Sommersemester 2008

6. Übungsserie zur Vorlesung

Gewöhnliche Differentialgleichungen

1. Beweisen Sie die die Abelsche Formel für die Wronskideterminante $W(u_1 \dots u_n)$ einer linearen Differentalgleichung n-ter Ordnung $y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \dots p_0 y = 0$ mit stetigen Koeffizientenfunktionen

$$W(u_1 \dots u_n) = W(u_1 \dots u_n)\Big|_{x_0} e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_{n-1}(t)dt}$$

Hinweis: Geben Sie eine Formel für die Differentiation von Determinanten an!

2. Für eine Differentialgleichung 2. Ordnung der Gestalt $F(y'', y', y, x) = 0$ lassen sich keine allgemeine Lösungshinweise geben, wohl aber, wenn in Spezialfällen nicht alle Bestandteile explizit vorkommen.

   2.1. $F(y'', y', x) = 0$
   Substituieren Sie $y'(x) = z(x)$ und versuchen Sie sich an der entstehenden Differentialgleichung 1. Ordnung.

   2.2. $F(y'', y', y) = 0$
   Substituieren Sie $y' = p(y)$. dann folgt $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p$.

   Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$F\left(\frac{dp}{dy} \cdot p, p, y\right) = F_1(p', p, y)$$

   eine Differentialgleichungen 1. Ordnung für p mit der unabhängigen Variablen y. Anschließend integriert man die Sustitutionsgleichung.
   Lösen Sie die Differentialgleichungen

   a) $y'' = (y')^2 \sin y$

   b) $3yy'y'' = (y')^3 - 1 \qquad$ mit $\; y(0) = 1$, $\; y'(0) = 2$

   2.3. Falls in F sowohl x als auch y' explizit nicht vorkommen und F bezüglich y'' linear ist, so erweitere man mit $2y'$ und interpretiere $2y'y''$ als $\frac{d}{dx}(y')^2$.
   Lösen Sie die Differentialgleichungen

   a) $y'' = 2\sin(2y) \qquad y(0) = \frac{\pi}{2},\; y'(0) = 2$

   b) $y^3 y'' = -1 \qquad y(1) = y'(1) = 1$

3. Lösen Sie die Airy'sche Differentialgleichung $y'' - xy = 0$ durch einen Potenzreihenansatz für y.