 2.1.8.

$\mathcal{C}(X, Y)$: Fonctions continues entre les espaces topologiques X, Y .

$\mathcal{C}_c(X, E)$: Fonctions continues sur l'espace topologique X dans l'espace vectoriel E avec support compact.

$\mathcal{C}_b(X, E)$: Fonctions continues, bornées sur l'espace topologique X dans l'espace normé E .

$\mathcal{P}(\Omega)$: L'ensemble des parties de l'ensemble Ω .

$\mathcal{B}(X)$: σ -algèbre Borelienne sur l'espace topologique X .

e_{ij} : Base standard dans $\mathbb{K}^{n \times n}$.

$\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$: Anneau des \mathbb{K} -endomorphismes sur un \mathbb{K} -espace vectoriel V .

$\ker(f)$: Noyau du homomorphisme f .

$ds_{\mathcal{H}}^2$: Tenseur métrique hyperbolique sur le demi-plan \mathcal{H} . Vois 2.1.2.

$d_{\mathcal{H}}$: Distance hyperbolique sur le demi-plan \mathcal{H} . Vois 2.1.4.

$l_{\mathcal{H}}(\gamma)$: Longueur hyperbolique du chemin γ dans \mathcal{H} . Vois 2.1.2.

$\mathrm{Orb}_G(\omega)$: Orbite d'un élément $\omega \in \Omega$ par rapport à l'action d'un groupe G sur Ω .

$\mathrm{Isom}(\mathcal{H})$: Le groupe des isométries sur \mathcal{H} . Vois 2.2.10.

β : Birapport sur $\overline{\mathbb{C}}^4$. Vois 2.5.1.

ad_f : Automorphisme intérieur associé au élément f d'une groupe.

$T_z\mathcal{H}$: Espace tangent de \mathcal{H} au point $z \in \mathcal{H}$. Vois 3.3.2.

$T\mathcal{H}$: Fibré tangent de \mathcal{H} . Vois 3.3.2.

$U\mathcal{H}$: Vecteurs de $T\mathcal{H}$ de norme 1. Vois 3.3.2.

$\mathrm{cl}(Y)$: Fermeture d'une sous-partie Y d'un espace topologique X .

$\mathrm{Aut}(p)$: Groupe des automorphismes d'un revêtement p . Voir A.1.2.

Références

- [1] A. F. Beardon, *The geometry of discrete groups*
Graduate Texts in Mathematics, Springer 1983
- [2] V. Paulsen, *Topological groups and their representation*
Course notes, University of Houston
<http://www.math.uh.edu/~vern/grouprepn.pdf> (27.10.2010)
- [3] L. S. Pontriagin, *Topological groups*
Taylor & Francis, 1977
- [4] T. Jørgensen, *On Discrete Groups of Möbius Transformations*
AMS Vol. 98, No. 3, pp. 739-749, 1976
- [5] G. A. Jones, D. Singerman, *Complex Functions : An Algebraic and Geometric Viewpoint*
Cambridge University Press, 1987
- [6] C. Walkden, *Lecture Notes in Hyperbolic Geometry*
<http://www.maths.manchester.ac.uk/~cwalkden/hyperbolic-geometry/lecture14.pdf> (01.11.2010)
- [7] S. Katok, *Fuchsian Groups*
University of Chicago Press, 1992
- [8] Elements of mathematics : General Topology, *N. Bourbaki*
Springer, 1998
- [9] J. G. Ratcliffe, *Foundations of hyperbolic manifolds, 2nd edition*
Springer, 2006

Index

- action
 - continue, [34](#)
 - discontinue, [34](#)
 - imprimitive, [76](#)
 - primitive, [76](#)
 - proprement discontinue, [34](#)
- application
 - propre, [70](#)
- application d'identification, [50](#)
- application de cycle, [50](#)
- automorphisme
 - d'un revêtement, [77](#)
- axe, [21](#)
- base
 - de revêtement, [77](#)
- birapport, [17](#)
- bloc
 - trivial, [76](#)
- block
 - d'action de groupe, [76](#)
- caractéristique d'Euler, [77](#)
- centre
 - d'un horocycle, [54](#)
- chemin, [6](#)
 - rectifiable, [58](#)
- condition de cycle, [50](#)
- cuspid, [54](#)
- cycle d'arêtes, [50](#)
- demi-cercle
 - droite, [9](#)
- demi-plan supérieur, [6](#)
- demi-tour, [28](#)
- disque de Poincaré, [32](#)
- distance
 - de Poincaré, [6](#)
- domaine de Dirichlet, [49](#)
- domaine fondamental, [45](#)
 - localement fini, [46](#)
- elliptique, [20](#)
- empilement, [52](#)
- ensemble de Farey, [30](#)
- ensemble limite, [38](#)
- espace
 - discret, [73](#)
 - quotient, [66](#)
- espace étalé
 - de revêtement, [77](#)
- espace SLP, [58](#)
- espace total
 - de revêtement, [77](#)
- feuille
 - de revêtement, [77](#)
 - fibres tangentes, [26](#)
- fonction
 - localement constante, [72](#)
- géodésique, [6](#), [61](#)
- géodésique de Farey, [30](#)
- géodésique minimisante, [61](#)
- groupe
 - élémentaire, [39](#)
 - modulaire, [7](#)
 - sans torsion, [43](#)
 - totalelement elliptique, [40](#)
 - virtuellement abélien, [76](#)
- horocycle, [54](#)
- horodisque, [54](#)
- hyperbolique, [20](#)
- hyperbolisation locale, [58](#)
- identification d'arêtes, [50](#)
- inégalité
 - de Beardon, [42](#)
 - de Jørgensen, [41](#)
- isométrie locale, [59](#)
- isomorphisme canonique, [8](#)
- isomorphisme isométrique, [59](#)
- localement fini, [35](#)
- localement finie, [35](#)
- longueur
 - d'un chemin, [6](#)
- longueur d'un chemin, [58](#)
- nombre de Betti, [77](#)
- nombre de Lebesgue, [72](#)
- parabolique, [20](#)
- point
 - isolé, [73](#)
- point d'accumulation, [73](#)
- point extérieur, [9](#)
- point intérieur, [9](#)
- points
 - bien alignés, [63](#)
 - géodésiquement connectés, [61](#)
- polyèdre de Schottky, [54](#)
- polygone hyperbolique, [16](#)
- produit scalaire
 - hyperbolique, [26](#)
- réflexion, [13](#)
- réflexion principale, [13](#)
- rapport anharmonique, [17](#)
- relèvement, [8](#)
- relativement compacte, [73](#)

représentation conforme, [32](#)
revêtement, [64](#), [77](#)
 trivial, [77](#)
 universel, [77](#)

sous-groupe
 compact maximal, [76](#)
surface hyperbolique, [58](#)

tenseur métrique
 de Poincaré, [6](#)
topologie
 quotient, [70](#)
triangle hyperbolique, [16](#)

voisinage
 trivialisant, [77](#)
voisinage de Zassenhaus, [42](#)